Asignatura: ESTADÍSTICA I

TEMA 1: PROBABILIDAD

- Introducción.
- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Axiomática del Cálculo de Probabilidades.
- Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos.
- Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes.

TEMA 2: VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONAIS

- Concepto.
- Función de distribución de una variable aleatoria.
- Variable aleatoria discreta: función de cuantía.
- Variable aleatoria continuo: función de densidad.
- Cambio de variable.

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

- Concepto
- Función de distribución conjunta.
- Variables aleatorias discretas y continuas. Funciones de cuantía y de densidad bidimensionales.
- Distribuciones marginales y condicionadas.
- Independencia de variables aleatorias.

TEMA 4: CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

- Esperanza matemática.
- Momentos. Medidas de posición, y dispersión de una variable aleatoria.
- Función generadora de momentos. Función característica.

TEMA 5: CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

- Momentos bidimensionales conjuntos. Covarianza.
- Momentos bidimensionales condicionados.
- Regresión y correlación.

TEMA 6: PRINCIPALES DISTRICIONES DISCRETAS

- Binomial.
- Geométrica y Binomial negativa.
- Poisson.
- Hipergeométrica.
- Multinomial.

TEMA 7: PRINCIPALES DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

- Uniforme.
- Normal

- Distribuciones derivadas de la normal.
- Normal bivariante.
- Otras distribuciones continuas.

TEMA 8: CONVERGENCIA.

- Tipos de convergencia.
- Leyes de los grandes números.
- Teoremas centrales del límite.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:

- ARANDA, J. y GOMEZ, J. (1992): Fundamentos de Estadística para Economía y Empresas, PPU, Barcelona.
- CASAS SANCHEZ, J. M. (2000): Estadística I probabilidad y distribuciones, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid.
- FERNANDEZ−ABASCAL, H.; GUIJARRO, M.; ROJO, J. L y SANZ, J. A. (1994): Cálculo de Probabilidades y Estadística, Editorial Ariel, S. A., Barcelona.
- FERNANDEZ−ABASCAL, H.; GUIJARRO, M.; ROJO, J. L y SANZ, J. A. (1995): Ejercicios de cálculo de probabilidades, Editorial Ariel, S. A., Barcelona.
- LOPEZ DE LA MANZANERA, J. (1989): Problemas de Estadística, Ediciones Pirámide S. A., Madrid.
- LOPEZ ORTEGA, JAVIER (1994): Problemas de estadística para ciencias económicas y empresariales. Calculo de probabilidades; Editorial Teber Flores, S. L., Madrid.
- MARTIN PLIEGO, F. J. Y RUIZ−MAYA, L. (1998): Fundamentos de probabilidad, Editorial AC, Madrid.
- MARTIN PLIEGO, F. J., MONTERO LORENZO, J. M., Y RUIZ−MAYA, L. (1998): Problemas de probabilidad, Editorial AC, Madrid.
- MONTIEL TORRES, A. M., RIUS DIAZ, F. y BARON LOPEZ, F. J. (1997): Elementos básicos de estadística económica y empresarial, Prentice Hall, Madrid.
- PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, DANIEL (1986): Estadística modelos y métodos I: Fundamentos, Alianza Editorial, S. A., Madrid.
- PEÑA, DANIEL Y ROMO, JUAN (1997): Introducción a la Estadística para las Ciencias Sociales, McGraw Hill, Madrid.
- PERALTA ASTUDILLO, M. J.; RUA VIEYTES, A.; REDONDO PALOMO, R. y DEL CAMPO CAMPOS, C. (2000): Estadística, problemas resueltos, Ediciones Pirámide, M.
- PEREZ SUAREZ, RIGOBERTO (COORD) (1997): Análisis de datos económicos II, Métodos Inferenciales, Ediciones Pirámide, Madrid.
- RUIZ−MAYA, L. (1986): Problemas de Estadística, Editorial AC, Madrid.

Tema 1: PROBABILIDADE.

INTRODUCCIÓN.

<u>Fenómenos deterministas</u>: son aqueles nos cales, coñecidas as condicións nas que ocorren, coñécese o resultado que se vai obter.

<u>Fenómenos non deterministas</u> (aleatorios, estocásticos, probabilísticos): son aqueles nos cales, aínda coñecendo as condicións nas que se producen, non podemos determinar exactamente o resultado. Como moito pódese coñecer a lei probabilística coa que ocorrerán eses resultados.

Os resultados obtidos ó estudiar fenómenos non deterministas van estar afectados en maior ou menor medida por un comportamento aleatorio.

Polo tanto, se queremos analiza−lo comportamento dun fenómeno deste tipo, será necesario distinguir, dentro do posible, o efecto provocado pola aleatoriedade.

Ademáis, se ben non podemos determina−los resultados dos experimentos aleatorios, si podemos buscar regularidades nos seus resultados, regularidades que se fan máis evidentes cantas máis veces se repite a experiencia. Coñecer estas regularidades daranos máis información sobre o fenómeno estudiado.

Estatística: Conxunto de técnicas destinadas a obter información a partir de datos procedente de fenómenos estocásticos.

Proporciona os medios para analizar grandes conxuntos de datos, e sintetizar información a partir de esa análise.

Etapas do traballo estatístico

1.− Recollida de datos (Teoría de mostras)

2.− Organización e presentación dos datos, e cálculo de parámetros que nos resuman as súas características. (Estatística Descriptiva)

3.− Elaboración de regras que nos permitiran decidir que conclusións estatísticas podemos sacar a partir dos nosos datos. (Inferencia Estatística)

Ademais destas etapas poderíamos considerar como etapa previa a definición dos obxectivos, e como remate a interpretación das conclusións estatísticas, se ben estas partes xa saen fora do campo da Estatística.

Dado que a Estatística traballa con datos procedentes de fenómenos aleatorios, vai ser necesario coñecer o comportamento da aleatoriedade, para desenvolver os métodos que se aplican nas distintas partes do traballo estatístico. Para coñecer este comportamento estudiase o Cálculo de Probabilidades.

Conceptos.

Poboación: Conxunto de elementos sobre o que se vai realiza−lo estudio.

Mostra: Subconxunto finito de elementos da poboación.

Individuo: Cada un dos elementos da poboación.

Caracteres: Son os rasgos ou cualidades da poboación que nos interesa estudiar.

Se os caracteres son cualitativos denomínanse atributos, se son cuantitativos denomínanse variables.

Os resultados que pode tomar unha variable denomínanse valores. Os que pode tomar un atributo denomínanse modalidades.

As variables poden ser de dous tipos:

− Discretas: Cando só poden tomar un número finito ou numerable de valores.

− Continuas: Cando poden tomar un número non numerable de valores.

Na práctica a distinción entre variables continuas e discretas vai depender do número de datos que teñamos, usándose como discretas se teñen poucos valores e como continuas se teñen moitos.

De cara a elaborar un modelo teórico que describa o comportamento dos fenómenos aleatorios, considérase que cada vez que ocorre un deses fenómenos, prodúcese unha experiencia aleatoria (ou experimento aleatorio).

Estas **experiencias aleatorias** caracterízanse por que se coñecen a priori os distintos resultados posibles, sen saber cal deles vai ocorrer nunha realización determinada desa experiencia.

Def.: Espacio mostral. ( )

Conxunto de tódolos posibles resultados dun experimento aleatorio.

Def.: Suceso (ou evento).

É un subconxunto do espacio mostral.

(ou sexa: é unha colección de resultados dun experimento aleatorio)

Def.: Suceso elemental.

É cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio.

Def.: Suceso seguro.

É o espacio mostral .

(e suceso por que é subconxunto de si mesmo, ademáis calquera resultado que obteñamos vai pertencer a él.)

Def.: Suceso imposible.

É o conxunto baleiro (").

(e suceso por que é subconxunto de , ademáis sexa cal sexa o resultado obtido NON vai pertencer a él.)

Def.: Suceso complementario.

O suceso complementario dun suceso S ($\overline{S}$
) é aquel que contén tódolos sucesos elementais que non están contidos en S:

Se S"" ! $\overline{S}$
={x" /x" }

Operacións con sucesos.

Unión de sucesos: A, B" !A"B={x" / x"A **ou** x"B/}

Intersección de sucesos: A, B" !A"B={x" / x"A **e** x"B/}

Def.: Sucesos disxuntos (ou incompatibles).

Son aqueles que non teñen ningún suceso elemental común, ou sexa:

A, B " , son sucesos disxuntos :! A"B="

Dado que coñecemos tódolos resultados posibles do experimento aleatorio, pero non cal deles acontecerá na seguinte realización, interesaranos ter un modelo da ocorrencia que seguirán eses resultados, para o que deberemos medir dalgún xeito a súa incertidume: a certeza ou incerteza que teñamos de que ocorra algún deles.

Esta medida da incerteza é o que habitualmente se coñece como Probabilidade e o plantexamento de asignar a cada suceso unha probabilidade foi enfocado de moitas formas distintas, das cales citaremos as máis coñecidas:

Probabilidade clásica:

Con este modelo de probabilidade, considerase que o experimento aleatorio se pode plantexar de xeito que cada suceso elemental ten a mesma probabilidade (i.e.: non temos información que nos permita decidir que uns sucesos ocorren máis ca outros).

De acordo con esta idea, a probabilidade que se asigna a un suceso A, vai ser:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{elementos de A}}{\text{elementos totales}}$$

Probabilidade frecuencialista.

Con este enfoque non necesitamos coñecer a priori a probabilidade de ocorrencia dun suceso elemental, nin ten por que se−la mesma para todos eles.

Def.: Frecuencia (ni)

Número de veces que ocorre un suceso.

Def.: Frecuencia relativa (fi)

Proporción de veces que ocorreu un suceso respecto ó número de veces que se realizou un experimento:

$$f_i = \frac{n_i}{\mathrm{N}}$$

Cando podemos repetir un experimento aleatorio un número grande de veces, obsérvase como a frecuencia relativa de un suceso A tende a oscilar cada vez menos, situándose en torno a un certo valor (*lei de estabilidade das frecuencias*), ese valor, segundo o criterio frecuencial, é o que se considera como probabilidade de A:

$$P(A) = \lim_{N} f_A = \lim_{N} \frac{n_i}{\mathrm{N}}$$

Sen embargo, non sempre podemos permitirnos repetir un experimento aleatorio, para estimar unha probabilidade.

Probabilidade Subxectiva.

Segundo este enfoque esta a probabilidade dun suceso ven determinada polo *grado de creencia* que un individuo ten sobre a ocorrencia dese suceso.

Este grado de creencia ven dado pola opinión que ten cada individuo en cada momento do tempo, a cal pode estar influida á súa vez pola información que posúa sobre o experimento aleatorio.

Axiomática.

Os anteriores conceptos de probabilidade son xeitos de asignar valores á probabilidade dos sucesos que poden ocorrer nun experimento aleatorio.

Para desenvolver un modelo matemático que nos permita analiza−lo comportamento dos resultados dos experimentos aleatorios, pártese dunha serie de axiomas que nos din as propiedades que unha función debe verificar para que sexa considerada función de probabilidade.

Axiomática do Cálculo de Probabilidades

Def.: Sexa un espacio mostral, e sexa *A* unha colección de sucesos contidos en , cumprindo as seguintes condicións:

1: "*A*

2: Se S"*A* !$\overline{S}$
"*A*

3: Se temos unha colección numerable S1, S2, ..., Sn, ... de sucesos pertencentes a *A*, entón $\bigcup_{i=1} S_i$

A.

Cumprindo estas condicións *A* dise que é unha **−álxebra,** e o par (, *A*) dise que é un **espacio medible**.

Th: Se *A* é unha −álxebra, !"" *A*

Th: Se *A* é unha −álxebra, $\{S_i\}_{i=1}$
A ! $\bigcap_{i=1} S_i$
A

Axiomática de Kolmogorov

Sexa (, *A*) un espacio medible

Axioma 1: Se S"*A*, existe un número P(S) " 0, denominado **probabilidade de S**.

Axioma 2: P( ) = 1.

Axioma 3:

Dada unha colección de sucesos $\{S_i\}_{i=1}$
A, t.q. Si"Sj=" " i,j "N (disxuntos dous a dous), verifícase que $P \bigcup_{i=1} S_i \;=\; {}_{i=1} P(S_i)$

A tripla (, *A*, P) dise que é un **espacio de probabilidade**.

Th.: P(")=0.

Th.: Dada unha colección finita de sucesos $\{S_i\}_{i=1}^{n}$
A, t.q. Si"Sj=" 1"i,j"n (disxuntos dous a dous), verifícase que $P \bigcup_{i=1}^{n} S_i \;=\; {}_{i=1}^{n} P(S_i)$

Th. Dados dous sucesos calquera S1, S2 " *A* verifícase que:

P(S1" S2) = P(S1) + P(S2)− P(S1 " S2)

Th.: Dados dous sucesos S1, S2 " *A*, t.q. S1" S2 verifícase:

P(S1) " P(S2).

Th.: Dado un suceso calquera S " *A*, P(S) " 1.

Th.: Dado un suceso calquera S " *A*, verifícase que P($\overline{S}$
) = 1− P(S).

PROBABILIDADE CONDICIONADA

Cando dispoñemos dunha información previa sobre un experimento aleatorio, a certidume que temos sobre a ocorrencia dos distintos resultados pode variar, dado que a nova información pode condicionala.

Para reflexar esta circunstancia defínese unha nova probabilidade que vai estar restrinxida polo cambio na información que posuimos:

Def.:

Probabilidade condicionada: Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade Dados dous sucesos, S1, S0 " *A*, defínese probabilidade do suceso S1, condicionada á ocorrencia do suceso S0, como:

$$P\ {}^{S_1}\!/_{S_0} = \frac{P(S_1 \quad S_0)}{P(S_0)}$$

Derivado de esta definición podemos obter unha expresion para o cálculo da probabilidade da intersección:

$$P(S_1 \quad S_0) = P(S_0)\ P\ {}^{S_1}\!/_{S_0} = P(S_1)\ P\ {}^{S_0}\!/_{S_1}$$

Esta formula, aplicada a *n* sucesos, da lugar ó seguinte resultado:

Th. (Regra do producto): Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade. Dada unha colección finita de sucesos $\{S_i\}_{i=1}^{n}, S_i$
A, $i = 1,\ldots,n$
verifícase:

$$P \mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n} S_i \;= P(S_1)\, P \;{}^{S_2}\!/_{S_1} \;\; P \;{}^{S_3}\!/_{(S_1 \quad S_2)} \;\; \ldots P \;\; {}^{S_n}\!\Big/_{\mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n-1} S_i}$$

Def.: Sexa un espacio mostral. Unha colección finita de sucesos $\{B_i\}_{i=1}^{n}, B_i \quad \Omega, i = 1,\ldots,n$
será unha **partición de** se verifica:

1: Bi " Bj = " " i"j, i,j = 1, ... , n

2: $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

3: P(Bi)>0, " i = 1, ... , n

Th.: (Probabilidade total) Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade, A " *A*, e $\{B_i\}_{i=1}^{n}, B_i \quad \Omega, i = 1,\ldots,n$
unha partición de . Verifícase:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P \;{}^{A}\!/_{B_i}$$

Th.: (Bayes) Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade, A " *A*, e $\{B_i\}_{i=1}^{n}, B_i \quad \Omega, i = 1,\ldots,n$
unha partición de . Verifícase:

$$P \;{}^{B_j}\!/_{A} = \frac{P(B_j)\, P \;{}^{A}\!/_{B_j}}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P \;{}^{A}\!/_{B_i}}$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Def.:

Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade. Dous sucesos, A, B " *A*, dise que son **independentes** se verifican que P(A"B)=P(A)·P(B).

Th. Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade. Dous sucesos, A, B " *A*, independentes verifican:

$$P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = P(A)$$

Def.:

Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade. Dada unha colección finita de sucesos $\{S_i\}_{i=1}^{n}, S_i$

A, $i = 1,\ldots,n$

, dise que son sucesos **mutuamente independentes** se e só se temos que para k= 2, 3 , ..., n se verifica: P(Si1"Si2" ... "Sik)=P(Si1)·P(Si2) ... P(Sik). Sendo ij = 1, ..., n.

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Estadística Problemas Resueltos. Peralta y otros, ejer 9, pag 155.

Se consideran los siguientes sucesos para un mismo estudiante A = aprobar matemáticas, y B = aprobar estadística. Si P (A) = 5/20 y P (B) = 8/20 y la probabilidad de aprobar las dos es 3/20 . Calcular:

- La probabilidad de aprobar matemáticas o estadística.
- La probabilidad de aprobar matemáticas y no estadística.
- La probabilidad de que, no habiendo aprobado estadística, apruebe matemáticas.

2.− Estadística I: Probabilidad y Distribuciones. Casas Sánchez, ejemplo 2.5, pag 75.

El dueño de una tienda de ropa para hombres ha observado el comportamiento de sus clientes durante un largo período de tiempo. Como consecuencia de ese período de observación afirma que la probabilidad de que un cliente que entra a la tienda compre una camisa es 0.4, pero de los que compran una camisa el 50% compran también una corbata, y solamente un 10% compran la corbata cuando no han comprado la camisa. Obtener las probabilidades de que los clientes compren lo siguiente:

- Una camisa y una corbata.
- Una corbata.
- Una camisa o una corbata.
- Una corbata pero no una camisa.

3.− Si A, B y C son sucesos independientes; demostrar que también los son:

- A y $\overline{B}$
- y $\overline{B}$
- , $\overline{B}$
  y C.

4.− ¿Pueden estos sucesos ser independientes, suponiendo que son posibles?. Razona la respuesta.

5.− **(Adaptado de http://ltodi.est.ips.pt/probest/, máis exactamente de: http://ltodi.est.ips.pt/probest/seb/prob/prob.pdf)**

Coñécense as seguintes probabilidades de que un matrimonio vexa un programa de televisión: pbb de que o vexa o home é 0.4; pbb de que o vexa a muller é 0.3; pbb de que o vexa o home se o ve a muller é 0.7.

- Calculade a probabilidade de que o programa sexa visto pola parella.
- Pensas que á muller lle gusta o programa ou veo soamente por que o está vendo o home.
- Calculade a probabilidade de que sexa visto por algún dos dous.
- O feito de que o home vexa o programa ¿é independente de que o vexa a muller?
- Calculade a probabilidade de que o home vexa o programa e a muller non.

