

APLICACIONES LINEALES

Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, una aplicación

$f: V \rightarrow W$ se llama aplicación lineal si :

- " $u, v \in V$ y $\lambda \in K$ $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (se puede generalizar a cualquier n° de sumandos)
- en dos partes:
- $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

NOTAS

$f(0_V) = 0_W$ porque en particular T_b es un homomorfismo de grupos

$f(-u) = -f(u)$ por lo mismo

Si $V = W$ entonces se trata de un endomorfismo

Sea $\{u_1, \dots, u_p\}$ vectores LD en V :

♦ entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$ son LD en W

Sea $f: V \rightarrow W$ y $g: W \rightarrow U$ aplicaciones lineales :

♦ $g \circ f: V \rightarrow U$ también es una aplicación lineal

Las aplicaciones lineales no conservan la independencia de vectores

APLICACIONES DESTACADAS

♦ nula : $0: V \rightarrow W$ " $u \in V$ $0(u) = 0_W$

♦ identidad : $i: U \rightarrow U$ " $u \in U$ $i(u) = u$

NÚCLEO E IMAGEN

Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal:

♦ $f(V) = \text{Im}(f)$ es subespacio vectorial de W

♦ si $\{u_1, \dots, u_p\}$ generan V , entonces:

$\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$ son también generadores de $\text{Im}(f)$, pero no de W .

Llamamos rango de f ($\text{rang}(f)$), a la dimensión de la $\text{Im}(f)$, es decir

Al $\text{rang}(f(u_1), \dots, f(u_p))$

♦ el conjunto $f^{-1}(\{0_W\}) = \{u \in V / f(u) = 0_W\} = \text{Ker}(f)$ es un subespacio vectorial de V , que llamamos núcleo de la aplicación lineal.

♦ Si V es un espacio vectorial de dim finita, $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

PROPIEDADES DE UNA APLICACIÓN INYECTIVA

♦ Sea $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal, f es inyectiva sí y sólo si:

- si $\text{Ker } f = \{ 0_V \}$
- si los espacios V y W son de dim finita, se verifica que f es inyectiva sí y sólo sí:
- $\dim V = \dim (\text{Im}(f))$! la imagen de una base de V es una base de $\text{Im}(f)$ (NO DE W), es decir, un conjunto de vectores LI de W

PROPOSICIÓN

- la composición de isomorfismos, es un isomorfismo
- $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal es isomorfismo ! $\text{Ker } f = \{ 0_V \}$ e $\text{Im}(f) = W$
- si $\dim V$ es finita $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal entonces f es isomorfismo ! f es inyectiva ! f es sobreyectiva
- si $f: V \rightarrow W$ es isomorfismo entonces , $f^{-1}: W \rightarrow V$ es también isomorfismo
- dos espacios vectoriales sobre K con dim finita son isomorfos ! tienen la misma dim

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean V y W espacios vectoriales, sea B base de V , $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$ y $\{ w_1, \dots, w_n \}$ conjunto de vectores de V , entonces :

- existe una única $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal / $f(e_1) = w_1 \dots y f(e_n) = w_n$

con esta proposición vemos que si V tiene dim finita, una aplicación lineal queda totalmente definida si se conocen las imágenes de los elementos de una base de V

Sea V un espacio vectorial, y $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$ base de V , para cada vector x de V tenemos $M_B x = x_1$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

x_2

x_n

Sea f aplicación lineal $f: V_n \rightarrow W_m$, supongamos $B' = \{ u_1, \dots, u_n \}$ base de W , sabíamos que para conocer f bastaba conocer las imágenes de V , para ello bastará saber su CL con respecto a la base B' de W

$$F(e_1) = w_1 = a_{11}.u_1 + a_{21}.u_2 + \dots + a_{m1}.u_m$$

$$F(e_2) = w_2 = a_{12}.u_1 + a_{22}.u_2 + \dots + a_{m2}.u_m$$

$$F(e_n) = w_n = a_{1n}.u_1 + \dots + a_{mn}.u_m$$

Si x tiene por coordenadas en la base B $(x_1, \dots, x_n)$, $f(x)$ tiene por coordenadas en B' $(y_1, \dots, y_n)$ donde:

$$Y_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n$$

$$Y_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n$$

$$Y_m = a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n$$

$x_1 y_1$

$x_2 y_2$

$A_{m \times n} =$

$X_n y_n$

A la llamamos asociada a la aplicación lineal respecto a las bases B y B', entonces tenemos que :

- $MB'(f(x)) = A BB' \cdot MB(x)$ es la expresión matricial del sistema
- La matriz A es única fijadas las bases B y B', pues cada columna j de A son las coordenadas de la imagen del primer vector de la base en B', las coordenadas eran únicas en cada base:

$A = M BB'(f)$

- Recíprocamente, dada una matriz $A_{m \times n}$ cualquiera $A_{m \times n} = (a_{ij})$ queda determinada una aplicación lineal fijadas las bases, por lo tanto tenemos el isomorfismo siguiente:

$(V_n, W_m) M_{m \times n}(K)$

$f \mapsto M(f)$

Sea $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal dim finita, y sea A la matriz asociada a f respecto unas bases, se verifica que :

- El rango de f coincide con rango (A)
- Suponemos $\dim V = \dim W$, entonces f es isomorfismo ! A es inversible

Sea $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal, B_V, B'_V bases de V y B_W, B'_W bases de W. Llamamos $A = M_{B'_V B_W}(f)$, $A' = M_{B_V B'_W}(f)$, $P = M_{B'_V B_V}$

$Q = M_{B'_W B_W}$ se verifica que :

- $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Dos matrices A y A' de igual tamaño ($m \times n$) se dicen que son equivalentes si :

- existen dos matrices inversibles P, Q tal que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$, es decir, si están asociadas a una misma aplicación lineal de $K^n \rightarrow K^m$.
- Dicho de otra forma, A y A' representan la misma aplicación lineal pero en distintas bases (Tb. Se llaman matrices semejantes)

Sean $f: V \rightarrow W$ y $g: W \rightarrow U$ aplicaciones lineales y $A = M_{B'_V B'_W}(f)$ y $B = M_{B'_W B_U}(g)$ entonces se verifica que :

- Si $g \circ f: V \rightarrow U$ entonces $M_{B'_V B_U}(g \circ f) = B \cdot A$

Sea f una aplicación lineal sobre el mismo cuerpo $f: V \rightarrow W$; $b \in W$,

$f^{-1}(b) = \{ v \in V / f(v) = b \}$ se verifica que :

- Si $b \in \text{Im } f$, entonces $f^{-1}(b) =$
- Si $b \in \text{Im } f$, es decir, $\exists v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = b$, entonces
- $f^{-1}(b) = v_0 + \text{Ker } f = \{ v_0 + u / u \in \text{Ker } f \}$

TEOREMA DE ROUCHE- FROBENIUS

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{m \times 1}(K)$, $X \in M_{n \times 1}(K)$ se verifica que :

- el sistema tiene solución ! $\text{rango}(A) = \text{rango}(AB)$ y además la solución es única ! $\text{rango}(A) = \text{rango}(AB) = n$
- si el S es Compatible entonces el conjunto {soluciones del sistema $AX = B$ } = $x_0 + \{ \text{soluciones de } AX = 0 \}$
- donde x_0 es solución particular de $AX = B$,
- $\{ \text{soluciones de } AX = 0 \}$ es el núcleo de la aplicación cuya matriz es A , (que es un espacio vectorial con dimensión $n-r$, donde $n = \dim V$ y $r = \dim(\text{Im } f)$)