

T1 : Breve definición sobre conjuntos

&),(: Demostración del derecho y la inversa de una igualdad (doble contenido).

&Otras anotaciones: $P(A)$ {parte de A} CA {contenido en A} $\#$ {absurdo} $\emptyset$ {conjunto vacío} $"$ {intersección} U {unión (o)}

Recuerda tb. $A \cup B = A \cup B$ $A \cap B = A \cap B$

&Producto vectorial : $A \times (B-C)$ igualamos el primer término (A) a x y le segundo (B-C) a y algo así:

$(x,y) \in A \times (B-C)$

$x \in A$

$y \in (B-C)$

T2 : Aplicaciones

Dados dos ctos. A, B una **correspondencia** es asociar elementos de A con elementos de B .

&Aplicación : Correspondencia de A en B tal que a cada elem de A le corresponde uno único de B.

Aplicación : .

I) Esta bien definida $\forall x \in A \exists f(x) \in B$

II) Aplicación $x \mapsto x' \mid f(x) = f(x')$.

&Imagen : A los elementos de A tales que $f(a)=b$ con $a \in A$, decimos que es la imagen de a y a la antimagen de b .

&Clasificación de las aplicaciones :

- Si $f: A \rightarrow B$ aplicación cumple que todo elem de B con antimagen ésta es única decimos que es Inyectiva

Inyectiva ! $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

- Si todo elemnto de B tiene antimagen decimos que la aplicación es sobre .

Sobre ! $\forall y \in B \exists x \in A / f(x)=y$

- Será biyectiva si es a la vez inyectiva y sobre

Biyectiva ! Es Inyectiva y sobre

Gráficamente :

- Trazamos líneas verticales si cruzan siempre a la gráfica en un único punto (Aplicación)
- Líneas horizontales Toca una vez a la gráfica por línea (biyectiva) si cualq línea horiz la toca (sobre)

&Dominio u original de f : Todos los elementos de A que tienen imagen en B .

$$\text{Dom}(f) = \text{Or}(f) = \{a \in A / \exists b \in B : f(a) = b\}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in B / \exists x \in A : f(x) = y\}$$

$f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ dos aplicaciones , llamamos **composic. De f con g**

$$a \mapsto f(a) \quad b \mapsto g(b)$$

a la aplicación $h : A \rightarrow B$ denotada por $h = g \circ f = g(f(a))$

$$a \mapsto h(a) = g(f(a))$$

&Propiedades :

$$\bullet (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$\text{II) } (f^{-1})^{-1} = f$$

$$\text{III) } (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Notas : Si existe una aplicación $f : A \rightarrow B$ biyectiva , $f^{-1} : B \rightarrow A$ biyectiva tal que verifique :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$$

T3 : Relaciones binarias de equivalencia

Sea A un conjunto cualquiera $R \subset A \times A$ decimos que R es una **RBE** si verifica :

- Reflexiva ! $\forall a \in A \quad aRa$
- Simétrica ! $aRb \Rightarrow bRa$

c) Transitiva ! $aRb \wedge bRc$

bRc

&Clases de equivalencia : Dado A cto y R RBE llamamos clase de equiv. A CA al cto formado por todos los elemntos de A relacionados con a .

$$\text{Cl}(a) = C(a) = a = \{ x \in A / xRa \}$$

&Conjunto cociente: (de A sobre R) conj de todas las clases de equiv de los elem de A

$$A/R = \{ a / a \in A \}$$

Notas:

La unión de las clases de equivalencia tiene que recubrir todo el conjunto $\mathbb{R}$ (recta), $\mathbb{R}^2$ (plano), $\mathbb{R}^3$ (espacio) .

m^0 = múltiplos de m

&Descomposición canónica de una aplicación : Sea $f: A \rightarrow B$ una aplicación definimos en A la relación binaria

$$(a, b) \in R \iff f(a) = f(b)$$

Comprobamos que efectivamente f es una RBE hallamos sus clases y su conjunto cociente y ordenamos de esta forma :

$$A / \sim_f = \{ [a] \mid a \in A \}$$

$$[a] \cdot [b] = [f(a) \cdot f(b)]$$

T4 : Grupos

Leyes de composición : Sea A un cto. Decimos que $*$ es una ley de compo interna con $*$: $A \times A \rightarrow A$ si $*$ es una aplicación

$$(a, b) \mapsto a * b$$

Nota definimos $*$ como operador y traducimos su presencia a operado con...