6.− Manuel práctico de estadística aplicado a las ciencias sociales. Mullor y Fajardo, R 3.4, pag 97.

Se debe examinar un gran grupo de personas respecto a dos síntomas comunes de cierta enfermedad. Se considera que el 20% de las personas presentan sólo el síntoma A, el 30% tiene sólo el síntoma B, el 10% tiene ambos síntomas y el resto no tiene síntoma alguno. Para una persona elegida al azar de este grupo, encontrar la probabilidad de que:

- La persona presente al menos un síntoma.
- La persona no presente ningún síntoma.
- La persona presente ambos síntomas si sabemos que presenta el síntoma B.

7.− www.ciberconta.unizar.es/leccion/probabil/

Un mayorista tiene 200 clientes clasificados en la siguiente tabla según si realizan pedidos regularmente o de forma esporádica y según si efectúan el pago al contado o a través de créditos:

	Forma de pago	
Tipo de pedido	Al contado	Crédito
Regular	10	15
Esporádico	20	155

En el marco de una campaña publicitaria, el mayorista decide sortear un viaje entre sus clientes eligiendo uno de ellos al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice pedidos de forma regular o bien utilice créditos para efectuar sus pagos?
- Calcule la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice pedidos regularmente si sabemos que el elegido efectúa sus pagos mediante créditos.
- Calcule la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice los pagos mediante crédito si sabemos que realiza pedidos regularmente.
- ¿Son independientes los sucesos comprar a crédito y comprar regularmente?

8.− www.ciberconta.unizar.es/leccion/probabil/

Una empresa de trabajo temporal ha realizado un amplio estudio sobre los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25% estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20% eran estudiantes universitarios, un 30% estudiaban Formación Profesional y un 50% Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40% de ellos eran estudiantes universitarios, otro 40% estudiaban Formación Profesional y sólo un 20% se encontraban en Bachillerato.

- ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que se solicitaban?
- ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara F.P.?
- Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?

9.− Ejercicios del Calculo de probabilidades. Fernández Abascal, ej 2.22.

La constructora Cementasa trata de determinar si debería presentar una oferta para la construcción de una nueva autovía. Su principal competidora, la constructora Arenal, se ha presentado a un 70% de las contrataciones en el pasado. Si Arenal no presenta una oferta, la probabilidad de que su rival obtenga la obra es 0.5; si presenta oferta, la probabilidad de que Cementasa reciba el contrato es 0.25:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la constructora Cementasa gane el contrato?
- Si la constructora Cementasa gana el contrato, ¿cuál es la probabilidad de que la constructora Arenal no haya presentado oferta?

10.− Se preguntó a los suscriptores de un periódico local si leían la sección de economía y, también, si habían realizado operaciones en bolsa durante el último año. Las proporciones obtenidas en la encuesta son las que figuran en el cuadro siguiente:

Operac.bolsa	Lectura sección economía			
		Regularmente	Ocasionalmente	Nunca
Si	0,18	0,10	0,04	
No	0,16	0,31	0,21	

Se pide:

- Probabilidad de que un suscriptor elegido al azar no lea nunca la sección de economía;
- Probabilidad de que un suscriptor haya realizado operaciones en bolsa durante el último año;
- Probabilidad de que un suscriptor que haya realizado operaciones en bolsa no lea la sección de economía;
- Probabilidad de que un suscriptor que lea la sección de economía haya realizado operaciones en bolsa durante el último año.

11.− De un estudio realizado en un determinado campus universitario se sabe que el 35% de los estudiantes entran al menos una vez por semana en alguna de las cafeterías del campus. También se sabe que el 40% de los alumnos tiene una media de notable o más, y que el 30% de los alumnos que entran en la cafetería al menos una vez por semana tienen una media de notable o más. Se pide:

- Probabilidad de que un estudiante elegido al azar entre al menos una vez por semana en la cafetería del campus y tenga al menos una media de notable;
- Probabilidad de que un estudiante con media de notable o más entre al menos una vez por semana en una cafetería del campus;
- Probabilidad de que un estudiante elegido al azar entre al menos una vez por semana en la cafetería del campus o tenga al menos una media de notable;
- Probabilidad de que un estudiante que no tiene una media de notable o más no entre al menos una vez por semana en una de las cafeterías del campus;
- ¿Son los sucesos entra al menos una vez por semana en una cafetería del campus y tiene una media de notable o más independientes?;
- ¿Son los sucesos entra al menos una vez por semana en una cafetería del campus y tiene una media de notable o más disjuntos?.

12.− (Adaptado de http://ltodi.est.ips.pt/probest/, máis exactamente en:
http://ltodi.est.ips.pt/probest/seb/prob/prob.pdf **)**

A probabilidade de que haxa unha crise económica nun país, tendo en conta a evolución do consumo no ano anterior é a seguinte:

CONSUMO (ano 0)	Pbb de CRISE Ano 1

Sube	0
Estable	0.3
Baixa	0.5

Coñécese tamén que a probabilidade de que un ano calquera o consumo suba é 0.3, e de que baixe 0.2

- Se un ano existe crise económica ¿cal é a probabilidade de que o ano anterior baixase o consumo?
- Probabilidade de que un ano calquera non haxa crise económica
- ¿Influe a variación no consumo no feito de que haxa ou non crise o ano seguinte?

13.− Se hai crise un ano, a probabilidade de que o seguinte tamén a haxa é 0.4. Se non hai crise un ano, a probabilidade de que o seguinte tampouco a haxa é 0.8

- Probabilidade de que haxa crise tres anos seguidos
- Probabilidade de que, se este ano hai crise, esta dure polo menos dous anos máis.
- Probabilidade de que, se este ano hai crise, esta dure só dous anos máis.
- Probabilidade de que as crises non duren máis de dous anos.

14.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

- ¿Cal é a probabilidade de que gañe o equipo visitante? ¿e de empate?.
- No partido de ida dunha eliminatoria de copa Vermellos gañou a Azuis por 1−0. ¿Cal é a probabilidade de que supere Vermellos a eliminatoria sen xogar a prórroga. (os goles en campo contrario non valen dobre neste exercicio)
- Se o equipo visitante mete un gol ¿Cal é a probabilidade de que gañe o partido?.

Tema 2: VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL.

En ocasións, o espacio mostral asociado a un experimento aleatorio , non está formado por valores numéricos, o que dificultaría a modelización matemática do seu comportamento. Para solventar este inconveniente, interesa asociar ós sucesos con valores numericos, asociación que se vai facer mediante unha función denominada **variable aleatoria**. A relación definida por esta variable non ten por que reflectir unha relación real, xa que se establece simplemente como un convenio.

Def.:

Sexa (, *A*, P) un espacio de probabilidade. Unha aplicación : ! R é unha **va<u>riable aleatoria</u>** <u>se</u> é medible respecto da −álxebra *A*. (unha función é medible se calquera suceso S = {c / (c)" }" *A*, " " R

−álxebra de Borel e probabilidade inducida.

Coa axuda dunha variable aleatoria , ó espacio probabilístico (, *A*, P) podémoslle asociar outro espacio probabilístico (R, *B*, P) co que se poderá estudiar mellor o experimento aleatorio asociado.

Este espacio de probabilidade inducido pola variable aleatoria ten como espacio mostral a R. Defínese *B* como a menor −álxebra que contén a tódolos intervalos da forma (−",x], x " R; *B* coñécese como −álxebra de Borel. A probabilidade P defínese a partir de P, do xeito seguinte:

P (A) = P [−1(A)], "A" *B*

Función de distribución.

Unha vez asociada unha variable aleatoria a un experimento aleatorio, interésanos coñecer como está repartida a probabilidade entre os posibles valores. Sóese empregar para iso a seguinte función:

Def.: Sexa : ! R, unha variable aleatoria. Definimo−la súa **función de distribución** de probabilidade como unha función F: R ! R, t.q F(x) = P ("x), "x " R

(A partir de agora, e para simplifica−la notación, referirémonos simplemente como **P** á probabilidade inducida **P**)

Para un experimento aleatorio calquera, unha vez identificada a súa función de distribución, saberemos que comportamento podemos esperar del.

Propiedades:

- 0" F(x) " 1
- $\lim_{x \quad -} F(x) = F(- \quad) = P(\xi \quad - \quad) = 0$
- $\lim_{x} F(x) = F(\quad) = P(\xi \quad) = 1$
- A función de distribución é monótona non decrecente:

Supoñamos dous valores x1, x2 " R , t.q x1 < x2 , entón verifícase F(x1) " F(x2)

- P(x1 < "x2) = F(x2) − F(x1)

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Def.:

Dise que unha **<u>variable aleatoria</u>** é **<u>discreta</u>** se existe un conxunto finito ou numerable de puntos nos que está distribuida toda a probabilidade da distribución, i.e. "$\left\{x_i\right\}_{i=1}^{N}$

, con N"N ou N=", t.q. $\sum_{i=1}^{N} P\left(x_i\right)$

=1.

Podemos describir a distribución da probabilidade asociada a unha variable indicando que probabilidade corresponde a cada punto: P(=xi) =pi; sendo o valor pi a **cantidade de masa de probabilidade** que corresponde a cada xi.

Def.:

Sexa   unha variable aleatoria discreta, e D ={ xi"R/P(=xi) =pi >0}.

Denomínase **__función de cuantía__** (ou de probabilidade) da v.a. , á seguinte función:

$$f: \mathbf{R} \qquad \mathbf{R}$$

$$x \qquad f(x) = \begin{cases} p_i & \text{se } x = x_i \quad D \\ 0 & \textit{no resto} \end{cases}$$

Propiedades:

- $\sum_{\forall i} f(x_i) = 1$
  ;
- 1"f(x)"0, "x" R

Sexa unha variable aleatoria discreta , e a súa función de distribución F(x)= P(" x). Verifícase:

− F(x)= P(" x) = $\sum_{x_i \quad x} P(\xi = x_i)$

− A gráfica da función de distribución vai ser escalonada, polo tanto non é unha función continua, tendo saltos en aqueles puntos onde a probabilidade da variable aleatoria sexa distinta de cero, sendo a cuantía do salto o valor da probabilidade nese punto.

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Def.:

Unha **__variable aleatoria continua__** será aquela que pode tomar unha cantidade infinita non numerable de valores.

Propiedades:

- P(=x) = 0, " x" R

Esta propiedade indícanos que non existe masa de probabilidade en ningún punto, polo que non podemos dispoñer dunha función de cuantía para variables aleatorias continuas.

Por esta razón, para indicar a cantidade de probabilidade en variables aleatorias continuas emprégase a seguinte función:

Def.:

Sexa unha v. a. continua , e a súa función de distribución F(x)= P(" x). A **__función de densidade__** desa variable aleatoria será unha función f(x) verificando:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

A función de densidade deriva de considera−la probabilidade en intervalos infinitesimales, do xeito seguinte:

Nun intervalo (x, x+ x), a probabilidade será P(x< "x+ x)= F(x+ x) − F(x).

Facendo x o máis pequeno posible (x!0) e operando tense:

$$\lim_{\Delta x \quad 0} \frac{P(x < \xi \quad x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \quad 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Propiedades.

- f(x)"0
- $\int_{-} f(u)\, du = 1$
- F(x)= P(" x) = $\int_{-}^{x} f(u)\, du$
- P(a< "b)=F(b)−F(a)= $\int_{a}^{b} f(u)\, du$
- P(a< <b)= P(a" <b)= P(a< "b)= P(a" "b), xa que P(=a) = P(=b) = 0

VARIABLES ALEATORIAS MIXTAS.

Son variables aleatorias que combinan partes discretas e partes continuas.

CAMBIO DE VARIABLE

Consideremos unha variable aleatoria , con función de densidade f(x), e a variable , relacionada con   pola transformación monótona   **= h( )**. Coñecida a distribución de   interésanos coñece−la distribución de :

Th: Sexa   unha variable aleatoria con función de densidade f(x). Sexa   **= h( )** unha transformación monótona en sentido estricto, existe a súa derivada e ademais é distinta de cero, excepto ó sumo, nunha cantidade finita de puntos. Ademais:

a = max f(x); b = max f(x)

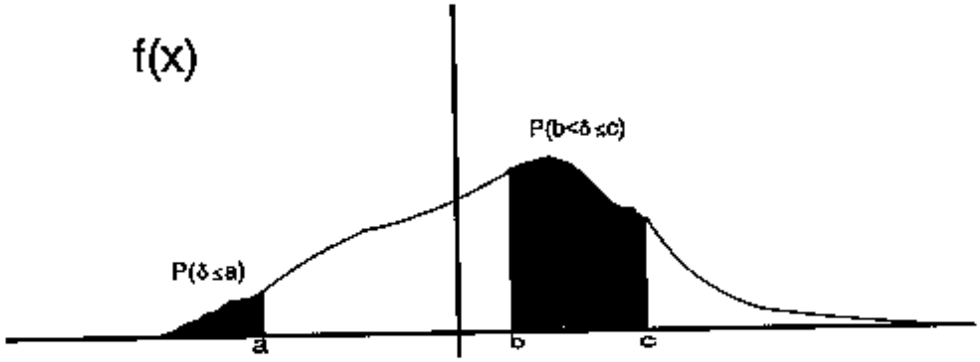
Entón   é unha variable aleatoria con función de densidade g(y), que ven dada por:

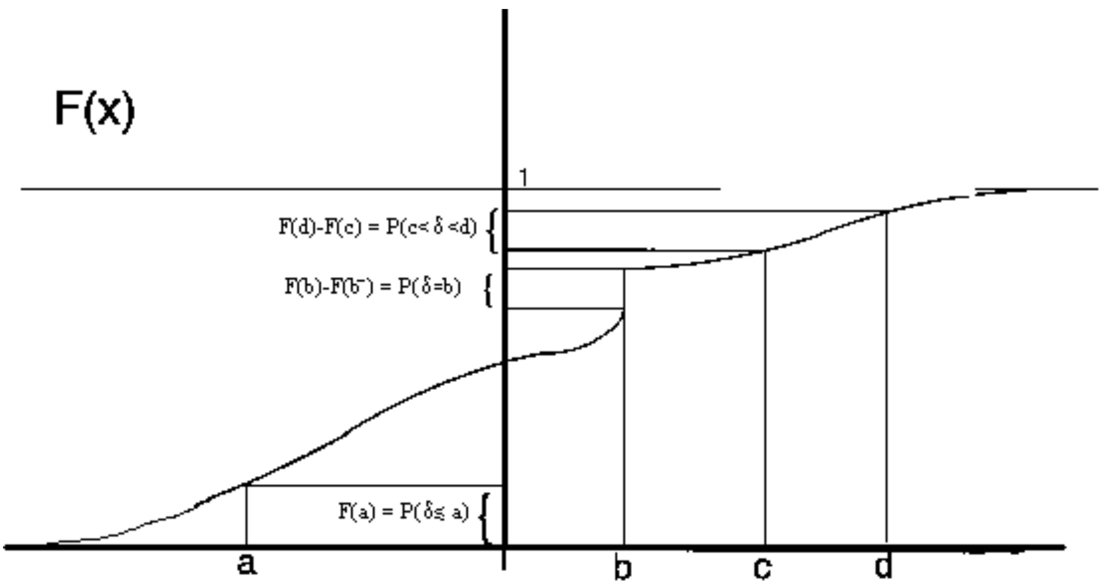
$$g(y) = \begin{cases} f\left[h^{-1}(y)\right] \dfrac{1}{\left|h'\left[h^{-1}(y)\right]\right|} & a < y < b \\ 0 & \textit{no resto} \end{cases}$$

−No caso de que ***h*** non sexa monótona, imos supoñer que se pode dividir R en intervalos nos que a función é monótona. A función de densidade de   será:

$$g(y) = \sum_{j} f\left[h^{-1}(y)\right] \frac{1}{\left|h'\left[h^{-1}(y)\right]\right|}$$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE F(x) E DE f(x).





Relacións entre Probabilidade, f. de densidade e f. de distribución.

continua: F(x)= ${}_{-}^{x} f(u)\,du$

.

P(=x) = F(x)−F(x−)= ${}_{x}^{x} f(u)\,du$

=0.

P(a< "b)= F(b)−F(a) = ${}_{a}^{b} f(u)\,du$

.

P(a" "b) = F(b)−F(a−)= F(b)−F(a) = ${}_{a}^{b} f(u)\,du$

.

discreta: P(=x)=P({x})=F(x)−F(x−).

P("x) = F(x) =

$x_i \quad x$

P(=xi) .

P(a< "b)= F(b)−F(a) =

$a<x_i \quad b$

P(=xi) .

P(a" "b) = F(b)−F(a−)= F(b)−F(a) =

$a \quad x_i \quad b$

P(=xi)" P(a< "b)

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Fernández−Abascal, Ejercicios de Calculo de probabilidad, 3.13, pag 82.

Sea X la variable aleatoria que designa el número de coches vendidos cada semana en un establecimiento. Se sabe que X tiene la siguiente función de probabilidad:

- Hállese el valor de k.
- Determínese la función de distribución de X.
- Calcúlese: P(2<X"5), P("7), P(X"6 /X>3).

2.− Fundamentos de Estadística. Aplicación a las Ciencias Humanas Cuadras y otros Editorial PPU, 1991, pág. 149.

Se tira una moneda tres veces y sea X el número de caras obtenido. Se pide hallar la función de cuantía de X y la función de distribución.

3.− "Problemas de Estadística Ruiz−Maya, L. Editorial AC, 1989 pág. 69

Una variable aleatoria X está definida en los siguientes intervalos: (0,1) (2,3) y (4,5), de tal forma que P (0 < X " 1) = 0,25 P (2 < X " 3) = 0,50 P (4 < X " 5) = 0,25, siguiendo en cada uno de los intervalos las siguientes leyes:

Intervalo (0,1) f1 (x) = a x

Intervalo (2,3) f2 (x) = b

Intervalo (4,5) f3 (x) = c x2

Calcúlense las funciones de densidad y de distribución, y las probabilidades de los sucesos siguientes mediante la función de distribución:

- 0,25 < X " 0,75
- 0,5 < X " 2,2
- X " 2,5
- 4,2 < X " 4,8
- Calcula el valor de A tal que P (0,7 < X " A) =0,65

4.− Casas, Estadística 1: Probabilidad y Distribuciones, pag 145, ej,2.

