

Medida de la aceleración de la gravedad g

Determinación del momento de inercia

1º Método

Tratamiento teórico

Sea un disco que rueda sin deslizar sobre un plano de ángulo conocido, sabemos que la energía mecánica debe conservarse ya que la fuerza de rozamiento no realiza trabajo. Por tanto, suponiendo que dicho cuerpo parte del reposo, la velocidad al llegar al final del plano se puede deducir por energías:

y por tanto

donde R es el radio de rotación del disco y h la altura del plano. Ya que sabemos la pendiente del plano, podemos establecer una relación entre la altura y el espacio que recorre el disco, de la siguiente manera:

con esto y la ecuación anterior, se puede despejar que

Por otra parte, sabemos que el movimiento del centro de masas es uniformemente acelerado y por tanto:

y donde t es el tiempo que tarda en realizar el recorrido.

De estas dos ecuaciones despejamos que .

Con esta ecuación y la obtenida anteriormente por energías, podemos igualarlas y despejar I_z obteniendo:

Método operativo

En el primer método trabajaremos con un plano inclinado. Se trata de hacer rodar sin deslizar el disco por el eje a lo largo de un plano inclinado de ángulo conocido, tal como indica la figura 1.

Debemos medir la longitud del plano (s) y el radio del eje. Los resultados obtenidos fueron:

Longitud del plano $s = 1.274 \text{ m} \pm 0.001$ metros debido al error del metro.

El radio del eje lo medimos con un calibre, y el resultado fue que medía 22.00 mm de diámetro, con un error aproximado de 0.05 mm. Por lo tanto la longitud del radio es de 11.00 mm con un margen de error de 0.05 mm.

Tiempo (s)	10.50	10.26	10.14	10.45	10.27	10.58
		10.52	10.34	10.42	10.64	

Tabla 1: Tiempo que tarda el disco en realizar la rodadura.

Haciendo la media de estos resultados, calculamos el valor medio que tarda el disco en llegar al final del plano. = **10.41 s**.

Ahora medimos la incertidumbre de cada medida, mediante la fórmula:

Y obtenemos una desviación de 0.15 s en cada medida.

A continuación, hemos calculado el error típico de la media, mediante la fórmula:

Obtenemos finalmente que el tiempo medio que tarda el disco en llegar al final del plano es de **10.410.05 s**.

Además de estas mediciones, también hemos medido la masa del disco, que vale 2085 g con un error estimado de 5 g.

Gracias a la fórmula:

Y sabiendo todos los datos, calculamos el valor del momento de inercia con este método, y obtenemos que vale **$3.6 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$** .

Ya que hemos estimado errores tanto en la masa, como en el radio del disco, la longitud del plano y el tiempo medio, el cálculo del momento de inercia a su vez arrastra estos errores y produce una indeterminación en el resultado. Por ello, hemos calculado el error que se propaga. Tenemos I. Sabemos que la tanto la masa, como el radio, la longitud y el tiempo arrastran errores, los cuales son conocidos, por lo que el error arrastrado será:

Con:

Una vez realizados estos cálculos, hemos obtenido que la incertidumbre propagada en el cálculo del momento de inercia por este método es de **$5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$** .

En definitiva, con este método obtenemos que el valor del momento de inercia del disco vale

$I_z = 3.6 \cdot 10^{-3} \pm 5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

2º Método

Tratamiento teórico

Sea un péndulo bifilar que oscila, durante esta oscilación la energía mecánica del sistema permanece constante, y dicha energía viene dada por

donde ω es la velocidad angular, M es la masa del disco, y $h-h'$ es la diferencia de alturas a la que está sometido el disco, ya que durante la oscilación, el disco sube y baja ligeramente, aunque este movimiento es prácticamente despreciable.

Trigonométricamente se puede obtener una relación entre h, que es la distancia del techo al disco, a, que es mitad de la distancia entre los dos hilos en el techo, b, que es la mitad de la distancia entre los dos hilos en el disco, y l, que es la longitud de los hilos

y

con como el ángulo de torsión en un momento dado.

Combinando estas ecuaciones en la de la energía mecánica, y derivando respecto al tiempo, obtenemos una expresión de la que podemos despejar que

Como las oscilaciones provocadas en el disco son muy pequeñas, podemos considerar que el seno del ángulo coincide prácticamente con el ángulo, y que el coseno de dicho ángulo es prácticamente 1. Con esto y

despejando de la ecuación la I_z

donde T es el periodo de la oscilación

Método operativo

Este método consiste en determinar el momento de inercia a partir de un péndulo de torsión. Se realiza el siguiente montaje (figura 2), en el que medimos los valores de a , l y b con el metro y el calibre.

Los resultados obtenidos fueron

$$a = 0.06045 \text{ m} \pm 0.00005 \text{ m}$$

$$b = 0.07800 \text{ m} \pm 0.00005 \text{ m}$$

$$l = 0.384 \text{ m} \pm 0.001 \text{ m}$$

El error estimado al utilizar el calibre es de 0.05 mm, y el del metro es de aproximadamente un milímetro.