&Si A, B conjuntos ! es una ley de comp.. externa si $*$: $A \times B \rightarrow A$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

si $*$ es aplicación.

&Grupo sea G un conjunto y $*$ una ley de comp. interna decimos que $(G, *)$ es un grupo si verifica :

- Asociativa: $\forall x, y, z \in G \quad (x * y) * z = x * (y * z)$.
- Elemento neutro : $e \in G : \forall x \in G \quad e * x = x * e = x$.
- El.simétrico o inverso : $\forall x \in G \quad x^{-1} \in G \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.
- Conmutativa : (Si se verif. g.conmutativo) $\forall x, y \in G \quad x * y = y * x$.

de G : Sea $(G, *)$ grupo decimos q $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ es subgrupo si: $\forall x, y \in H \quad x * y^{-1} \in H$ y lo de mostramos por $H \neq \emptyset$, es decir, si $(H, *)$ es grupo. $H \neq \emptyset$ es subg **propio** si $H \neq G$ y $H \neq \{e\}$ se les llama subg **impropios**.

Nota Sea $(G, *)$ grupo, $|G| = n$ elementos de G .

De Lagrange : Sea $(G, *)$ grupo finito, $H \neq \emptyset$! $|H| \mid |G|$ { $|H| \mid |G|$ } Este tma facilita busq de subgrupos aquellos cuyo orden sea cociente de orden (H) y div = entero.

de un elemento : Dado $(G, *)$ grupo orden de un elem. $x \in G$ al menor n° de veces q operamos para obtener neutro de G , es decir,

$$O(x) = n \mid n \in \mathbb{N} \text{ es el menor } q \text{ verifique}$$

$$x * x * x * \dots * x = e$$

Nota : $x^n = e$; $nx = e$ (notaciones más usadas en multip y aditivos respect).

: Sea $(G,*)$ grupo decimos G engendrado por x si ...

$G = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ multiplicativo.

$G = \{e, x, 2x, \dots, (n-1)x\}$ aditivo.

T4(b) : Homomorfismos

Homomorfismos : Sean $(G,*)$ y $(G',\#)$ grupos $f:(G,*) \rightarrow (G',\#)$ es homomorfismo de grupos si verifica :

I f.aplicación.

II $\forall x, y \in G \quad f(x*y) = f(x) \# f(y)$.

&Nucleo e imagen : Sea $f: G \rightarrow G'$ homom. De grupos llamamos nucleo $\text{Ker}(f)$ al cto.

$\text{Ker}(f) = \text{Nu}(f) = \{x \in G / f(x) = e'\}$ (siendo e' neutro de G')

E imagen de $f: G \rightarrow G'$ al conjunto :

$\text{Im}(f) = \{y \in G' / \exists x \in G : f(x) = y\}$

n de los Homomorfismos :

- f (inyectiva) : Monomorfismo.
- f (sobre) : Epimorfismo.
- f (biyectiva) : Isomorfismo
- $G = G'$: Endomorfismo
- $G = G'$ y f biyectiva : Automorfismo

de los Homom. :

- $f(e) = e'$
- $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.
- $f(x^2) = f(x)^2$

Descomposición canónica de un Homomorfismo.

Dado $f: (G,*) \rightarrow (G',\#)$ Homom. de grupos .

$\forall x, y \in G \quad x \in R \iff f(y) \neq f(x) \iff y^{-1} \in \text{Ker } f \iff f(x) = f(y) \iff Rf$ es R.B.E

$G / Rf = G / R \text{Ker } f$

Para la descomposic. canónica

$G \rightarrow G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f \rightarrow G'$

$x \mapsto x \mapsto f(x) \mapsto f(x)$

epimorf. isomorf. monomorf.