La duración X en minutos de una llamada telefónica sigue la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{matrix} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \quad 0 \end{matrix}$$

Se pide:

- La función de densidad de la variable aleatoria.
- La probabilidad de que una llamada dure más de 1 minuto y menos de 2.
- La probabilidad de que una llamada dure más de 3 minutos, si duró menos de 5 minutos.

5.− Fernández−Abascal, Ejercicios de Calculo de probabilidad, 3.23, pag 84.

Sea X la variable aleatoria que mide el número de días que un paciente está inscrito en el primer lugar de una lista de espera de la Seguridad Social para ser operado. La función de densidad de X es:

$$f(x) = \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}x} \quad x > 0$$

- ¿Cuál es el número mínimo de días que tendrá que esperar para ser intervenido con una probabilidad de 0.95?
- Si el paciente lleva inscrito 10 días en el primer lugar de la lista, ¿cuál será la probabilidad de que espere, a lo sumo, tres días más?

6.− Casas, Problemas de Estadística, pag 148.

La superficie en hectáreas de las fincas de los socios de una cooperativa vitivinícola se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{10}{385}(1 + x) \quad si \quad 1 < x < M$$

- Calcula el número máximo de hectáreas que poseen las fincas.
- Determina el porcentaje de fincas cuya superficie es superior a 5 hectáreas.
- ¿Cuál es la superficie mínima del 15% de las fincas más grandes?
- Suponiendo que las fincas son cuadradas, obten la función de densidad del perímetro de la finca (perímetro= 4 (area)1/2)
- ¿Cuál es el porcentaje de fincas cuyo perímetro es inferior a 800 metros?

7.− Fundamentos de Estadística. Aplicación a las Ciencias Humanas Cuadras y otros Editorial PPU, 1991, pág. 157

Sea X una variable absolutamente continua con función de densidad:

f (x) = k (1 + x2) si x " (0,3)

f (x) = 0 si x " (0,3)

Se pide:

- Hallar la constante k y la función de distribución de probabilidad.

- Probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2.
- Probabilidad de que X sea menor que 1.
- Sabiendo que X es mayor que 1, probabilidad de que sea menor que 2.
- Probabilidad de que X sea menor que 2.

8.− Casas, Problemas de Estadística, pag 132

El porcentaje real de zumo de naranja que poseen los refrescos con gas fabricados por una determinada compañía es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{array}{lll} 3/4 & a & x < 7.5 \\ 1-(8-x)^2 & 7.5 & x < 8.5 \end{array}$$

- Obten el porcentaje mínimo de zumo de naranja que poseen estos refrescos.
- Determina la probabilidad de que un bote de estos refrescos, elegido al azar, tenga al menos un 8% de zumo de naranja.
- Determina el porcentaje de refrescos cuyo contenido en zumo de naranja oscila entre un 7 y un 8%.

9.− Casas, Estadística 1: Probabilidad y Distribuciones, pag 144, ej,1.

La demanda semanal de cierta materia prima por parte de una empresa es de tipo aleatorio y tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{array}{ll} k(x-1)^2 & 1 < x < 3 \\ 0 & \textit{resto de valores} \end{array}$$

se pide:

- Determinar el valor de la contante k para que sea una función de densidad.
- La función de distribución.
- ¿Qué stock debe disponer la empresa al principio de la semana para garantizar que se atienda la demanda semanal con una probabilidad de 0.95?

10.− Un aforrador decide facer un investimento altamente especulativo, do cal sabe que o rendemento que produce ten unha función de densidade:

$$f(x) = \begin{array}{ll} k(\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}-4) \ \ \mathrm{se} \ \ x & [-1,4] \\ \quad 0 & \textit{no resto} \end{array}$$

(10·x é a porcentaxe que tivo como rendemento)

- ¿Cal é o valor de *k*?
- Calcula a función de distribución.
- Se so pagan impostos polo investimento os que obteñen beneficio, ¿como será a función de distribución dos rendementos que pagan imposto?.
- Se a porcentaxe que deben pagar como imposto ven dado pola función: P=(x2/10). Cal é a función de densidade asociada á variable "porcentaxe que debe pagar en impostos".
- ¿Cal é a probabilidade de que non pague impostos?.

11.− Martín Pliego y Ruiz Maya, Problemas de Probabilidad, pag 34.

En un concurso televisivo se le ofrece al concursante una bolsa con cuatro cheques cuyos importes son 0, 100.000, 200.000 y 300.000 pesetas. La prueba consiste en que el concursante, con los ojos cerrados, introduce la mano en la bolsa, saca un cheque y se lo da al presentados del programa. A continuación vuelve a introducir la mano en la bolsa, y vuelve a sacar otro. Su premio será la suma de los valores monetarios de los dos cheques extraidos. Determínese la función de cuantía de la variable premio del concursante, la función de distribución y la probabilidad de que el concursante ganemás de 200.000 pesetas.

12.− O dono dun pub decide organizar o seguinte xogo para atraer clientela: o cliente saca unha carta dunha baralla, se sae un as non paga a consumición que está tomando, se sae ouros pode tomar outra consumición gratis, se sae unha espada ten que tomar outra consumición pero pagándoa.

Un cliente que toma unha consumición de 500 pts xoga unha partida:

- Constrúe a función de cuantía do custo medio das consumicións que toma.
- Constrúe a función de distribución da función de cuantía anterior.
- Cal é a probabilidade de que o que consuma lle saia gratis.

Se o cliente repiteu 2 veces máis o proceso anterior:

- Constrúe a función de distribución do número de consumicións tomadas.
- Se o cliente sabe que se toma 5 consumicións ou máis vaise sentir indisposto. ¿Cal é a probabilidade de que isto ocorra?

13.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

- Constrúe a función de distribución da variable .
- Constrúe a función de cuantía e a de distribución da diferencia de goles a favor do local.
- Constrúe a función de cuantía e distribución dos puntos conseguidos polo equipo de casa. ¿Cal é a probabilidade de que puntúe o equipo visitante?.

14.− Probabilidad y Estadística Spiegel, M. Serie Schaum Editorial McGraw−Hill 1990 pág. 57

La función de probabilidad de una variable aleatoria está dada por:

x2 / 81 −3 < x < 6

f (x) = 0 de otra forma

Hallar la función de densidad para la variable aleatoria Y = 1/3 (12 − X)

15.− Calcula, a partir da seguinte función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \quad x \quad 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

- P("0.2); P(−0.8< "0.2); P(−0.8" "0.2); P("−0.2); P("0.12); P(0.8< "0.9); P(0.8" "1.9).
- Función de densidade.
- Coa función de densidade: P("0.1); P(−0.3< "0.4); P("0.3); P("); P(0.3< "0.4).

Tema 3: VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL.

En moitas ocasións, ó realiza−lo estudio dun experimento aleatorio imos estar interesados en distintas particularidades relacionadas con el. Por exemplo, dentro do espacio mostral formado por tódalas empresas portuguesas podemos estar interesados en facer estudios sobre o seu volume de emprego e o valor do seu capital social.

Interesaríanos así estudiar dúas variables aleatorias, que poderían ser estudiadas por separado, ou, en caso de que esteamos interesados nas súas posibles relacións, será necesario construi−lo problema sobre unha variable aleatoria bidimensional.

A relación entre dous fenómenos aleatorios pode oscilar desde a **independencia**, cando non existe ningunha relación, á **dependencia funcional**, cando a relación é perfecta. Coa dependencia funcional (ou perfecta), coñece−lo comportamento dun dos fenómenos permítenos coñecer exactamente o comportamento do outro.

Nas situacións intermedias, coñece−lo comportamento dun dos fenómenos vainos orientar sobre o comportamento do outro, en maior ou menor medida segundo esteán máis ou menos relacionados. Esta situación coñécese como **dependencia estatística**.

Def.: Sexa (,) unha variable aleatoria bidimensional.

Definimo−la súa **<u>función de distribución conxunta</u>** como unha función F: R2! R, t.q F(x,y) = P ("x; "y), "(x,y) " R2

Propiedades:

- 0" F(x,y) " 1
- $\lim_{x \; -} F(x,y) = F(- \;\; , y) = P(\xi \quad - \;\; ; \eta \quad y) = 0$

$\lim_{y \; -} F(x,y) = F(x, - \;\;) = P(\xi \quad x; \eta \quad - \;\;) = 0$

- $\lim_{\substack{x \\ y}} F(x,y) = F(\;\; , \;\;) = P(\xi \qquad ; \eta \qquad) = 1$
- A función de distribución é non decrecente:

x1, x2 " R , t.q x1 < x2 !F(x1,y) " F(x2,y).

y1, y2 " R , t.q y1 < y2 !F(x,y1) " F(x,y2).

- P(x1<   "x2; y1<   "y2) = F(x2,y2) − F(x2,y1) − F(x1,y2) + F(x1,y1)

Función de Distribución Marxinal

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional (,) defínese a **función de distribución marxinal** de como: F1(x) = P("x); e a función de distribución marxinal de como F2(y) = P("y).

Propiedade:

F1(x) = F(x,"); F2(y) = F(",y)

Función de Distribución Condicionada.

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional (,) defínese a **función de distribución** de **condicionada** a que "A" R como:

$$F(\cdot/A): \quad \mathbf{R} \qquad\qquad \mathbf{R}$$
$$y \qquad\qquad F(y/A) = P(\eta \quad y/\xi \quad A)$$

(Para definiríase de xeito semellante)

Esta función de distribución indícano−lo comportamento de unha das variables cando coñecemo−lo comportamento da outra.

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONAIS DISCRETAS

Def.:

Sexa (,) unha variable aleatoria bidimensional discreta, e sexa

D={(xi,yj)"R2/ P(=xi; =yj) =pij >0}.

Denomínase **función de cuantía conxunta** da v.a. (,), á seguinte función:

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \qquad\qquad \mathbf{R}$$
$$(x,y) \qquad f(x,y) = \begin{matrix} p_{ij} & \text{se } (x,y) = (x_i, y_j) \quad D \\ 0 & \textit{no resto} \end{matrix}$$

Propiedades:

− $\underset{\forall i,j}{} f(x_i, y_j) = 1$

;

− f(x,y)"0, "(x,y)"R2

− F(x,y) = P(" x; "y) = $\underset{x_i \quad x \; y_j \quad y}{} P(\xi = x_i; \eta = y_j)$

Función de Cuantía Marxinal

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional discreta (,) defínese a **función de cuantía marxinal** de como: f1(x) = P(=x); e a función de cuantía marxinal de   como f2(y)=P(=y).

Propiedades:

f1(x) = $\underset{\forall j}{} P(\xi = x;\eta = y_j)$

f2(y) = $\underset{\forall i}{} P(\xi = x_i;\eta = y)$

F1(x)= $\underset{x_i \quad x \ \forall j}{} P(\xi = x_i;\eta = y_j) = \underset{x_i \quad x}{} P(\xi = x_i)$

F2(y)= $\underset{y_j \quad y \ \forall i}{} P(\xi = x_i;\eta = y_j) = \underset{y_j \quad y}{} P(\eta = y_j)$

Función de Cuantía Condicionada.

Def.:

Dada unha variable aleatoria discreta bidimensional (,) defínese a **función de cuantía** de   **condicionada** a que "A" R como:

$$f(\cdot/A): \quad \mathbf{R} \qquad\qquad \mathbf{R}$$

$$y \qquad f(y/A) = P(\eta = y/\xi \quad A)$$

(Para   definiríase de xeito semellante)

Propiedades.

– $$F(y/A) = P(\eta \quad y/\xi \quad A) = \frac{\underset{y_j \ \ y \ x_i \ \ A}{} P(\xi = x_i;\eta = y_j)}{\underset{x_i \ \ A}{} P(\xi = x_i)}$$

– $$f(y/A) = P(\eta = y/\xi \quad A) = \frac{\underset{x_i \ \ A}{} P(\xi = x_i;\eta = y)}{\underset{x_i \ \ A}{} P(\xi = x_i)}$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Propiedade:

- P(=x; =y) = 0, " =(x,y)"R2

Def.:

Sexa (,) unha variable aleatoria bidimensional continua, e sexa F(x,y)= P(" x; "y) a súa función de distribución

A **<u>función de densidade conxunta</u>** desa variable aleatoria será unha función f(x,y) verificando:

$$f(x,y) = \frac{{}^2 F(x,y)}{x \;\; y}$$

Propiedades:

−

$$f(u,v)dv\,du = 1$$

− −

;

− f(x,y)"0, "(x,y)"R2

− F(x,y) = P(" x; "y) = $\overset{x \;\; y}{\underset{- \;\; -}{}} f(u,v)dv\,du$

− P(a< " b;c< "d) = $\overset{b \;\; d}{\underset{a \;\; c}{}} f(u,v)dv\,du$

Función de Densidade Marxinal

Def.: Dada unha variable aleatoria bidimensional continua (,) defínese a **<u>función de densidade marxinal</u>** de   como: f1(x) = $\frac{F(x,y)}{y}$

, e a función de densidade marxinal de   como f2(y) = $\frac{F(x,y)}{x}$

Propiedades:

f1(x) = $\underset{-}{} f(u,v)dv$

f2(y) = $\underset{-}{} f(u,v)du$

F1(x)= $\overset{x}{\underset{- \;\; -}{}} f(u,v)dv\,du = \overset{x}{\underset{-}{}} f_1(u)du$

F2(y)= $\overset{y}{\underset{- \;\; -}{}} f(u,v)du\,dv = \overset{y}{\underset{-}{}} f_2(v)dv$

Función de Densidade Condicionada.

Def.:

Dada unha variable aleatoria continua bidimensional (,) defínese a **función de densidade de condicionada** a que "A" R como:

$$f(y/A) = \frac{F(y/A)}{y}$$

(Para   definiríase de xeito semellante)

Propiedades.

− En caso de que P("A)>0:

$$F(y/A) = P(\eta \quad y/\xi \quad A) = \frac{{}^{y}_{-}\ {}_{A} f(u,v)du\,dv}{{}_{A} f_1(u)du}$$

No caso de que A = {a}, con a"R, e dado que estamos traballando con variables continuas podemos considera−lo seguinte:

$$P(y<\eta \quad y+\Delta y / a<\xi \quad a+\Delta x) = \frac{P(y<\eta \quad y+\Delta y; a<\xi \quad a+\Delta x)}{P(a<\xi \quad a+\Delta x)}$$

tomando límites obterase unha expresión para a función de densidade de   condicionada a que =a:

$$-\ f(y/a) = \frac{f(a,y)}{f_1(a)}$$

Para a función de distribución de   condicionada a que =a terase:

$$F(y/a) = P(\eta \quad y/\xi = a) = \frac{{}^{y}_{-}\ f(a,v)dv}{f_1(a)}$$

:

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional (,).

e   son **independentes !** F(x,y) = F(x) · F(y) " (x,y)"R2

Propiedades:

$$-\ F(y/A) = F_2(y)$$

$F(x/A) = F_1(x)$

- Caso discreto: P(= x; =y) = P(= x)·P(=y) " (x,y)"R2.
- Caso continuo: f(x,y) = f1(x)·f2(y) " (x,y)"R2.

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.−Fundamentos de Estadística. Aplicación a las Ciencias Humanas Cuadras y otros Editorial PPU, 1991, pág. 179.

Sean X e Y v.a. independientes con las distribuciones siguientes:

xi	1 2
P (xi)	0,6 0,4

yj	5 10 15
P (yj)	0,2 0,5 0,3

Hallar la distribución conjunta de X e Y.

2.− Fundamentos de Estadística. Aplicación a las Ciencias Humanas Cuadras y otros Editorial PPU, 1991, pág. 163

Supongamos las variables aleatorias discretas X e Y con función de probabilidad conjunta dada por la siguiente tabla:

Y X	y1 = 4	Y2 = 5
x1 = 3	0,17	0,10
x2 = 10	0,13	0,30
x3 = 12	0,25	0,05

- Hallar las funciones de cuantía marginales.
- Hallar los valores de la función de distribución conjunta F(x2 , y1) , F(x2 , y2), F (x3,y2)
- Hallar P (10,5; 5) y F (10,5; 5).
- Función de distribución marginal de X: F1 (x2).
- Función de distribución marginal de Y: F2 (y2).

3.− Fundamentos de Estadística. Aplicación a las Ciencias Humanas Cuadras y otros Editorial PPU, 1991, pág. 175.

Sean las v.a. discretas X e Y con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:

Y X	y1 = 0,4	Y2 = 0,8
x1 = 2	0,15	0,05
x2 = 5	0,30	0,12

x3 = 8	0,35	0,03

Hallar:

- Las funciones de cuantía marginales.
- La función de cuantía condicionada de la componente X, si la componente Y toma el valor y1 = 0,4.
- La función de cuantía condicionada de la componente Y, si X = x2 = 5.
- ¿Son las variables X e Y independientes?.
- La función de distribución condicionada de X, si Y = y1 = 0,4.
- La función de distribución condicionada de Y, si X = x2 = 5.

4.− Dada la función :

K x y 0 " x " 1 0 " y " 1

f (x, y) = 0 resto de valores de X, Y

Hallar:

- F (x, y); f1 (x); f2 (y); F1 (x); F2 (y); f (x/y); f (y/x).
- ¿Son independientes?.

5.− Casas, Estadística I: Probabilidad y Distribuciones, ejercicio 7, pag 151.

La renta X, y el consumo Y, de los habitantes de una población, tienen por función de densidad:

f1(x) = 2−2x, si 0<x<1

F(x/y) = 1/x, si 0<y<x

Calcula la función de densidad conjunta de la variable aleatoria (X,Y), y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

6.− Dúas variables   e   teñen a seguinte función de distribución conxunta:

$$F(x,y) = \begin{array}{ll} 0 & x, y < 0 \\ x & y < 0;\quad 0 \quad x \quad 1 \\ y & x < 0;\quad 0 \quad y \quad 1 \\ x\,y & 0 \quad x, \quad y \quad 1 \\ 1 & 1 < x, y \end{array}$$

- Calcula a súa función de densidade conxunta; a función de densidade marxinal de ; e a de distribución de , condicionada a =2.
- ¿Son variables independentes?.
- P(=0.22, >0.2), P("0.22, >0.2), P("0.22), P("0.22/ >0.2), P("0.22, "0.2).