A partir del montaje, con una pequeña fuerza hacemos que el disco comience a oscilar, y contamos el tiempo que tarda en realizar 30 oscilaciones con un cronómetro, según la siguiente tabla.

30T (s)	26.13	26.05	26.11	26.23	26.10
T (s)	0.87	0.86	0.87	0.87	0.87

Tabla 2: Período de oscilación del péndulo bifilar.

A partir del tiempo que tarda en realizar 30 oscilaciones, calculamos el periodo de oscilación, y realizamos su media con la fórmula:

Obtenemos un periodo medio de oscilación de **0.87 s**. Calculamos la incertidumbre en cada medida con la fórmula:

y también el error en la media con la fórmula

El tiempo medio calculado es de **0.8707 s** $\pm$ **9·10⁻⁴ s**, y la incertidumbre en cada medida asciende a **2·10⁻³ s**.

Con estos datos obtenidos, a partir de la fórmula:

calculamos el momento de inercia, el cual asciende a

4.8·10⁻³ Kg·m²

Pero como existen errores en ciertos valores utilizados en dicha fórmula, hay que calcular el error que éstos propagan, y para ello repetimos el proceso antes utilizado. Como tenemos una función que depende de varios valores de los cuales conocemos sus incertidumbres respectivas, la incertidumbre de dicha función es

Donde:

Una vez realizados los cálculos, estimamos la incertidumbre en el cálculo del momento de inercia en **2·10⁻⁵ Kg·m²**. Por tanto, en definitiva, hemos obtenido que

$$I_z = 4.8 \cdot 10^{-32} \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Discusión

Hemos realizado varias veces los cálculos y hemos obtenido el mismo resultado, a pesar de que parece haber un error, como aparecía en el trabajo anterior. En caso de haberlo, será debido a que los datos fueron mal tomados en su momento, aunque parecen razonables.

Comparando los momentos de inercia obtenidos por ambos métodos, podemos decir que varían en 0.001, lo cual en estas cifras tan pequeñas puede ser significativo a la hora de utilizarlo y realizar cálculos. Sin embargo, el posible error calculado en ambos métodos es menor en el segundo método, por lo que tenemos que dar a este método como el más fiable de los dos, aunque parezca lo contrario. En el segundo método, al trabajar con el cronómetro y oscilaciones, encontramos mayor dificultad para precisar los tiempos, ya que se realizan un poco a ojo y también porque el movimiento del péndulo nunca es completamente horizontal, sino que a la vez que en torsión, empieza a oscilar lateralmente. En este momento es prácticamente imposible medir con exactitud los periodos. En el primer método, sin embargo, es más fácil realizar las mediciones, por lo que debería ser el método más exacto. Pero después de realizar el cálculo de los errores, debemos dar como más exacto el segundo método.

Máquina de Atwood; determinación de g y de la fricción en el eje

Introducción teórica

Conocido ya de las medidas anteriores el momento de inercia de la pieza, construimos con ella una máquina de Atwood para realizar experimentos con unas pesas suspendidas. Contamos para ello con dos pesas y de masas 1.010 Kg y 1.075 Kg respectivamente, que recorren hasta el suelo una distancia de 1.392m 0.001 m.

Si no existiera fricción en los ejes, el cálculo sería bastante sencillo. Pero para poder medir con precisión, necesitamos trabajar con aceleraciones mucho más pequeñas que la gravedad, y en estas circunstancias es imposible despreciar la fuerza de fricción en los ejes.

Podemos despejar que

donde N es el momento de frenado de las fuerzas de fricción. Como éste es desconocido, una única medida de a no permite determinar g. Pero si conseguimos hacer los denominadores de la anterior ecuación constantes, entonces conseguimos una dependencia lineal entre la aceleración y la diferencia de masas, con una pendiente:

Método operativo

Según la teoría expuesta previamente, tenemos que conseguir que la suma de masas sea constante, pero que su diferencia no lo sea, de manera que podamos conseguir una dependencia lineal. Para ello utilizaremos unas anillas, cuyas masas valen 3.07 g, que iremos desplazando de una pesa a otra. Así, iremos midiendo el tiempo que tarda una pesa en llegar hasta el suelo con diferente número de anillas, hasta que consigamos varias aceleraciones para poder realizar una gráfica y aproximarla.