T5 : Cardinalidad.

: N° de elementos de un cto. finito. Al cardinal de los ctos. finitos se les llama n° transfinitos.

de equipotencia :X, Y ctos. $X \sim Y$! $f: X \rightarrow Y$ aplicación biyectiva

($\sim$ es una RBE y X equipotente Y).

I. Reflexiva pc x cto $X \sim X$ pues $\text{Id}_X : x \mapsto x$ aplic. biyectiva

$$x \mapsto \text{Id}(x) = x$$

II. Simétrica $X \sim Y$! $f: X \rightarrow Y$ aplicación biyectiva ! $f^{-1} : Y \rightarrow X$!

$$Y \sim X$$

III. Transitiva :

$X \sim Y$ $f: X \rightarrow Y$ Aplicación biyectiva

" "

$Y \sim X$ $g: Y \rightarrow X$ Aplicación biyectiva

$g \circ f : X \rightarrow Z$ aplicación biyectiva ! $X \sim Z$

$$X = \{Y / X \sim Y\} \cup \{Y / \text{Card}(x_1) = \text{Card}(Y)\}$$

!

$\{Y / \exists f: X \rightarrow Y \text{ aplic biyectiva}\}$

numerables : Sea X ctoes numerable si X finito o $X \sim \mathbb{N}$ (se puede ordenar como sucesion de n° finitos entre si)

X numerable ! X fto o $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ aplicac biyectiva

X numerable ! X fto o $X = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ con $a_i \neq a_j$ pc $i \neq j$

Algunos ejemplos de ctos numerables serían ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$) de no numerables (Intervalos abiertos y cerrados y $\mathbb{R}$).

Combinatoria

de n elemetos : m (elementos de entre los q escoger); n(elementos a escoger q compondran cto.) IMPORTA EL ORDEN

a) Con repetición $V_R m, n = m^n$

b) Sin repetición $V m, n = n! / (n-m)!$

: Variaciones con $m = n$

- Con repetición $PR_m = nm$
- Sin repetición $P_m = n!$

Combinaciones : Similares a las variac pero NOIMPORTA ORDEN . Ejm formar un equipo con un n° de personas.

$$\text{Comb.} = V_{mn} / P_n = (mn) = m! / n!(m-n)!$$

T6 : Matrices y determinantes .

:

$A = (a_{11} \dots a_{1n} \dots a_{in} \dots a_{in})$! elemento de la fila i columna j

.

.

$a_{m1} \dots a_{mn}$)

- Diagonal : Todos sus elementos son cero exepto los de la diagonal
- Triangular: Elementos por arriba o por debajo de la diagonal cero.
- Cuadrada : $m = n$ Dimens de matriz (mxn filas por columnas)
- Traspuesta : Cambio de filas por columnas A^t

con matrices :

- Suma y resta de matrices $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$
- Producto por escalar $K.A = (K.a_{ij})$
- Producto de matrices (sólo si n° columnas de A = n° filas de B)

$$(a \ b \ (g \ h \ (ag+bi \ ah+bj$$

$$c \ d \ . \ i \ j) = cg+di \ ch+dj$$

$$e \ f) \ eg+fi \ eh+fi)$$

Tres métodos :

- Método de Zarrus (para matrices cuadradas)

$$/ \ a \ b \ c$$

$$d \ e \ f = aei + bfg + cdh - [ceg + fha + bdi]$$

$$g \ h \ i /$$

– Metodo desarrollo por filas o por columnas

$$/ \ a \ b \ c$$

$$d \ e \ f = -d / b \ c + e / a \ c - f / a \ b$$

g h i / h i / g i / g h /

- Método haciendo cero (Gauss) Mediante operaciones permitidas en el determinante convertirlo en el determinante de una matriz triangular.

adjunta : $\text{Adj}(A)$ se halla sustituyendo cada elemento de A por su adjunto

ortogonal Aquella cuya inversa es igual a su traspuesta.

permutables $A.B = B.A$

simétrica del tipo $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

traspuesta : Una matriz tA es traspuesta de otra A si es el resultado de sustituir sus filas por sus columnas

Inversa de una matriz :

$$A^{-1} = 1 / \det(A) \cdot t\text{Adj}(A)$$

de una matriz : Numero de columnas o filas linealmente independientes.