7.− Fernández−Abascal, Ejercicios del Cálculo de probabilidades, 4.35

La asociación de libreros de una cuidad ha publicado recientemente un trabajo sobre el tipo de literatura preferida por los lectores de edad comprendida entre los 25 y 40 años. Entre otros aspectos, se analiza el número de libros de autores hispanos, X, que compra un individuo de un total Y, de libros adquiridos a la semana, mediante la siguiente función de densidad conjunta:

X Y	0	1	2	3
0	2/8	2/8	0	0
1	0	1/8	1/8	0
2	0	0	1/8	0
3	0	0	0	1/8

- Sabiendo que un individuo, ha adquirido 2 libros en una semana ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean de autores hispanos?
- Determínese el porcentaje de individuos que compran a la semana un libro de autor no hispano.
- Si el número de libros que compra un individuo en una semana no depende de los que adquiere en cualquier otra ¿Cuál es la probabilidad de que el número de libros que un individuo adquiere al cabo de 2 semanas sea superior a 3?

8.− Casas, Problemas de Estadística, ejer 3.17, pag 162.

En una investigación se pretende realizar una encuesta en los hogares de una determinada Comunidad Autónoma. Parte de la información deseada será recogida mediante cuestionarios enviados por correo y el resto se solicitará telefónicamente. El Instituto de Estadística de esta Comunidad supone que la distribución conjunta de la proporción de hogares que responden a los cuestionarios recibidos por correo, X, y la de los que colaboran con las encuestas telefónicas, Y, tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x,y)=\frac{3x+ky}{4} \quad 0 \quad x \quad 1,\ 0<y<1$$

- Determina el valor de k para que sea una función de densidad.
- Calcula la probabilidad de que el porcentaje de hogares que responde por correo oscile entre el 35 y el 65%, y que el porcentaje de respuestas por teléfono sea al menos un 25%, pero no supere al de respuestas por correo.
- Obtén la probabilidad de que la proporción de los hogares que responden a las encuestas telefónicas sea al menos el doble de la de los que corresponden a las encuestas por correo.
- Calcula la probabilidad de que el porcentaje de hogares que responden a los cuestionarios recibidos por correo sea superior al 50%.
- Calcula la probabilidad de que el porcentaje de hogares que colaboran con las encuestas telefónicas no supere el 25%.
- ¿Son independientes estas dos proporciones?
- Si telefónicamente el porcentaje de respuestas ha superado el 25% ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de respuestas por correo no alcance el 35%?
- Obtén la probabilidad de que el porcentaje de respuestas por correo sea superior al 50% sabiendo que por teléfono han respondido un 75% de los hogares.

9.− Fernández−Abascal, Ejercicios del Calculo de probabilidades, 4.31

El portero de una comunidad de vecinos recoge la basura depositada por la familia del Sr. Pérez a la puerta de su casa en cualquier instante entre las 17 y 19 horas. La variable aleatoria X, tiempo en minutos desde las 17 horas hasta la recogida, responde a la siguiente función de densidad:

$$f(x)=1/120 \quad 0<x<120$$

Los Srs. Pérez son muy despistados y en lugar de depositar la basura a las 17 horas (asegurando así que el portero se la lleve), lo hace a partir de dicha hora en cualquier momento, Y, igualmente distrubuido que X. ¿Qué porcentaje de veces quedará la basura en la puerta de la vivienda?

10.− Fernandez−Abascal, Ejercicios del Cálculo de probabilidades, 4.20

De cara a preparar la próxima temporada veraniega, el propietario de Pochó y Vengo−Vengo, locales habituales en las noches de una cierta ciudad costera, muestran especial interés por el consumo de bebidas alcohólicas. Sean X e y las proporciones semanales de bebidas sin alcohol sobre el total de consumiciones en Pochó y Vengo−Vengo, respectivamente. La función de densidad conjunta de estas variables es:

$$f(x, y) = kx(x + y) \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1$$

- Determinise el valor de k.
- Obtengase el porcentaje de semanas en que la proporción de bebidas alcohólicas en Pochó supera el 30%.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de bebidas alcohólicas sea mayor en Pochó que en Vengo−Vengo?
- Si en una semana el porcentaje de bebidas no alcohólicas supera el 50% en Pochó ¿cuál es la probabilidad de que ocurra lo mismo en Vengo−Vengo?

11.− Fernández−Abascal, Ejercicios del Calculo de Probabilidades, 4.29

La empresa OLIS, encargada de la fabricación y el mantenimiento de ascensores, desea mejorar la calidad de sus productos y el servicio al cliente. A tal fin, se lleva a cabo un análisis de la situación actual del que se concluye que la distribución conjunta de la variable aleatoria X, tiempo transcurrido, en días, desde la instalación de un ascensor hasta la primera avería, e Y, tiempo en días que tarda la empresa en acudir al lugar del problema para solucionarlo, viene dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{300} e^{-\frac{x+300y}{300}} \quad x > 0 \quad y > 0$$

- Calcúlese la función de densidad del tiempo de funcionamiento hasta la primera avería.
- El jefe de escalera de un vecindario está indignado porque hace 3 días que dio parte a la empresa de una avería y todavía no han acudido a arreglarla. ¿Cuál es la probabilidad de que se den este tipo de situaciones?
- ¿Son independientes X e Y?
- Calcúlese la probabilidad de que un ascensor haya funcionado con normalidad durante al menos 200 días y, una vez averiado, la empresa haya tardado medio día en ir a arreglarlo.

12.− Un economista considera que as variables = "taxa de variación no número de turistas" e ="taxa de variación do PIB, teñen a seguinte función de densidade conxunta:

$$f(x, y) = \begin{matrix} k(\text{x y} + 8) & \text{se } x \; [-2,10], \quad y \; [-1,4] \\ 0 & \textit{no resto} \end{matrix}$$

(en %)

- Cal é o valor de k.
- Constrúe a súa función de distribución.
- Constrúe a función de densidade marxinal de , e a súa distribución condicionada a =2.
- Constrúe a función de distribución do turismo se o PIB varía un 4%.
- ¿Cal é a probabilidade de que o turismo medre se o PIB non o fai?.

- ¿Son dúas variables independentes?.

13.−Adaptado de http://ltodi.est.ips.pt/probest/, máis exactamente de: http://ltodi.est.ips.pt/probest/seb/var−bidim/var_bidim.pdf

M1 e M2 son dúas máquinas que funcionan de forma independente. Sexan e , v.a. que representan respectivamente o número de avarías de M1 e M2 por día. Sábese que:

i. M1 nunca se avaría máis dunha vez ó día

ii. M2 avaríase como máximo 2 veces ó día

iii. A probabilidade de que M1 non se avaríe é 0.7

iv. A probabilidade de que M2 non se averíe é 0.5 e a de averiarse dúas veces é 0.3

- Construide as funcións de distribución conxunta e marxinais de e .
- ¿Cal é a probabilidade de que nun día se avaríen as dúas máquinas?.
- ¿Cal é a probabilidade de que nun día non haxa averías?.
- Unha semana ten cinco días de traballo, ¿Cal é a probabilidade de que se poida traballar tres días desa semana sen que haxa avarías nas máquinas?.

14.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

- Constrúe a función de distribución da variable , e a función de distribución conxunta.
- Constrúe a función de cuantía conxunta condicionada a que gañe o equipo visitante.
- Probabilidade de que puntúe o equipo visitante se non meteu goles.
- Probabilidade de que gañe o equipo local se o visitante marcou.
- Constrúe a funcións de cuantía e distribución conxuntas dos puntos conseguidos polos dous equipos. ¿Cal é a probabilidade de que puntúe o equipo visitante?

Tema 4: CARACTERÍSTICAS DAS VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONAIS.

Unha vez asociado un experimento aleatorio cun espacio de probabilidade mediante unha variable aleatoria, teremos a posibilidade de coñecer unha serie de valores que cuantificarán algunhas das súas propiedades. Estes valores basearanse no feito de que, a medida que aumentamos o número de realizacións dun experimento aleatorio, os promedios de calquera función dos resultados obtidos vanse estabilizar en torno a un punto.

Def.:

Sexa g(x) unha función calquera e   unha variable aleatoria. Denóminase **esperanza matemática** (ou valor esperado ou media) de g( ) á seguinte expresión:

$$E\left(g(\xi)\right) = \begin{cases} \sum_{\forall i} g(x_i)\, P(\xi = x_i) & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria discreta} \\ \int g(u)\, f(u)\, du & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

No caso de que esa serie ou esa integral non converxan dise que non existe a esperanza desa función.

CASOS PARTICULARES DE INTERESE.

- Esperanza matemática de _(correspóndese coa media aritmética):

Obtense considerando g(x) = x:

$$E(\xi) = \alpha = \begin{cases} \sum_{\forall i} x_i\, P(\xi = x_i) & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria discreta} \\ \int u\, f(u)\, du & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

A esperanza dunha variable soe representarse coas letras gregas   ou .

Propiedades:

- *c*" R, *c* constante ! E[*c*] = *c*.
- (Cambio de orixe) Consideremos unha variable aleatoria , con esperanza E[ ]=   ;e unha constante *c*" R. Defínese unha variable   =   + c.

A súa esperanza vai ser: E[ ] = E[ ]+c =   +c

- (Cambio de escala) Consideremos unha variable aleatoria , con esperanza E[ ]=   ;e unha constante *c*" R, c"0. Defínese unha variable   = c· .

A súa esperanza vai ser: E[ ] = c·E[ ] = c·

- Consideremos unha variable aleatoria , con esperanza E[ ]= . Verifícase:

E[−] = 0

- Momentos ordinarios (ou respecto da orixe)

O *momento ordinario de orde r*, obtense considerando g(x) = xr:

$$E\,\xi^r = \alpha_r = \begin{cases} \sum_{\forall i} x_i^r\, P(\xi = x_i) & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria discreta} \\ \int u^r\, f(u)\, du & \text{se } \xi \text{ unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

Propiedades:

- Se " r entón " s " s < r

• Momentos centrais (ou respecto do valor esperado)

O *momento central de orde r*, obtense considerando g(x) = (x−)r:

$$E\ (\xi-\alpha)^r\ =\mu_r= \begin{cases} \sum_{\forall i}(x_i-\alpha)^r\ P(\xi=x_i)\ \text{se}\ \xi\ \text{ unha variable aleatoria discreta} \\ \int (u-\alpha)^r\ f(u)\,du\ \text{ se}\ \xi\ \text{ unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

Propiedades:

- Se " r entón " s, s " s < r

MEDIDAS DE POSICIÓN.

Indican en torno a que punto se sitúan os valores da variable.

Un exemplo sería a media aritmética, que é un concepto equivalente á esperanza da variable pero aplicado a unha mostra.

Outras medidas de posición:

- Mediana:

É un valor **Me** " R, que verifica P ("**Me**) = P ("**Me**) = 0.5

- Cuantis:

Un cuantil de orde **r** (0<**r**<1), é un valor Qr " R, que verifica P ("Qr) = **r**

Sóense empregar tres tipos de cuantis:

Cuartis: 3 valores que separan R en 4 partes equiprobables.

Decis: 9 valores que separan R en 10 partes equiprobables.

Percentis (ou Centis): 99 valores que separan R en 100 partes equiprobables.

- Moda:

A moda é un valor Mo " R, para o cal a probabilidade da variable aleatoria se fai máxima, i.e., verifica:

$$P(\xi=Mo)=\max_{\forall i} P(\xi=x_i)\ \text{ se}\ \xi\ \text{ unha variable aleatoria discreta}$$

$$f(Mo)=\max_{x} f(x)\qquad \text{se}\ \xi\ \text{ unha variable aleatoria continua}$$

Tendo en conta esta definición, poden existir dúas ou máis modas nunha distribución.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

Indican se os valores da variable están máis ou menos agrupados. Como consecuencia, tamén van indicar se as medidas de posición son representativas ou non do conxunto dos valores da variable.

- Varianza:

= E[(x−)2]. É o momento central de orde 2.

Propiedades:

- "0.

En particular: =0 ! P(=)=1

- (Cambio de orixe) Consideremos unha variable aleatoria , con esperanza E[ ]= , varianza ; e unha constante *c*" R. Defínese unha variable = +c. A súa varianza vai ser: = (Á varianza non lle afectan os cambios de orixe)
- (Cambio de escala) Consideremos unha variable aleatoria , con esperanza E[ ]= , varianza ; e unha constante *c*" R. Defínese unha variable =c· . A súa varianza vai ser: =c2 (Á varianza aféctanlle os cambios de escala)
- A fórmula da varianza pode expresarse do xeito seguinte: = − Ê

- Desviación típica ( ):

É a raiz cadrada da varianza. Sóese empregar por que está expresada nas mesmas unidades cá esperanza.

Tipificación.

É un proceso de homoxeneización de variables que teñen distinta esperanza e distinta varianza. O seu obxectivo é compara−la posición relativa de valores tomados por variables diferentes.

Def.: Sexa unha variable aleatoria, con esperanza , varianza . A **variable tipificada Z**, é unha variable construida a partir de do xeito seguinte:

$$\mathbf{Z} = \frac{\xi - \alpha_\xi}{\sigma_\xi}$$

−Propiedade.

Se **Z** é unha variable tipificada, entón: E[Z]=0; Var(Z)1.

TEOREMA DE MARKOV.

Se non se coñece a función de distribución dunha variable, este teorema proporciona unha acotación para a súa probabilidade.

Th.: Sexa unha variable aleatoria , e unha función g( ) "0. Entón, para calquera **k** "R, **k**>0, tense:

$$P\left(g(\xi) \quad k \right) \quad \frac{E\left[g(\xi) \right]}{k}$$

Como caso particular dste teorema, e supoñendo g( )=(−)2 e **t**= $\sqrt{k}$

obtense a **desigualdade de Chebyshev**:

$$P\left(|\xi - \alpha| \quad k\,\sigma_\xi\right) \quad \frac{1}{k^2}$$

ou o que é equivalente: $P\left(\alpha - k\,\sigma_\xi < \xi < \alpha + k\,\sigma_\xi\right) \quad 1 - \frac{1}{k^2}$

Esta desigualdade acota a probabilidade de que unha variable tome valores fora dun entorno da esperanza de lonxitude **t** .

Para un valor determinado da cota a amplitude do intervalo aumenta cando aumenta a desviación típica, o que confirma o interese deste parámetro (e da varianza) como medida da dispersión da variable.

FUNCIÓN XERADORA DE MOMENTOS

Def.: Denomínase <u>función xeradora</u> de momentos (ou xeratriz de momentos) á seguinte función:

$$g(t) = E\left[e^{t\xi}\right] = \begin{cases} \displaystyle_{\forall i} \; e^{t\,x_i}\, P(\xi = x_i) \;\; \text{se}\,\xi \;\; \text{unha variable aleatoria discreta} \\ \_ \;\; e^{tu}\, f(u)\, du \;\; \text{se}\,\xi \;\; \text{unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

(Esta función pode non existir, cando E[et] = ±")

Propiedade.

− Se " r = E[r] entón pódese calcular facendo:

$$\alpha_r = \left. \frac{d^r\left(g(t)\right)}{dt^r} \right|_{t=0}$$

Tense así outra posibilidade para calcular esperanzas dunha variable aleatoria.

Def.: Denomínase <u>función característica</u> á seguinte función:

$$\varphi(t) = E\left[e^{it\xi}\right] = \begin{cases} \displaystyle_{\forall j} \; e^{it\,x_j}\, P(\xi = x_j) \;\; \text{se}\,\xi \;\; \text{unha variable aleatoria discreta} \\ \_ \;\; e^{itu}\, f(u)\, du \;\; \text{se}\,\xi \;\; \text{unha variable aleatoria continua} \end{cases}$$

sendo $i = \sqrt{-1}$

.

Esta función ten como avantaxe sobre a función xeradora que vai existir sempre.

Propiedade.

− Se " r = E[r] entón pódese calcular facendo:

$$i^r \alpha_r = \left. \frac{d^r(\varphi(t))}{dt^r} \right|_{t=0}$$

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente función de cuantía:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} x^2 & \text{para } x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{para el resto de valores de X} \end{cases}$$

Determinar:

- Los momentos ordinarios y centrales de orden 1, 2, 3 y 4.
- El coeficiente de variación.

2.− Problemas de Estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia Casás Sánchez, J.M. y otros Ediciones Pirámide, 1998 pág. 139

De acuerdo a la información que facilita la Cámara de Comercio, el 50% de las heladerías de una capital obtienen unos ingresos anuales comprendidos entre 1.000.000 y menos de 2.000.000 de pesetas, el 25% obtienen unos ingresos entre 2.000.000 y menos de 3.000.000 y el resto no llegan a 1.000.000 de pesetas de ingresos.

Con la información disponible, construya una función de densidad que modelice la distribución de ingresos anuales (X) de las heladerías y, a partir de ella, obtenga:

- La función de distribución de X.
- Los ingresos medios y su desviación típica.
- La función generatriz de momentos de la variable X.
- El porcentaje de heladerías con unos ingresos anuales comprendidos entre 500.000 y 1.500.000 pesetas.
- Los ingresos máximos del 85% de las heladerías que menos ingresos obtienen.

3.− Cálculo de Probabilidades Baró Llinás, J. Parramón Ediciones, 1987 pág. 59

La densidad de cierta característica química de algunos compuestos viene dada según la ley:

f (x) = 0 x " 0

2x 0 < x " 0,8

0,72 0,8 < x " 1,3

0 x > 1,3

Obtener:

- Los tres primeros momentos ordinarios.
- Esperanza matemática y varianza.
- Cálculo de E (2X + 5X2 − X3).

4.− Problemas de Estadística López de la Manzanara Barbero, J. Ediciones Pirámide, 1991 pág. 127.

Dada la variable X cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de distribución:

F (x) = 0 para x < 1

F (x) = ¼ para 1 " x < 3

F (x) = 1 para 3 " x

Determinar el valor probable y la varianza.