Aquí están los resultados obtenidos:

M-M' (kg)	Tiempo (s) 0.1 s					(s)	a (m/s ²)
0.005 Kg							
0.034	12.72	12.74	13.09	12.70	12.86	12.82	0.01

0.040	9.24	9.19	9.13	9.44	9.54	9.30	0.03
0.046	7.23	7.73	7.79	7.66	7.99	7.68	0.04
0.052	6.65	6.72	6.64	6.61	6.59	6.64	0.06
0.058	6.24	6.04	6.08	6.12	6.02	6.10	0.07
0.065	5.59	5.55	5.44	5.37	5.49	5.48	0.09
0.071	5.06	5.05	5.09	5.08	5.09	5.07	0.10
0.077	4.81	4.88	4.90	4.95	4.91	4.89	0.11
0.083	4.56	4.46	4.52	4.60	4.59	4.54	0.13
0.089	4.31	4.26	4.34	4.29	4.39	4.31	0.14
0.095	4.07	4.17	4.15	4.13	4.10	4.12	0.16

Tabla 3: Tiempos (t) y aceleraciones (a) resultantes de variación de masa.

En cada caso hemos calculado el tiempo medio, con su respectivo error, por la fórmula:

que los exponemos a continuación (tabla 4).

(s)	incertidumbre (s)	Incetidumbre en cada medida de t (s)
12.82	0.07	0.16
9.30	0.07	0.17
7.68	0.12	0.28
6.64	0.02	0.04
6.10	0.03	0.08
5.48	0.03	0.08
5.07	0.008	0.01
4.89	0.02	0.05
4.54	0.02	0.05
4.31	0.02	0.04
4.12	0.01	0.04

Tabla 4: incertidumbre en cada medida de t y en su media

También hemos calculado gracias a

las aceleraciones en cada caso (tabla 3), con su error estimado también (tabla 5), mediante derivadas parciales, ya que tanto el espacio como el tiempo arrastran incertidumbre. Hemos utilizado las siguientes ecuaciones

Aceleración (m/s ²)	Incetidumbre
0.01	
0.03	
0.04	
0.06	
0.07	
0.09	
0.10	

0.11	
0.13	
0.14	
0.16	

Tabla 5: aceleraciones y su error.

Hemos elaborado a continuación una gráfica que muestra la relación entre la diferencia de masas y la aceleración del sistema. Hemos aproximado los puntos en una dependencia lineal.

Según el método de los mínimos cuadrados, podemos calcular la pendiente de la recta (p) y su ordenada mediante las siguientes fórmulas:

con

Con estos datos, la pendiente y la ordenada, podemos calcular la gravedad y el momento de las fuerzas de fricción con las ecuaciones antes expuestas. Hemos realizado una tabla para facilitar el cálculo de la pendiente y la ordenada, donde la x representa la diferencia de masas y la y representa las aceleraciones.

0.72	0.99	0.72	0.075	0.051	0.51
------	------	------	-------	-------	------

Tabla 6: datos para cálculos posteriores

Con los datos anteriores, hemos obtenido

$p = 2.4 \text{ m} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ $c = -0.06 \text{ m/s}^2$
--

utilizando la fórmula

calculamos una gravedad de **12.2 m/s²**. Para calcularla hemos considerado el momento de inercia conseguido en el segundo método, ya que la incertidumbre era menor y por lo tanto creemos que el error propagado hasta el cálculo de g será menor. Sin embargo hemos calculado la g con el momento de inercia obtenido en el primer método y la g conseguida se acerca más a los 9.8 m/s² conocidos. Esto puede ser debido a que el cálculo de la incertidumbre no es muy exacto.

A su vez, hemos calculado por la fórmula

El momento de las fuerzas de fricción, que vale **0.013 N·m**.

Pero el cálculo de la pendiente y de la ordenada también supone cierta incertidumbre en su resultado. Para calcular esta incertidumbre, hemos considerado

Donde:

Y hemos obtenido que la incertidumbre en el cálculo de la pendiente asciende a $\text{m} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, y la incertidumbre en la ordenada vale m/s^2 .

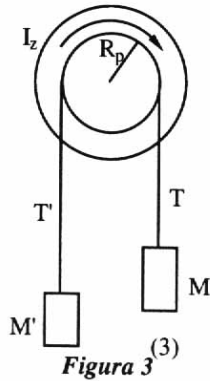
Ahora, a partir de estos datos, tenemos que calcular la incertidumbre de g . Para ello nos valemos de las siguientes fórmulas:

Finalmente obtenemos que

$$g=12.20.15 \text{ m/s}^2$$

$$Nr=0.0134 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$$

La desviación del valor obtenido para nuestra g es diferente del real debido a que tenemos que tener en cuenta que estamos utilizando un método experimental, donde además de tener en cuenta la incertidumbre de los aparatos de medición también cabe tener en cuenta el posible error humano. Según nuestra opinión personal, se debe a que durante todo el informe llevamos arrastrando gran cantidad de errores, por lo que no pueden desembocar de otra manera que no sea dándonos un valor medianamente aproximado a la verdadera g .



$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$I_z = M_d R^2 \frac{g \operatorname{sen} \alpha t^2}{2s} - 1$$

$$\Delta I_z = \left[(\Delta I_{zMd})^2 + (\Delta I_{zR})^2 + (\Delta I_{zt})^2 + (\Delta I_{zs})^2 \right]^{1/2}$$