Se elige una columna y se va haciendo el determinante q forma esta columna con otras de tal modo q hagamos el det de una mat cuadrada si $\det A \neq 0$ $\text{rg}(A) = n$ (nº filas) y cada vez q $\det A = 0$ hacemos $n-1$

$$\det(A) = 0 \quad \text{Rg}(A) < n^\circ \text{ filas}$$

$$\det(A) \neq 0 \quad \text{Rg}(A) = n^\circ \text{ filas}$$

&Solución de ecuaciones : Hemos de saber q la matriz de coeficientes es la formada por los coeficientes de las incógnitas (A) y la matriz ampliada es aquella q incluye los términos independientes (Ab), n (nº incógnitas), y $n-r$ (nº variables de las q depende la solución)

Método de Crammer : Para cada una de las incógnitas creamos una matriz sustituyendo su columna de coeficientes (la q le corresp a esa incógnita) por la de términos independientes, hallamos su determinante y dividimos por el de la matriz de coeficientes (A).

Rouche–Frobenius :

- $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(Ab)$ {Sistema compatible admite solución}
 - $r = n$ S.C.Determinado (Una única solución) CRAMMER
 - $r < n$ S.C.Indeterminado (Infinitas soluciones) CRAMMER
- $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(Ab)$ S.Incompatible (No tiene solución)

Método de Gauss : Se trata de conseguir mediante transformaciones permitidas en la matriz , una matriz triangular y resolver.

T7 : Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

de cuerpo : Sea K y $+$: $K \times K \rightarrow K$ l.c.i en K y $\cdot$: $K \times K \rightarrow K$

$(,)$! $+$ $(,)$! l.c.i. decimos que es un cuerpo si verifica :

$(K,+)$ grupo abeliano (asoc, inverso, neutro y conmutat

- Distributiva $(+ \cdot) = + (\cdot) = +$
- $(K,+)$ grupo abeliano (asoc, inverso, neutro y conmutat
- $(K-\{0\}, \cdot)$ g abeliano
- No tiene divisor en cero

vectorial : Sea V cto y K cuerpo definidos en l.c.i $+$: $V \times V \rightarrow V$ y una

$(u,v) \rightarrow u + v$

l.c.e " K : $K \times V \rightarrow V$ decimos que $(V, +, \cdot, K)$ es un e.v sobre K ($V(K)$) si verifica :

$(, u) \rightarrow u$

- $(u + v) = u + v$
- $(\cdot) \cdot u = (\cdot \cdot u)$
- $(+ \cdot) \cdot u = u + u$
- $1 \cdot u = u$
- $(V,+)$ Grupo abeliano.

$pc \ y \in K$ y $pc \ u \ y \ v \in V$. A los elementos de V se los llama vectores y a los de K escalares siendo K un cuerpo de escalares .

lineal de vectores : Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ llamamos comb.lineal de estos a toda expresión del tipo $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$

vectorial : Sea $V(K)$ e.v., $W \subset V$, $W \neq \emptyset$ decimos que W es subesp. Vectorial de V ! $pc \ \alpha \in K$ y $pc \ u, v \in W$ $\alpha u + v \in W$

Dado el sist. de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V llamamos subes.vectorial de V engendrado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ al subesp.vectorial

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{u \in V / u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ con } \alpha_i \in K\}$

linealmente independientes : Sean $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Son libres si

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ implica $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

generadores : Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores $\subset V$ son generadores si

$pc \ v \in V$ ¿Existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ / $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

de V : Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es libre y generador es **base** de V y n° de vectores es la dimensión de V . (Si e.v se reduce

a 0_V su dimensión es 0)