5.− Cálculo de Probabilidades Baró Llinás, J. Parramón Ediciones, 1987 pág. 65

Una máquina fabrica tornillos de 160 mm. de longitud media con desviación típica 10 mm., desconociéndose la ley de probabilidad.

Se pide:

- Proporción de tornillos que miden entre 140 y 180 mm. de longitud.
- Proporción de tornillos que difieren en más de 15 mm. de la media.
- Proporción de tornillos que miden más de 190 mm.

6.− El valor de los pedidos suministrados por una empresa oscila aleatoriamente entre 2 y 6 u. m. con f(X) = x/16. Sabiendo que el coste total del envío del pedido es del 2% de su ingreso más una cantidad fija igual a 1 u. m.:

- Calcula el coste total esperado del envío.
- Si el transportista fija una tarifa mínima de 1.1 u. m., calcula el coste total esperado del envío.

7.− Casas y otros: Problemas de estadística, ejercicio 3.4, pag 128.

La remuneración semanal de los empleados comerciales de un concesionario de automóviles de lujo, está compuesta por un sueldo fijo de 100.000 pesetas y una comisión de 20.000 pts por cada coche vendido. A estas cantidades debe descontarse un 10% en concepto de retención de impuestos y otros gastos. La probabilidad de que un empleado venda un número de coches, X, en una semana son las siguientes:

Xi	0	1	2	3	4	5
P (X=xi)	0.1	0.3	0.3	0.2	0.05	0.05

- ¿Cuál será la remuneración semanal neta media por empleado y su desviación típica?
- Obtén la función de distribución de la remuneración semanal neta por empleado.
- Si la empresa tiene 8 vendedores ¿a cuanto debería ascender la comisión por cada coche vendido si se pretende que la empresa destine a pagos para los empleados una cantidad media semanal de 900.000 pesetas?

8.− Casas y otros: Problemas de estadística, ejercicio 3.7, pag 134.

La cantidad de pan que se vende diariamente en una panadería puede representarse mediante una variable aleatoria cuya función de densidad, expresada en cientos de kilos, es:

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \quad x < 4 \\ k(7-x) & 4 \quad x < 7 \end{cases}$$

- Calcula el valor de k para que sea una verdadera función de densidad.
- Obtén la función de distribución.
- Calcula la probabilidad de que en un día se vendan más de 300 kilos pero menos de 500.
- El propietario de la panadería fija el coste de fabricación en 175 pts/kg y haciendo un computo mediante el precio de venta de las barras de pan podría evaluarse en 250 pesetas ¿Cuál sería el beneficio esperado durante una semana, suponiendo que la panadería abre todos los días?
- Obtén la desviación típica del beneficio semanal en la panadería considerando que las ventas diaria son independientes entre si.

9.− Casas y otros: Problemas de estadística, ejercicio 3.11, pag 143

En una fabrica de una cierta localidad alicantina se produce una media de 150 pares de zapatos al día con una desviación típica de 10 pares:

- Obtén el porcentaje de días en los que la producción supera los 135 pares de zapatos, pero es inferior a 165.
- Obtén la cantidad de pares de zapatos para que como máximo, el 25% de los días, la producción se desvíe de la media en al menos dicha cantidad.

10.− Fernandez Abascal y otros, Ejercicios del Cálculo de Probabilidades, ejer 5.33, pag 226.

El número medio de periódicos vendidos diariamente en un quiosco son 200 ejemplares con una desviación típica de 10. Si un día determinado, el propietario del quiosco quiere tener la seguridad mínima del 99%, de no quedarse sin existencias ¿cuantos ejemplares debe de encargar ese día?

11.− Casas y otros: Problemas de estadística, ejercicio 3.5, pag 130

El tiempo en horas, X, en el que los empleados de una empresa de fontanería reparan un determinado tipo de avería, es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{9} e^{-x/9} \quad x > 0$$

Los empleados de la empresa reciben una gratificación de 4000 pesetas si efectúan la reparación en menos de 4 horas y de 3000 si tardan entre 4 y 7 horas.

- ¿Cuál es la gratificación pagada más frecuente a los empleados de esta empresa?
- ¿Cuál es la gratificación media que perciben los empleados de esta empresa?
- ¿Cuál es en tiempo máximo que tardan en hacer una reparación el 30% de los empleados más lentos?
- ¿Cuál es en tiempo mínimo que tardan en hacer una reparación el 30% de los empleados más rápidos?

12.− Martín Pliego, Montero y Ruiz Maya, Problemas de probabilidad, ej 4.18, pag 151.

En las fiestas navideñas un establecimiento pone un puesto de venta de abetos. La demanda de estos árboles de Navidad no es fija y el propietario del establecimiento sabe, por la experiencia de años anteriores, que la media de las ventas fue de 200 abetos con desviación típica de 10.

¿Qué acopio de abetos debe realizar el establecimiento si quiere tener una probabilidad de al menos el 90% de satisfacer la demanda de árboles de Navidad?

13.− Pérez Suárez, Análisis de datos económicos II, ejer 2.1, pag 99.

La variable aleatoria X, que recoge la superficie (en cientos de metros cuadrados) de los locales de cierta compañía inmobiliaria se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{6} & 1 < x < 3 \\ 0 & en\ \ el\ resto \end{cases}$$

- Obtener la función de distribución, ¿que proporción de locales tienen superficie superior a 180 m2?
- Calcular la superficie que puede ser calificada de mediana.
- Un comprador está decidiendo qué local va a adquirir para instalar su negocio comercial. Sabiendo que el metro cuadrado tiene un precio de 300.000 pts., obtener la distribución de la variable gasto.
- Calcular e interpretar el gasto esperado para la adquisición del local. ¿Qué relación guarda esta característica con la esperanza de la superficie? ¿Cómo se relacionarían las varianzas?

14.− Pérez Suárez, Análisis de datos económicos II, ejer 2.3, pag 103.

La publicidad de un casino anuncia que la esperanza de premio para sus jugadores es de 100.000 pesetas, con un riesgo   = 60.000.

- Obtener la probabilidad de que un jugador cualquiera obtenga un resultado entre 25.000 y 175.000 pesetas.
- ¿Cuál será la probabilidad de que un jugador se desvíe al menos 84.000 pesetas del gasto esperado?

15.− Peña y Romo, Introducción a la Estadística, ejercicio 15.3, pag 225.

En ocasiones algunas líneas aéreas venden más pasajes que los disponibles en un vuelo. Una compañía ha vendido 205 billetes que corresponden a un avión con 200 plazas. Sea X la variable aleatoria que expresa el número de viajeros que se presentan en el aeropuerto para viajar en el avión. La distribución de X es:

Xi	198	199	200	201	202	203	204	205
P(X = xi)	0.05	0.09	0.15	0.20	0.23	0.17	0.09	0.02

- Hallar la probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza.
- Obtener la probabilidad de que quede sin plaza alguno de los pasajeros que se presentan en el aeropuerto.
- Calcular el número esperado de viajeros que aparecen en el aeropuerto.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que está en lista de espera tenga sitio en el vuelo?.

16.− Un aforrador decide facer un investimento altamente especulativo, do cal sabe que o seu rendemento ten unha función de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} k(\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}-4) & \text{se } x \quad [-1,4] \\ 0 & no\ resto \end{cases}$$

(10·x é a porcentaxe que tivo como rendemento)

- ¿Cal é o valor de *k*?
- ¿Cal é a porcentaxe de gañancia esperada?.¿é representativo este valor?
- Se so pagan impostos polo investimento os que obteñen beneficio, ¿a partil de que percentil da distribución dos rendementos se comezará a pagar imposto?.
- Se a porcentaxe que deben pagar como imposto ven dado pola función: P=(x2/10). ¿Cal é a "porcentaxe que debe pagar en impostos" esperada?.

- ¿Cal é gañancia esperada despois de impostos?. (Só o plantexamento, non é necesario resolvelo).

17.− O dono dun pub decide organizar o seguinte xogo para atraer clientela: o cliente saca unha carta dunha baralla, se sae un as non paga a consumición que está tomando, se sae ouros pode tomar outra consumición gratis, se sae unha espada ten que tomar outra consumición pero pagándoa.

Un cliente que toma unha consumición de 500 pts xoga unha partida:

- ¿Cal é o custo medio esperado das consumicións que toma?.
- ¿Cal é o resultado modal do xogo, en custo das consumicións?.
- ¿Cal é o resultado mediano do xogo, en número de consumicións tomadas?.

18.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

- ¿Cal é o promedio de goles por partido?
- ¿Qué equipo ten máis variabilidade no número de goles que consigue: o local ou visitante?.
- Se tiveses que apostar por un resultado, ¿por cal o farías?

19.− Calcula, para a variable que ten a seguinte función de densidade:

$$f(x) = \begin{matrix} 0 & x<0 \\ 2x & 0 \quad x \quad 1 \\ 1 & 1<x \end{matrix}$$

- A esperanza da variable e a esperanza da seguinte función: g(x)=2x−1.
- A desviación típica e a varianza.
- A moda, a mediana, e o percentil 25.

Tema 5: CARACTERÍSTICAS DAS VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONAIS.

Def.:

Sexa g(x,y) unha función calquera e (,) unha variable aleatoria bidimensional. Deno minase **esperanza matemática** (ou valor esperado ou media) de g(,) á seguinte expresión:

$$E(g(\xi,\eta)) = \begin{matrix} {}_{\forall i}\;{}_{\forall j}\; g(x_i, y_j)\, P(\xi = x_i ; \eta = y_j) & \text{se}\,\xi \quad \text{unha variable aleatoria discreta} \\ g(u,v)\, f(u,v)\, dv\, du & \text{se}\,\xi \quad \text{unha variable aleatoria continua} \end{matrix}$$

CASOS PARTICULARES DE INTERESE.

- <u>Momentos ordinarios</u> (ou respecto da orixe)

O *momento ordinario de orde r,s,* obtense considerando g(x,y)=xr·ys:

$$E\,\xi^r\eta^s = \alpha_{rs} = \begin{cases} \sum_{\forall i}\sum_{\forall j} x_i^{\,r}\, y_j^{\,s}\, P(\xi = x_i;\eta = y_j) & \text{se } \xi,\eta \text{ son v.a. discretas} \\ \int\int u^r\, v^s\, f(u,v)\, dv\, du & \text{se } \xi,\eta \text{ son v.a. continuas} \end{cases}$$

Casos particulares deste tipo de momentos son as esperanzas marxinais.

(,) variable aleatoria bidimensional ! È=E[ ], Á=E[ ]

Propiedades:

− (r=0, caso continuo) $\alpha_{r0} = \int\int u^r\, v^0\, f(u,v)\, dv\, du = \int u^r\, f_1(u)\, du$

(é semellante para s=0)

- <u>Momentos centrais</u> (ou respecto do valor esperado)

O *momento central de orde r,s* obtense con g(x,y)=(x−È)r·(y−Á)s:

$$E\left((\xi-\alpha_{10})^r\,(\eta-\alpha_{01})^s\right) = \mu_{rs} = \begin{cases} \sum_{\forall i}\sum_{\forall j} (x_i-\alpha_{10})^r\,(y_j-\alpha_{01})^s\, P(\xi = x_i;\eta = y_j) & \text{se } \xi,\eta \text{ v.a. discretas} \\ \int\int (u-\alpha_{10})^r\,(v-\alpha_{01})^s\, f(u,v)\, dv\, du & \text{se } \xi,\eta \text{ v.a. continuas} \end{cases}$$

Propiedades:

− r=0, caso continuo: $\mu_{r0} = \int\int (u-\alpha_{10})^r\,(v-\alpha_{01})^0\, f(u,v)\, dv\, du = \int (u-\alpha_{10})^r\, f_1(u)\, du$

(é semellante para s=0)

Covarianza:

É o **momento central de orde 1,1**:

$$\sigma_{\xi\eta} = \mu_{11} = \begin{cases} \sum_{\forall i}\sum_{\forall j} (x_i-\alpha_{10})\,(y_j-\alpha_{01})\, P(\xi = x_i;\eta = y_j) & \text{se } \xi,\eta \text{ v.a. discretas} \\ \int\int (u-\alpha_{10})\,(v-\alpha_{01})\, f(u,v)\, dv\, du & \text{se } \xi,\eta \text{ v.a. continuas} \end{cases}$$

A covarianza mide o grao de relación liñal entre dúas variables.

Propiedades:

- Á covarianza non lle afectan os cambios de orixe. Se se definen dúas novas variables ' = + a; ' = + b, a,b" R, a súa covarianza vai ser: ' ' =

- Á covarianza aféctanlle os cambios de escala. Se se definen dúas novas variables ' = a· ; ' = b· , a,b" R, a súa covarianza vai ser: ' ' = a·b·
- A fórmula da covarianza pode expresarse do xeito seguinte:

= É− È ·Á

PROPIEDADES XERAIS DAS ESPERANZAS

- Sexan h1 e h2 dúas funcións. Verifícase:

E[h1( )+h2( )] = E[h1( )] + E[h2( )]

- Se   e   son V. A. independentes entón verifícase:

E[h1( )·h2( )] = E[h1( )] · E[h2( )]

En particular cúmprese: rs= r0 · s; e como consecuencia:

- Se   e   son variables aleatorias independentes !   = 0

- Var(±) = Var( ) + Var( ) ± 2Cov(,).

En particular, se   e   son v.a. independentes !

! Var(±) = Var( ) + Var( )

ESPERANZA CONDICIONADA.

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional (,), definímo−la **es<u>peranza condicionada</u>** <u>d</u>e   para =y como:

$$E\,\xi/_{\eta=y} = \begin{cases} {}_{\forall i}\, x_i\, P\,\xi = x_i/_{\eta=y} & \text{se}\,\xi,\eta\ \text{son v.a. discretas} \\ {}_{-}\, u\, f(u/_{\eta=y})\, du & \text{se}\,\xi,\eta\ \text{son v.a. continuas} \end{cases}$$

A esperanza condicionada indícanos que valor podemos esperar dunha variable (neste caso) cando se coñece o valor da outra.

Propiedade.

− Se   e   son variables aleatorias independentes entón verifícase:

E[/] = E[ ] ; · E[/] = E[ ]

REGRESIÓN E CORRELACIÓN

Un importante problema que aparece cando se estudian variables aleatorias bidimensionais é o de obter para unha delas, (supoñamos que para), a mellor representación posible en términos da outra, a traves dunha función *=h( ).

As curvas que nos aproximan a forma da relación entre as variables denomínanse curvas ou **funcións de regresión**.

Unha posibilidade de obter esas funcións é coñecendo as esperanzas condicionadas:

A curva x*= h(y) = E[/ =y] sería a regresión de sobre .

A curva y*= h'(x) = E[/ =x] sería a regresión de sobre .

A regresión obtida por este método denomínase **regresión de tipo I**.

Def.:

Dada unha variable aleatoria bidimensional (,), defínese o seu **coeficiente de correlación liñal** como:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}}$$

Este coeficiente emprégase para medi−lo grao de relación liñal existente entre as variables, i.e. en que medida unha liña recta pode explica−la relación entre as variables.

Propiedades.

− −1 " " 1

− Se e son variables aleatorias independentes entón verifícase: = 0

− Se e son variables aleatorias cunha relación perfecta entón: = 1 ou = −1, segundo a relación entre elas sexa directo ou inversa.

- Denomínase **coeficiente de determinación liñal**.

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Problemas de Estadística López de la Manzanara Barbero, J. Ediciones Pirámide, 1991 pág. 191.

Dada la variable (X,Y) cuya distribución de probabilidad conjunta viene definida por la función densidad conjunta:

f (x,y) = x + y para 0 < x < 1 0 < y < 1

- para cualquier otro valor de (x,y)

Determinar:

- La probabilidad del suceso (X " 0,5 ; Y " 0,2).
- Si son o no estocásticamente independientes las variables X e Y.
- La regresión de Y sobre X.
- El coeficiente de correlación.

2.− Problemas de Estadística Ruiz−Maya, L. Editorial AC, 1989 pág. 153

Consideremos la variable aleatoria discreta con la siguiente distribución de probabilidad bidimensional (las probabilidades aparecen multiplicadas por 100).

Y

4 8 6 1 5 1

3 5 4 9 10 3

2 1 2 8 15 4

1 2 3 7 2 4

X

10 11 12 13 14

Calcúlese:

- E (X).
- E (Y).
- E (Y/ X = 11).
- V (Y/ X = 11).
- E (X/ Y < 3).
- E (Y2/ 11< X " 13).

3.− Problemas de Estadística Ruiz−Maya, L. Editorial AC, 1989 pág. 155

Dada la variable bidimensional discreta (X; Y), con la siguiente función de cuantía:

Y

1,5 0,1 0,3 0,2

0,5 0,2 0,1 0,1

1 2 3 X

Calcúlese el coeficiente de correlación lineal de las variables X e Y.

4.− Problemas de Estadística Ruiz−Maya, L. Editorial AC, 1989 pág. 163

En una variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y), la variable X toma los valores 1, 2, 3, 4 y 5, y la Y los valores 1, 2 ,3 y 4, con las frecuencias absolutas que figuran en la tabla siguiente:

Y

4 5 6 7 8 9

3 4 5 6 7 8

2 3 4 5 6 7

1 2 3 4 5 6

X

1 2 3 4 5

Calcúlese la regresión de Y con respecto a X y la de X con respecto a Y.

5.− Fernandez−Abascal, Ejercicios de Calculo de Probabilidades, ejer 6.12, pag 279.

Se realiza un estudio sobre la condición de los trabajadores de un sector del pequeño comercio. Siendo X el número de trabajadores por establecimiento e Y el número de los que no pertenecen a la familia propietaria del mismo, se ha obtenido la siguiente función de probabilidad conjunta:

X Y	0	1	2
1	2/9	1/9	0
2	1/9	2/9	0
3	0	1/9	2/9

- Hállese la regresión de tipo I.
- Calcúlese la función de distribución del número de trabajadores que pertenecen a la familia propietaria.
- Si un establecimiento cuenta a lo sumo con dos trabajadores, ¿cuál será el número esperado de los que pertenecen a la familia?

6.− Fernandez−Abascal, Ejercicios de Calculo de Probabilidades, ejer 6.13, pag 279.

Un estudio sociológico ha estimado que el número total de habitaciones, X, y el número de dormitorios, Y, de las viviendas de una gran ciudad, se distribuyen de acuerdo con la siguiente función de probabilidad:

X Y	1	2	3	4
1	0.05	0	0	0
2	0.10	0	0	0
3	0	0.35	0	0
4	0	0.10	0.35	0
5	0	0	0.01	0.02
6	0	0	0	0.02

- Hállese la regresión de tipo I.
- Una vivienda tiene más de tres habitaciones, ¿cuál es el número esperado de dormitorios?

7.− Fernandez−Abascal, Ejercicios de Calculo de Probabilidades, ejer 6.16, pag 280, modificado.

Con objeto de llevar a cabo una campaña publicitaria de lanzamiento de una nueva marca de cereales para el desayuno, se realiza un estudio estadístico sobre los hábitos en el desayuno de las familias de una cierta ciudad. De este análisis se obtiene que la proporción de individuos que toman leche en una familia, X, y la de los que toman cualquier tipo de infusión, Y, responden a la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = k(2x+y) \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$$

- ¿Cuál es la proporción esperada de consumidores de leche en una familia en la que el 70% de sus miembos toman infusiones?
- Si en una familia la mitad de sus individuos toman leche ¿Cuál es la proporción esperada de individuos que no toman ni infusiones ni leche, suponiendo que ningún individuo toma ambas bebidas?
- Calcula un intervalo para que la proporción de individuos que toman leche pertenezcan a él con una probabilidad de cómo mínimo el 60%.

8.− Adaptado de http://ltodi.est.ips.pt/probest/, máis exactamente de: http://ltodi.est.ips.pt/probest/seb/var−bidim/var_bidim.pdf

M1 e M2 son dúas máquinas que funcionan de forma independente. Sexan e , v.a. que representan respectivamente o número de avarías de M1 e M2 por día. Sábese que:

i. M1 nunca se avaría máis dunha vez ó día

ii. M2 avaríase como máximo 2 veces ó día

iii. A probabilidade de que M1 non se avaríe é 0.7

iv. A probabilidade de que M2 non se averíe é 0.5 e a de averiarse dúas veces é 0.3

- ¿Cal é o número de averías diarias esperadas para cada máquina? ¿e cantas se esperan cada día entre as dúas?
- ¿Cal esperaras que se avaríe menos días e cal esperaras que teña máis avarías?
- ¿Cal é a moda do número de máquinas avariada un día?
- ¿Cal é a moda do número de avarías que teñen nun día entre as dúas máquinas?
- Se reparar unha avaría en M1 vale 20 euros, e en M2 10 ¿cal é o gasto semanal esperado en avarías? ¿Con que cantidade semanal cubrirías o gasto en avarías o 95% das semanas?

9.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

- Un equipo paga a cada xogador 1000 euros de prima se gaña na casa e 5000 fora, e 2000 se empata fora. En función dos resultados da táboa ¿cal será o valor esperado da prima por partido?
- ¿Cal sería o resultado promedio para un equipo local que metese dous goles?¿e o máis probable?.
- Constrúe unha función que permita calcular o nº do goles esperado para o equipo visitante en función do numero de goles que meteu o equipo local.
- Tendo en conta a predición que a función anterior fai para os casos nos que o local mete 0, 1 ou 2 goles,¿cal das tres predicirá resultados máis cercanos ós reais.
- Constrúe unha función que permita calcular o nº do goles esperado para o equipo da casa en función do numero de goles que meteu o equipo visitante.

10.− Dúas variables e teñen a seguinte función de distribución conxunta: $f(x,y) = \begin{matrix} 1 & \text{se } 0 \quad x, y \quad 1 \\ 0 & \textit{no resto} \end{matrix}$

- Calcula E[+],E[·], Cov(,),Coeficiente de Correlación(,),.
- E[/ =0.5], E[/ <0.5]
- Regresión de tipo I de en función de , e de en función de .

11.− Un economista considera que as variables = "taxa de variación no número de turistas" e ="taxa de variación do PIB, teñen a seguinte función de densidade conxunta:

$$f(x,y) = \begin{matrix} k(x\,y+8) & \text{se } x \quad [-2,10], \quad y \quad [-1,4] \\ 0 & \textit{no resto} \end{matrix}$$

(en %)

- Cal é o valor de k.
- Constrúe a función de regresión de sobre ..
- Cantos turistas esperarías para unha taxa de variación do P.I.B do 2%.

Tema 6: PRINCIPAIS DISTRIBUCIÓNS DISCRETAS.

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Consideremos un experimento aleatorio que pode ter só dous resultados diferentes, denominados *Éxito* e *Fracaso*. A probabilidade de obter *Éxito* é un valor *p* (0"p"1), polo tanto a de obter *Fracaso* será *1−p = q*. Este tipo de experimento denomínase **proba de Bernoulli**. Neste contexto defínese unha variable aleatoria, =*número de Éxitos* que terá valor 1 se o resultado do experimento é *Exito* e 0 se é *Fracaso*. A distribución de probabilidade asociada a esta variable denomínase **Distribución de Bernoulli**, ou tamén, dado que vai ser un caso particular dun tipo de distribución máis xeral, Distibución Binomial(1,p).

− Función de cuantía: $P(\xi = x) = \begin{matrix} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se x} = 0,1 \\ 0 & \textit{no}\text{ resto} \end{matrix}$

− = E[ ] = *p*

− = Var( ) = *p·(1−p)*

− g(t) = E[et] = et·p+(1−p)

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL(n,p)

Se repetimos unha proba de Bernoulli *n veces*, de xeito que o resultado de cada proba sexa independente dos resultados das demais, a variable aleatoria = *número de Éxitos*, tomará agora algún valor enteiro entre 0 e *n* (entre ningún Éxito e todos Éxitos). Esta nova distribución denomínase **Binomial(n,p)**.

A distribución de Bernoulli será o caso particular cando n=1.

− Función de cuantía: $P(\xi = x) = \begin{matrix} \begin{matrix} n \\ x \end{matrix} \; p^x (1-p)^{n-x} & \text{se} \quad \text{x} = 0,1, \ldots \text{n} \\ 0 & \textit{no}\text{ resto dos casos} \end{matrix}$

− = E[ ] = n·*p*

− = Var( ) = n·*p·(1−p)*

− g(t) = E[et] = [et·p+(1−p)]n

Propiedade aditiva ou reproductiva da Binomial (n,p)

Sexan , ... k unha colección de variables aleatorias independentes con distribución Bi(ni, p). A variable = + ...+ k segue unha distribución Bi(n,p), sendo n= n1+...+ nk.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Se non tivésemos en conta o número de veces que se realiza o experimento, e nos limitásemos a contar o número de exitos ocorridos nun periodo de tempo dado, a variable *=número de Éxitos"* equivalería a *=número de ocorrencias durante o periodo*. A distribución de probabilidade asociada con este enfoque denomínase distribución de Poisson, a cal virá definida por un parámetro , que indica o **número de ocorrencias esperadas** durante unha unidade de tempo.

As características das realizacións nunha variable deste tipo son:

1: Só pode haber unha ocorrencias do suceso en cada intre, é imposible que ocorran dúas ó mesmo tempo.

2: A ocorrencia do suceso nun periodo determinado é independente da súa ocorrencia en periodos anteriores e posteriores.

3: A probabilidade de ocorrencia do suceso é a mesma en periodos da mesma lonxitude.

Para unha distribución de Poisson de parámetro (" R , >0):

− Función de cuantía:

$$P(\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & \text{se } x = 0,1,\ldots n \\ 0 & \textit{n}\text{o resto dos casos} \end{cases}$$

− = E[ ] =

− = Var( ) =

Propiedades.

− **Propiedade aditiva ou reproductiva da Poisson** ( )

Th:

Sexan , ... k unha colección de variables aleatorias independentes con distribución Po(i). A variable = + ...+ k segue unha distribución Po( ), sendo = +...+ k.

Th:

Sexan , ... k unha colección de variables aleatorias independentes. Se a variable aleatoria = + ...+ k segue unha distribución Po( ) as variables , , k tamén seguen unha distribución de Poisson.

− **A distribución de Poisson como límite da distribución binomial**.

Th.:

Sexa "Bi(n,p). Se para n = 1, 2, 3, ... a relación p= /n é certa para algunha constante >0 entón:

$$\lim_{\substack{n \\ p \quad 0}} p(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 1,2,.....$$

A distribución de Poisson danos unha boa aproximación á distribución binomial cando p é pequeno e n grande. Na práctica, a partir dos cales serie razoable facer esta aproximación varían segundo os autores, tendo en común a necesidade de que a probabilidade de éxito sexa moi pequena e o número de probas moi grande. Un posible criterio sería p<0.1, e =n·p " 5.

DISTRIBUCIÓN XEOMÉTRICA

Para o experimento aleatorio relacionado coas probas de Bernoulli podemos considerar outra variable =*número de probas realizadas antes de obter 1 Éxito* Esta variable vai dar lugar a unha distribución coñecida como Xeométrica.

− Función de cuantía: $$P(\eta = x) = \begin{cases} p\;(1-p)^{x-1} & \text{se } \; x = 1, .2, .3, ... \\ 0 & \textit{n}\text{o resto dos casos} \end{cases}$$

− = E[ ] = $\dfrac{1}{p}$

− = Var( ) = $\dfrac{1-p}{p^{2}}$

Propiedade.

- P("a+b/ "a) = P("b) (Esta distribución *non ten memoria*)

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA.

Considerando agora no experimento da proba de Bernoulli a variable =*número de experimentos necesarios para obter **k** Éxitos* obtense unha distribución Binomial Negativa (BN(k,p)). Unha distribución Xeométrica será o caso particular cando *k*=1.

− Función de cuantía: $$P(\eta = x) = \begin{cases} \dbinom{x-1}{k-1} p^{k}\,(1-p)^{x-k} & \text{se } \; x = k, k+1, .k+2, ... \\ 0 & \textit{n}\text{o resto dos casos} \end{cases}$$

− = E[ ] = k· $\dfrac{1}{p}$

- = Var( ) = k· $\frac{1-p}{p^2}$

Outro plantexamento que aparece con frecuencia para esta variable é considerala como = "*número de fallos ocorridos antes do k−éximo Éxito"*. A partir deste plantexamento a función de cuantía (probabilidade de obter r fracasos antes do k−ésimo Éxito) sería:

− Función de cuantía:

$$P(\gamma = r) = \begin{cases} \binom{k+r-1}{k-1} p^k (1-p)^r & \text{se } r = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \textit{no resto dos casos} \end{cases}$$

Obtida a partir da anterior sustituindo x=k+r.

Propiedade.

− **Propiedade aditiva ou reproductiva da BN(k,p**)

Sexan , ... n unha colección de variables aleatorias independentes con distribución BN(ki, p). A variable = + ...+ n segue unha distribución BN (k,p), sendo k= k1+...+ kn.

DISTRIBUCIÓN HIPERXEOMÉTRICA

A proba de Bernoulli, é un experimento que equivale a sacar bolas dunha urna, das cales *N·p* son negras e *N(1−p)* brancas, e facelo **con reemprazamento**, ou sexa: a bola volve a urna cada vez que realizámo−lo experimento. Deste xeito **cada realización é independente das demais**.

Imos introducir un cambio neste plantexamento, consistente en non devolve−la bola a urna cada vez que se realiza o experimente, isto é, **facelo <u>sen</u> reemprazamento**.

Se chamamos ***Éxito*** a *sacar bola negra*, e repetimos ***n*** veces o experimento, a variable =*contar número de Éxitos* vai seguir con este esquema unha distribución **<u>Hiperxeométrica</u>**.

− **Función de cuantía**:

$$P(\eta = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{se } x = \text{m x}\{0, n - (N - k)\}, \ldots, \text{m n}\{n, k\} \\ 0 & \textit{no resto dos casos} \end{cases}$$

Sendo **N** o número de bolas na urna;

n o número de bolas extraidas;

k=N·p o número de bolas negras na urna;

p= $\frac{k}{N}$

pbb. de éxito ó saca−la primeira bola.

P(=x) é a probabilidade do obter **x** bolas negras (Éxitos) sacando **n** bolas da urna.

− = E[ ] = n· $\frac{k}{N}$

= n·p

- = Var( ) = n· $\frac{k}{N}$

  .$\frac{N-k}{N}$

  = n·p·(1−p)

Propiedade.

− **A binomial como límite da distribución hiperxeométrica**.

A dtb. hiperxeométrica podería aproximarse por unha binomial para valores de N grandes e n pequenos en relación a el. Pódese tomar como criterio para esta aproximación p<0.1, N"100 e n·"0.1·N.

O motivo disto e que, nunha urna cun gran número de bolas, o feito de que non devolvamos as bolas extraidas apenas se nota mentres se saquen pocas.

BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas Casas Sánchez, J.M. y Santos Peñas, J. Ed Centro de Estudios Ramón Areces, 1996 pág.707.

El número medio de pinchazos en los neumáticos de cierto vehículo industrial es de 0,3 por cada 50.000 kilómetros (km) recorridos. Si el vehículo recorre 100.000 km, se pide:

- Probabilidad de que no haya tenido pinchazos.
- Probabilidad de que tenga menos de 3 pinchazos.
- Número de km recorridos para que la probabilidad de que no tenga pinchazos sea 0,4066.
- Número medio de pinchazos para los kilómetros recorridos en el apartado c).

2.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998 pág 188.

Tráfico pretende modificar la normativa de circulación de manera que un conductor pierda su permiso de conducir si recibe tres multas por exceso de velocidad. Cada vez que un conductor coge su coche, tiene una probabilidad igual a 0,001 de ser sancionado por exceso de velocidad.

- Calcule la probabilidad de que un conductor reciba su primera multa por exceso de velocidad la decimoquinta vez que coja su coche tras la aplicación de la nueva normativa.
- ¿Cuál es el número esperado de veces que cogerá el coche hasta que reciba la primera multa por exceso de velocidad?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor coja su coche al menos tres veces hasta que reciba la primera multa?. ¿Y la de que lo coja al menos tres veces antes de recibir su primera multa?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor pierda su permiso de conducir la novena vez que coge el coche?.

- Calcule el número esperado de veces que cogerá el coche un conductor hasta que le sea retirado el permiso de conducir y su desviación típica.
- Si un conductor ha salido ya tres veces con su coche y todavía no ha sido multado por exceso de velocidad, ¿cuál es la probabilidad de que conduzca al menos una vez más antes de recibir la primera multa?.

3.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998, pag 183.

Una cadena de televisión privada concede un crédito anual a las personas que deciden abonarse a su programación. Por experiencias anteriores se sabe que el 10% de las personas a las que se les concede el crédito no realizan finalmente el pago, ocasionando pérdidas a la compañía. En un período de promoción, y de manera independiente, han decidido abonarse a la programación de esta cadena 13 clientes; por cada uno de ellos, la compañía obtendrá un ingreso de 33.500 pesetas si el cliente realiza finalmente el pago, y unas pérdidas de 54.000 pesetas en caso de no realizarlo. Se pide calcular:

- Probabilidad de que al menos cinco personas no realicen el pago correspondiente
- probabilidad de que todas estas personas realicen su pago.
- Probabilidad de que realicen el pago más de cinco clientes, pero menos de once.
- Número de clientes que se espera que paguen y su varianza.
- Beneficio esperado que obtendrá la compañía con estos tres clientes.
- Si durante otra promoción han decido solicitar el crédito 243 clientes ¿cuál es la probabilidad de que entre ellos haya como mucho 12 que finalmente no paguen?

4.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998, pag 192.

Un proveedor de cerraduras para puertas blindadas envía las piezas en lotes de cien cerraduras a cincuenta fábricas independientes que se dedican a la producción y comercialización de tales puertas. Como consecuencia de fallos en el proceso de fabricación, el proveedor se encontró con una serie de cerraduras defectuosas, pero, para evitar las pérdidas que se producirían si retira estas piezas, decidió introducir cinco cerraduras defectuosas en cada uno de los lotes con la esperanza de que pasaran desapercibidas por los controles que sus clientes realizan para asegurar la calidad de los materiales que reciben. Estos controles de calidad consisten en seleccionar dos cerraduras al azar de cada lote: si ninguna de ellas presenta defectos, entonces el lote será aceptado por la fábrica, y en caso contrario será devuelto al proveedor.

- Calcula la probabilidad de que un determinado lote sea aceptado por la fábrica que lo ha recibido.
- Calcula la probabilidad de que en el control de calidad de un lote haya al menos una cerradura sin defecto.
- Calcula el número medio de cerraduras defectuosos que serán encontradas al realizar el control de calidad de un lote y su desviación típica−
- Si los cincuenta clientes del proveedor han recibido un lote de cerraduras en estas condiciones ¿cuál es la probabilidad de que lo devuelvan al menos 15? Obtén también el número medio de lotes que serán devueltos.
- Un cliente de este proveedor que sospecha la inclusión de cerraduras defectuosos en los lotes decide, para realizar una inspección más a fondo, seleccionar nueve cerraduras al azar y devolver el lote al proveedor si encuentra más de tres defectuosos. ¿cuál es la probabilidad de que este cliente no devuelva el lote? Comparando con el control de calidad anterior, ¿cuál será más eficaz si se pretende rechazar este tipo de lotes que contienen cinco cerraduras defectuosos?

5.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998, pag 196.

En el teléfono de atención al cliente de un gran centro comercial se ha observado que se recibe un media de cuatro llamadas diarias en las que los clientes se quejan del servicio recibido en algún establecimiento del centro comercial.

- Calcula el porcentaje de días en los que no se recibe ninguna llamada de queja.
- Calcula la probabilidad de que un día se reciban entre tres y seis llamadas de queja.
- ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana, en la que el centro comercial está abierto de lunes a viernes, se reciban exactamente quince llamadas de queja? ¿cuál será el número medio de llamadas de queja que se reciben a la semana?
- Calcula la probabilidad de que en una semana todos los días se reciba al menos una queja.
- Si en un año el centro comercial permanece abierto durante 360 días, calcula la probabilidad de que este año reciban menos de 1.500 llamadas de queja.

6.−Ejercicios del calculo de probabilidades, Fernández Abascal, ejerc 8.36, pag 372.