&Suma: Sea $V(K)$ e.v y U y W subesp. De V llamamos subesp suma al formado por:

$$U + W = \{u + w \in V / u \in U \text{ y } w \in W\}$$

Se trata de suma directa si verifica:

- $U + W = V$
- $U \cap W = \{0\}$

:

- $V(K)$ e.v W subesp de V // $\dim W \leq \dim V$
- $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
- $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$
- $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Nota : $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ libre ! $\text{Rg} \{v_1, \dots, v_n\} = n$ y si $\text{Rg} \{v_1, \dots, v_n\} < n$! Ligado

Base canónica es la base más simple de encontrar en un espacio vectorial

lineales : Sean $U(K)$ y $V(K)$ e.v de K $f: U \rightarrow V$ aplic lineal si .

- a) Es aplicación
- b) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in K$ y $\forall u \in U$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Nucleo de f $\text{Ker} f = \{u \in U / f(u) = 0_V\}$

Imagen de f $\text{Im} f = \{v \in V / \exists u \in U : f(u) = v\}$

Proposiciones :

- $\text{Ker} f$ subgrupo de U
- $\text{Im} f$ subgrupo de V
- f homomorfismo ! $\text{Ker} f = \{0_U\}$
- f epimorfismo ! $\text{Im} f = V$
- $\dim U = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$

$$\forall u \in U \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$$

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} u_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} u_{p+q} ?$$

$$\forall u \in U \quad f(u) \in \text{Im} f \quad f(u) = \alpha_{p+1} u_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} u_{p+q}$$

$$f(u) = \alpha_{p+1} f(u_{p+1}) + \dots + \alpha_{p+q} f(u_{p+q}) =$$

$$= f(\alpha_{p+1} u_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} u_{p+q})$$

&Expresión matricial de una aplicación lineal

Sea $f: U \rightarrow V$ lineal $\dim U = n$ y $\dim V = p$ y sean $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de U y $v = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V .

$$f(u_1) \in V \quad f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{p1}v_p$$

$$f(u_2) \in V \quad f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{p2}v_p$$

.

$$f(u_n) \in V \quad f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{pn}v_p$$

$$\text{Sea } x \in U \quad x = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \quad f(x) = f(x_1u_1 + \dots + x_nu_n) = x_1f(u_1) + \dots + x_nf(u_n) =$$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{p1}v_p) + \dots + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{pn}v_p) = v_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + v_p(a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_p)$$

Notas:

Toda aplicación lineal tiene asociada una matriz y toda matriz tiene asociada una aplicación lineal.

$$\text{por filas: } F(x)_t = M_t x_t$$

$f: U \rightarrow V$ aplicac lineal ! $\dim U = n$ $\dim V = p$ M con M matriz asociada a f .

T8 : Diagonalización de Matrices

Sea $A \in M_n(K)$, se trata de hallar valores de $\lambda \in K$ y de $v \in M_n(K)$ $v \neq 0$ t q cumplan $Av = \lambda v$

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \text{ S.C.I}$$

Si es S.C.I {puesto q $v \neq 0$ soluc trivial} y ademas sist homog $\det(A - \lambda I) = 0$ {pq $\text{rg}(A - \lambda I) < n$ }

&Polin característico de A : Polinomio de grado n en λ dado por $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Autovalores de la matriz A : Raices de $P(\lambda)$ {Hacen cero el polinomio}

y a los vectores $v \in M_n(K)$ tq $Av = \lambda v$ se les denomina **autovectores de A asociados al autovalor λ de A**.

propio de λ Cto formado por todos autovectores de A asociados a λ o sabiendo q estos esp propios son subesp de K^n

Llamamos matriz de paso P a la matriz formada por los autovectores de A.

&Th 1 : Si $A \in M_n(K)$ y tiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ autovalores distintos A Diagonalizable

: Sea $A \in M_n(K)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ autovalores de A con $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ (sus respectivas multiplicidades) y $m_1 + \dots + m_p = n$ es diagonalizable ! $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ $i = 1, \dots, p$.