Se tiene cierta información sobre un equipo de baloncesto:

- sabemos que, según se deduce de los partidos de liga que se han disputado hasta el momento, un determinado jugador tiene aproximadamente un 80% de aciertos en tiros libres. Descríbese este hecho mediante una variable aleatoria.
- El citado jugador realiza una serie de 5 tiros libres, ¿cuál es la probabilidad de que enceste al menos dos?
- Este jugador tiene una media de un enceste por temporada desde una distancia de diez metros. Suponiendo que el número de canastas en lanzamientos de este tipo sigue una distribución de Poisson ¿cuál es la probabilidad de que haga dos encestes desde dicha distancia en la próxima temporada?
- ¿Cuál es el número medio de fallos del jugador antes de conseguir el primer acierto en tiro libre?
- ¿Cuál es la probabilidad de que falle 5 canastas antes de conseguir 7 puntos?
- El equipo de baloncesto cuenta con una plantilla de 8 jugadores para jugar en el puesto de alero, de los cuales 2 son extranjeros. El entrenador selecciona al azar dos de ellos para formar parte del cinco inicial ¿cuál es la probabilidad de que uno sea extranjero?
- El entrenador del equipo opina que sus jugadores A, B, y C tienen aptitudes muy similares para formar parte del quinteto titular en la posición de base. Por ello, ha determinado que jueguen el mismo número de minutos en cada encuentro. Se sabe que el 30% de las canastas de dos puntos logradas entre los tres en un partido corresponden al jugador A, mientras que B y C consiguen el 30 y 40% respectivamente. Calcúlese la probabilidad de que en un partido con un total de 9 encestes de dos puntos para los tres jugadores, A haya conseguido dos, B tres y C cuatro.

7.− Una empleada de una empresa de telemarketing dispone de un listado de clientes potenciales de un determinado producto. Si la probabilidad de que dicha empleada realice un venta en cada llamada telefónica es del 10% calcular:

- Probabilidad de que en 10 llamadas realice 3 ventas.
- Probabilidad de que tenga que hacer 4 llamadas para realizar la primera venta.
- Probabilidad de que tenga que hacer 15 llamadas para hacer la tercera venta.

8.− El Deportivo de La Coruña va a jugar un torneo de 5 partidos frente al Inter de Milán. Se estima que en cada partido la probabilidad de que gane el Deportivo es 0.6. Los resultados de los partidos son independientes y se juegan todos; calcular:

- La probabilidad de que el Deportivo gane los 5 partidos.
- Antes de comenzar el torneo, ¿cuál es el número esperado de partidos que ganará el Inter?
- Si el torneo lo gana el equipo que haya ganado un mayor número de partidos ¿cuál es la probabilidad de que lo gane el Deportivo?
- Si el Deportivo gana 2 de los 4 primeros partidos ¿cuál es la probabilidad de que el torneo lo gane el Inter?

9.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998, pag 252.

Un organismo oficial pretende realizar auditorías en las empresas con sede social en una determinada comunidad autónoma. Los informes de un instituto de estadística de la comunidad señalan que el 40% de estas empresas realizan operaciones de exportación, por lo que el grupo auditor decide utilizar personal especializado para investigar las empresas con esta característica.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo auditor encuentre la primera empresa que realiza operaciones de exportación en la séptima auditoría que hace?.
- Obtén la probabilidad de que la décima empresa auditada sea la cuarta encontrada que no realiza operaciones de exportación.
- Calcula la probabilidad de que, elegidas 12 empresas al azar, al menos cinco de ellas no realicen operaciones de exportación.
- Que probabilidad existe de que entre 50 empresas auditadas, como mucho 30 de ellas realicen operaciones de exportación.
- De las 10 empresas situadas en un municipio de esta comunidad, 3 realizan operaciones de exportación. Si se decide elegir aleatoriamente 5 empresas de este municipio para ser auditadas, cual será la probabilidad de que más de una de las seleccionadas tenga que ser investigada por el personal especializado.

10.− Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas Casas Sánchez, J.M. y Santos Peñas, J. Ed Centro de Estudios Ramón Areces, 1996 pág.705.

Una empresa constructora tiene comprometida la realización de 9 proyectos de los que 5 son de edificios de pisos. Si el próximo mes debe emprender la realización de 3 proyectos y su elección es al azar con probabilidades de elección iguales para cada proyecto, se pide:

- La distribución del número de edificios de pisos que se empiecen a construir el próximo mes.
- Número esperado de edificios de pisos que previsiblemente se inicie su construcción el próximo mes.

11.− Cálculo de Probabilidades Baró Llinás, J. Ed Parramón, 1987 pág. 151.

Doscientos cuarenta de los trescientos mil coches matriculados en una provincia son de determinada marca. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de quinientos coches:

- no haya ninguno de aquella marca;
- menos de dos sean de aquella marca?.

12.− A probabilidade de que haxa unha crise económica nun país é a seguinte:

Se hai crise un ano, a probabilidade de que o seguinte tamén a haxa é 0.4. Se non hai crise un ano, a probabilidade de que o seguinte tampouco a haxa é 0.8. ¿Podes aplicar aquí unha distribución Binomial?

13.− Nunha oposición, na que entran 20 temas, selecciónanse aleatoriamente catro deles, dos que o opositor debe expoñer tres.

- Preparando 15 temas, ¿cal é a probabilidade de que teña preparados tres dos que lle sairon en sorteo?
- ¿Cantos temas debe preparar para que a probabilidade de que teña preparados tres dos temas que saíron no sorteo sexa superior ó 90%? (Con folla de cálculo é fácil)
- Contesta os apartados a) e b) se o sorteo extrae 2 temas aleatoriamente e só ten que expoñer 1.

14.− (Adaptado de http://ltodi.est.ips.pt/probest/, máis exactamente de: http://ltodi.est.ips.pt/probest/seb/var−bidim/var_bidim.pdf)

M1 é unha máquina da que se sabe que :

i. nunca se avaría máis dunha vez ó día

ii. A probabilidade de que non se avaríe é 0.7

iii. A probabilidade de que se avaríe un día é independente do que ocorra noutros días.

- Teñen unha reserva de catro pezas para reparar esa máquina, e a nova remesa chega dentro de 10 días. ¿Cal é a probabilidade de que se queden sen pezas para repara−la avaría?
- ¿Cal é a probabilidade de que aguante tres días sen avariarse?
- ¿Cal é a probabilidade de que tarden máis de 10 días en acabar as catro pezas de reposto?
- Se traballan 200 días ó ano ¿qué número de avarías anuais poden esperar?
- ¿Cal é o promedio de días seguidos que esperan estar sen avarias na máquina?

15.− Sexan: : "Nº de goles do equipo de casa"; e : "Nº de goles do equipo visitante". Se as proporcións dos resultados observados na táboa indicasen a probabilidade deses resultados:

\	0	1	2	3
0	4	3	2	2
1	3	4	5	1
2	5	2	1	2
3	2	2	0	0
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0

E se ademais podemos supoñer que:

- cada gol é independente de que se metan outros antes ou despois (sexa o equipo que sexa)
- a probabilidade de que nun minuto dado do partido se meta un gol é a mesma en calquera minuto do partido.

Tendo en conta as suposicións anteriores:

- ¿Cal é a probabilidade de que a primeira parte acabe 2−1?
- Se o visitante mete un gol no minuto 20 da primeira parte, e non volve a marcar, ¿cal é a probabilidade de que o local remonte?
- ¿e se non poñemos a restricción de que non volva a marcar? (FACER COA AXUDA DE FOLLA DE CÁLCULO, senon quizais sexa lioso)
- despois dese gol do visitante ¿cal será ese resultado máis probable? (FACER COA AXUDA DE FOLLA DE CÁLCULO, se non quizais sexa lioso)

Tema 7: PRINCIPAIS DISTRIBUCIÓNS CONTINUAS.

DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

Def.:

Unha variable aleatoria continua , segue unha distribución Uniforme no intervalo [a,b], [U(a,b)], se a súa función de densidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ se x } [a,b] \\ 0 \quad \textit{no} \text{ resto} \end{cases}$$

− = E[ ] = $\frac{a+b}{2}$

− = Var( ) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

− g(t) = E[et] = $\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

Unha característica desta distribución é que, a probabilidade de subintervalos diferentes de [a,b], pero coa mesma lonxitude, é a mesma.

Un caso particular moi empregado é a U(0,1). Esta distribución soe usarse para simulación por ordenador, cando se quere obter valores que simulen proceder dunha distribución específica. O proceso sería o seguinte:

Obtense un valor ***c***, dunha variable U(0,1) (i.e: obtense un número aleatorio entre 0 e 1, dandolle a mesma probabilidade a calquera punto dese intervalo); selecciónase un valor ***x*** tal que F(x) = ***c***; ; repítese o proceso o número necesario de veces como para ter unha mostra procedente dunha variable aleatoria con función de distribución F(x).

DISTRIBUCIÓN NORMAL(,)

Def.: Unha variable aleatoria continua , segue unha distribución Normal de parámetros , se a súa función de densidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$- \quad < x <$$

α constante

σ constante positiva

− E[ ] =

− Var( ) =

− g(t) = E[et] = $e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Para calcula−las probabilidades asociadas a esta distribución están tabulados os valores para a Normal estandar, N(0,1). As demais dtb. Normais podense calcular mediante a tipificación e comparación coa estandar.

Th.:

Sexa ~N(,). Se Z é a variable tipificada de , entón Z~N(0,1)

Propiedades.

− Propiedade "superaditiva" da Normal (,)

Sexan , ... k unha colección de variables aleatorias independentes con distribución N(i, i). A variable = a+b1· + ...+ bk· k segue unha distribución N(,), sendo =a+b1· + ...+ bk· k ; =
$\sqrt{b_1^2 \sigma_1^2 + \ldots + b_k^2 \sigma_k^2}$

- A representación gráfica da función de densidade dunha distribución normal é unha curva simétrica (con respecto ó eixe que pasa polo punto) e puntos de inflexión en − , + :

DISTRIBUCIÓNS DERIVADAS DA NORMAL.

- **Chi−Cadrado con *n* graos de liberdade.**

Caso particular: n=1.

Def.: Unha variable aleatoria continua , segue unha distribución Chi−Cadrado con 1 grao de liberdade (Ê) se a súa función de densidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$x > 0$

− E[ ] = 1

− Var( ) =2

Para calcula−las probabilidades asociadas a esta distribución é necesario empregar táboas, sen embargo tamén se pode aplicar a seguinte propiedade:

Th.: Sexa ~ N(0,1). A variable = segue unha distribución Ê .

Caso xeral:.

Def.: Unha variable aleatoria continua , segue unha distribución Chi−Cadrado con ***n*** graos de liberdade (n2) se a súa función de densidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$x>0$

− E[ ] = n

− Var( ) =2·n

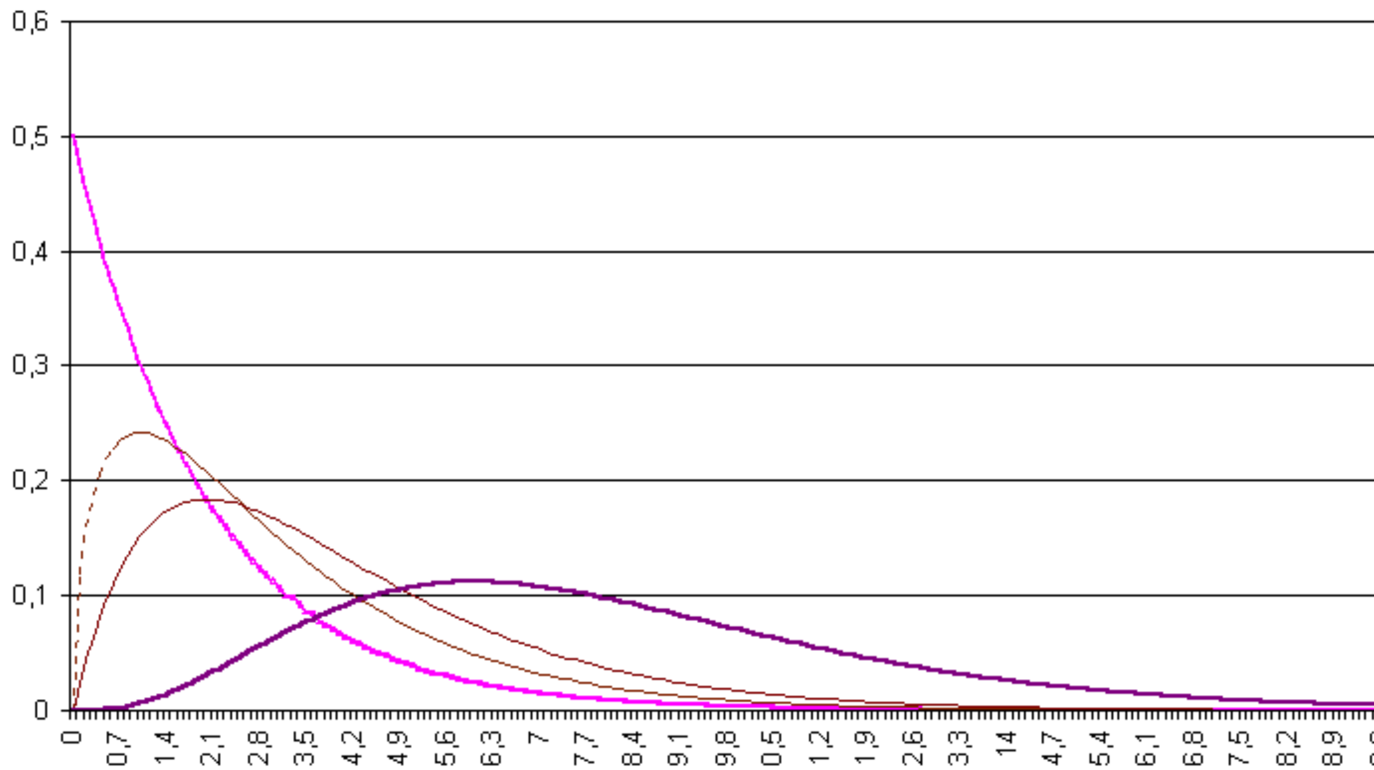
Para calcula−las probabilidades asociadas a esta distribución é necesario empregar táboas.

Th.: Sexan , ..., k unha colección de variables aleatorias independentes con distribución N(0,1). A variable = Ê+ ...+ k2 segue unha n2 .

− Propiedade: aditividade da n2

Sexan , ... k unha colección de variables aleatorias independentes con distribución $\chi^2_{n_i}$

. A variable = + ...+ k segue unha distribución n2 , sendo n=n1+ ...+ nk .



• **<u>Distribución</u> <u>*t* de STUDENT con</u> <u>*n* graos de liberdade.</u>**

Def.: Unha variable aleatoria continua , segue unha distribución *t* de STUDENT con ***n*** graos de liberdade (*t*n) se a súa función de densidade é:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- ⟨ x ⟨

− E[ ] = 0, n>1

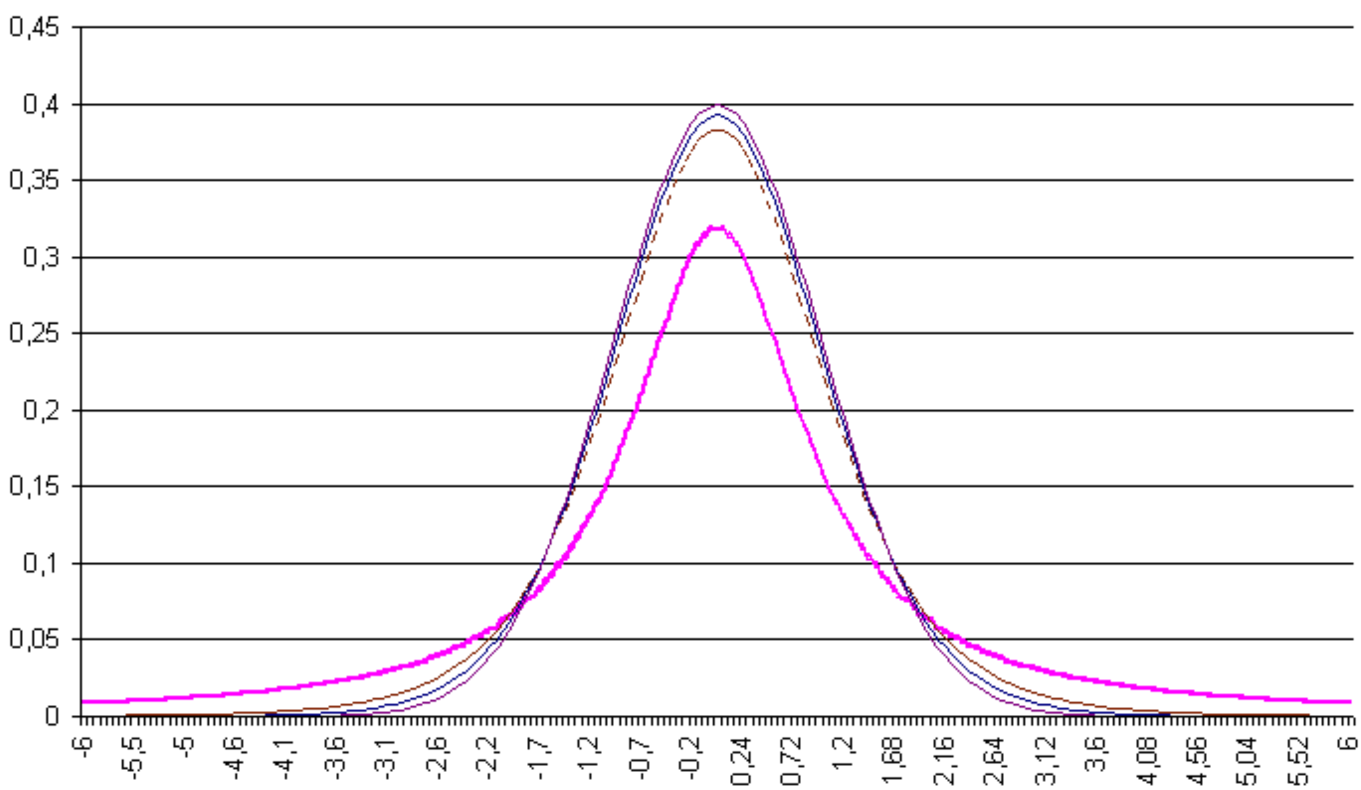
− Var( ) = $\frac{n}{(n-2)}$

Th.: Sexa ~ N(0,1), e ~ n2. A variable = $\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\gamma}{n}}}$

segue unha distribución *t*n.

Para calcula−las probabilidades asociadas a esta distribución é necesario empregar táboas.

−A representación gráfica da función de densidade desta distribución é simétrica con respecto a un eixe que pasa polo cero.



- **Distribución F de SNEDCOR con *m* e *n* graos de liberdade.**

Th.: Sexa ~ m2, e ~ n2. A variable = $\dfrac{\eta/_m}{\gamma/_n}$

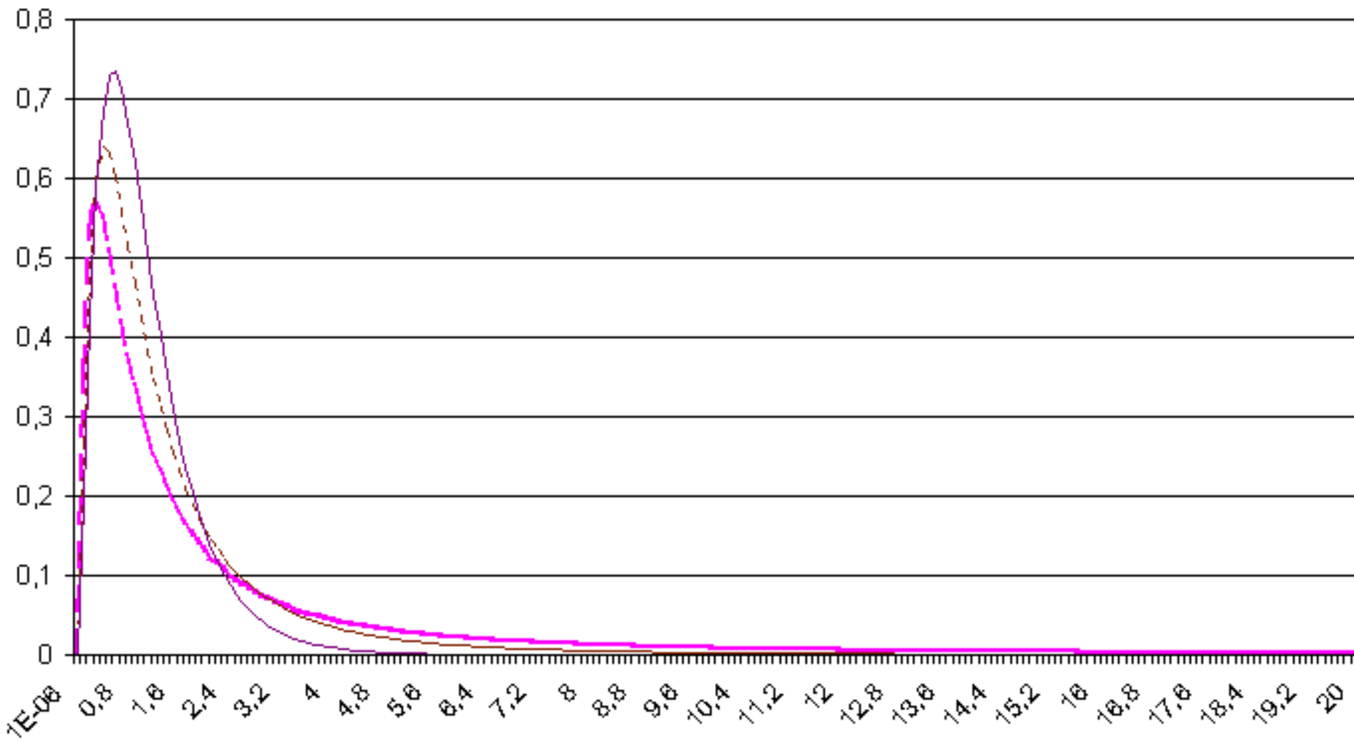
segue unha distribución F*m*,n.

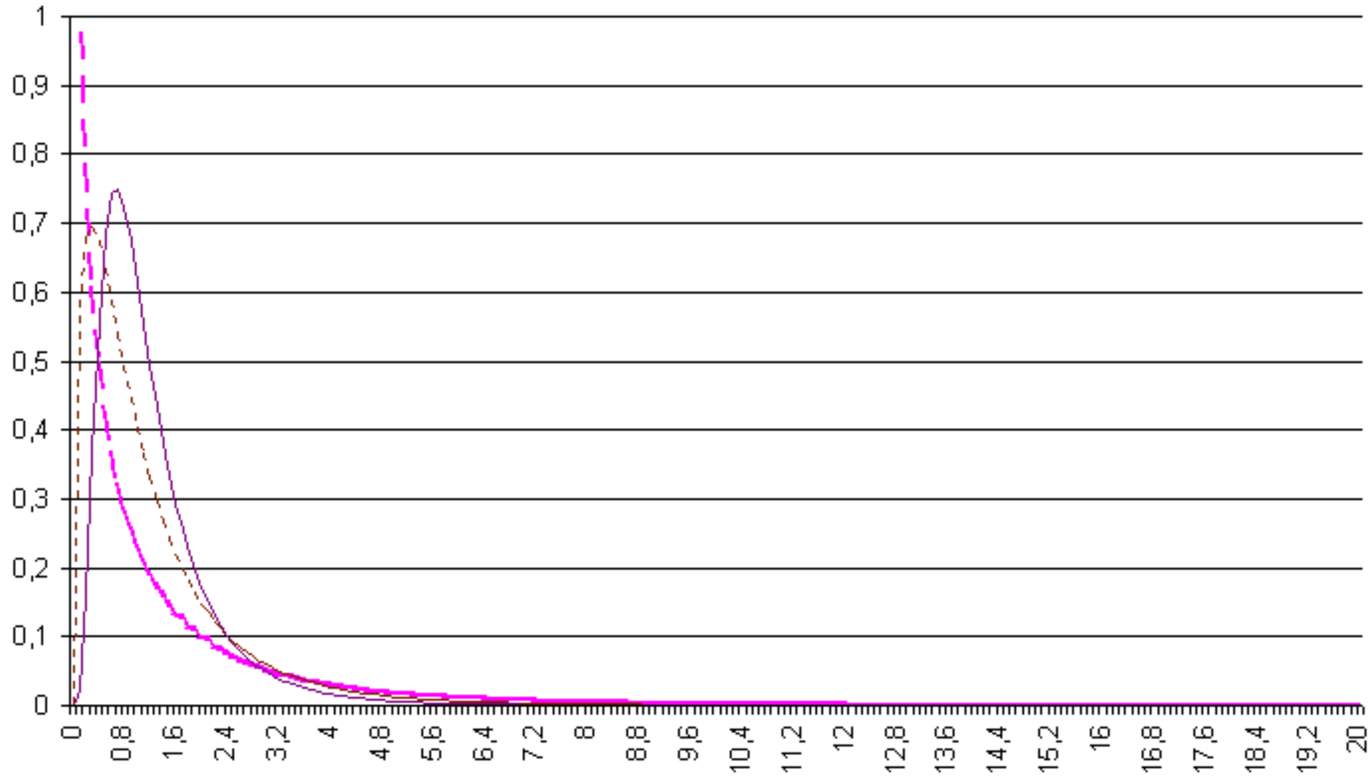
Th.: Sexa ~ Fm,n, . A variable = $\dfrac{1}{\xi}$

segue unha distribución Fn,m.

Th.: Sexa ~ *t*n. A variable = segue unha distribución F1,m.

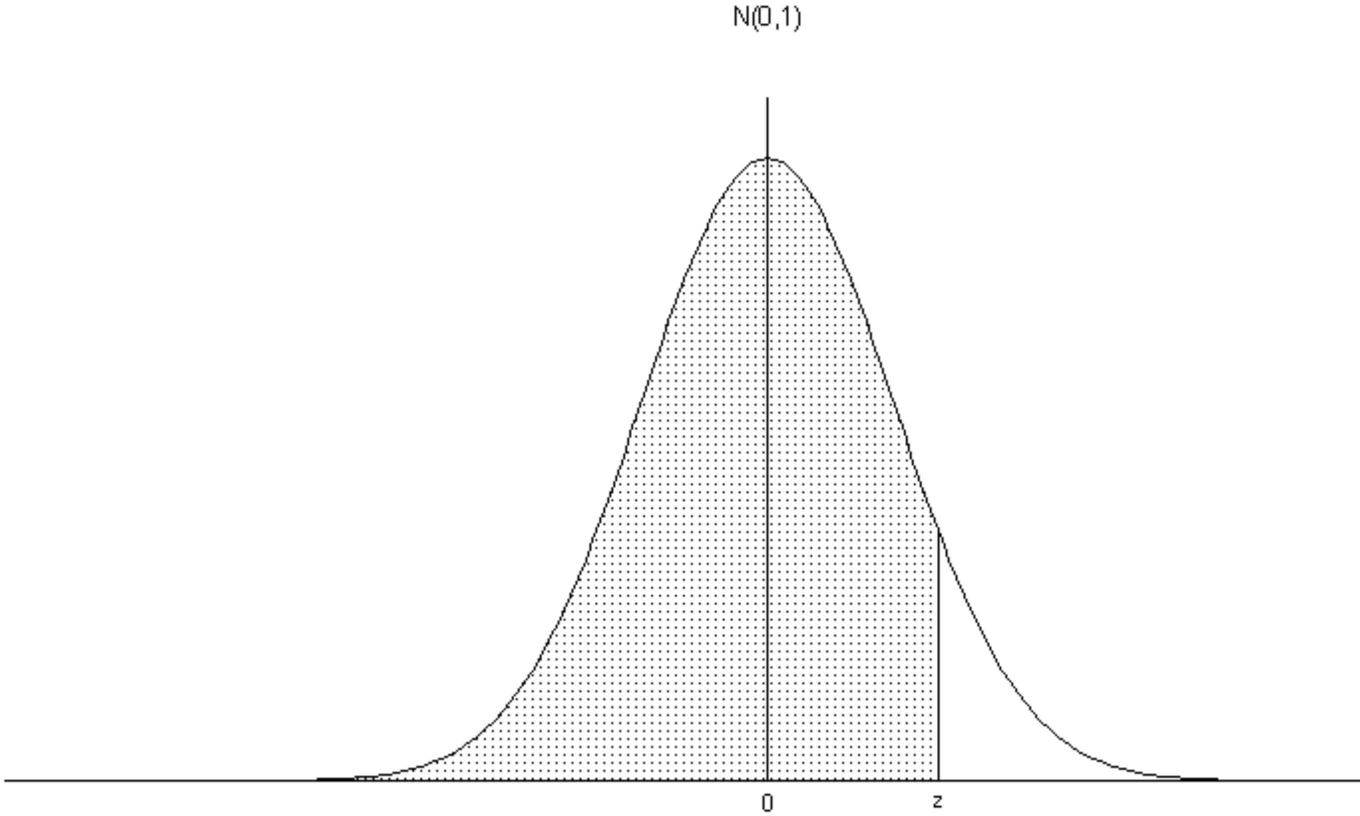
Para calcula−las probabilidades asociadas a esta distribución é necesario empregar táboas.





DISTRIBUCIÓN N(0,1)

FN(0,1)(z) = P[N(0,1)"z]

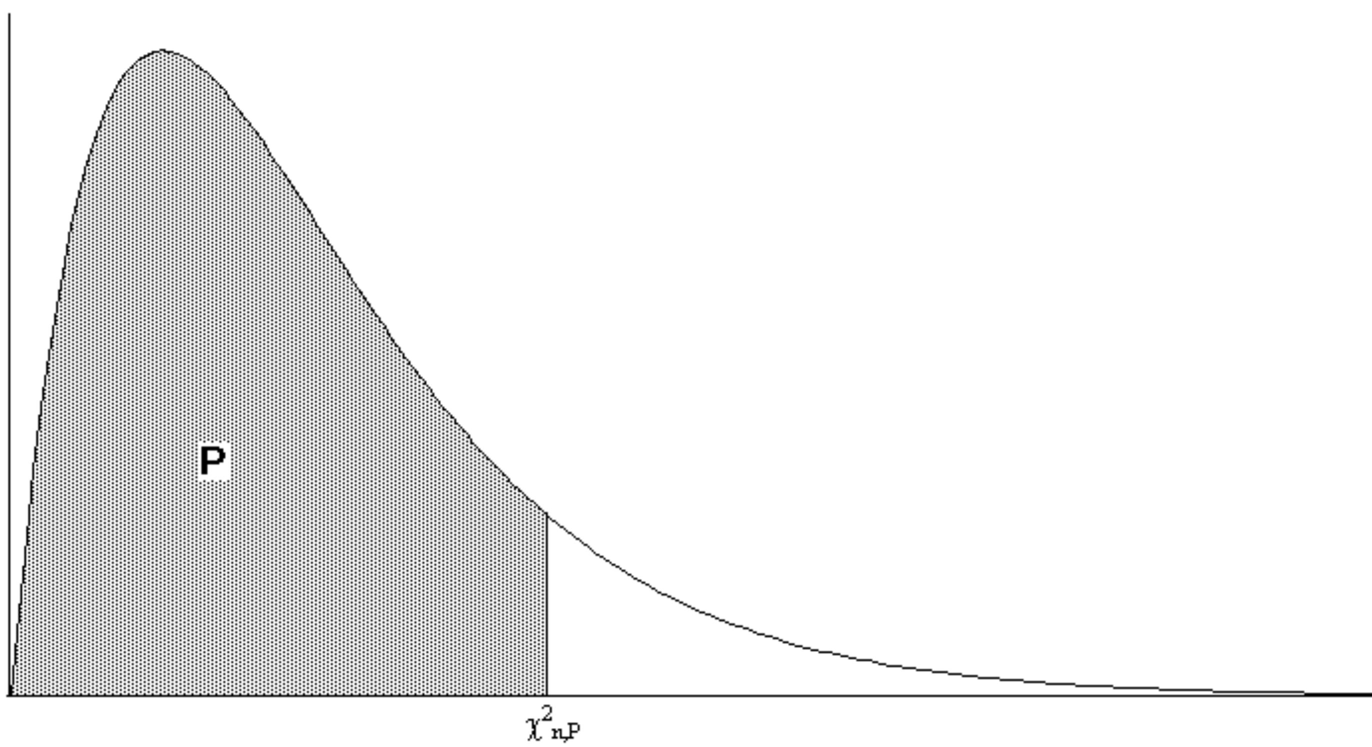


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

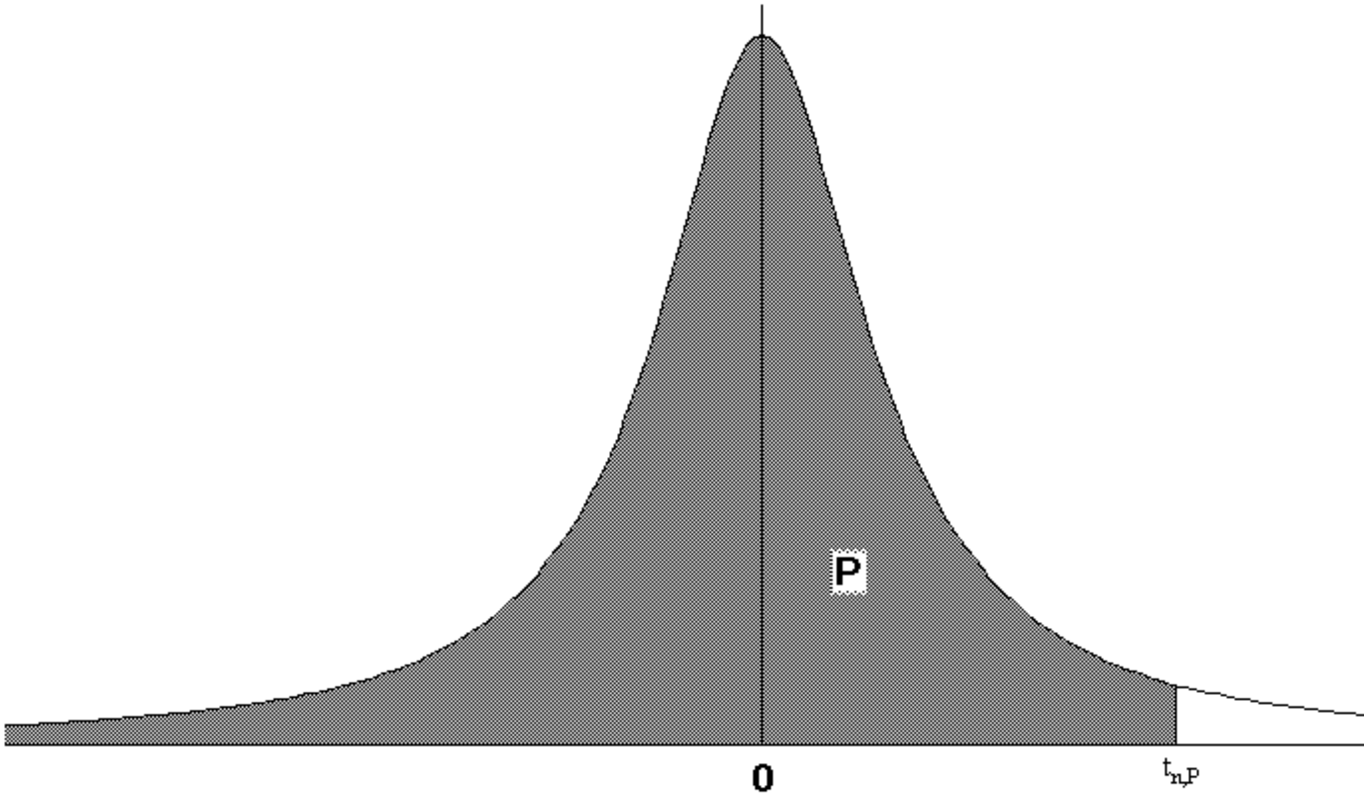
DISTRIBUCIÓN n2

F (n,P) = P[n2 " n,P]



DISTRIBUCIÓN tn

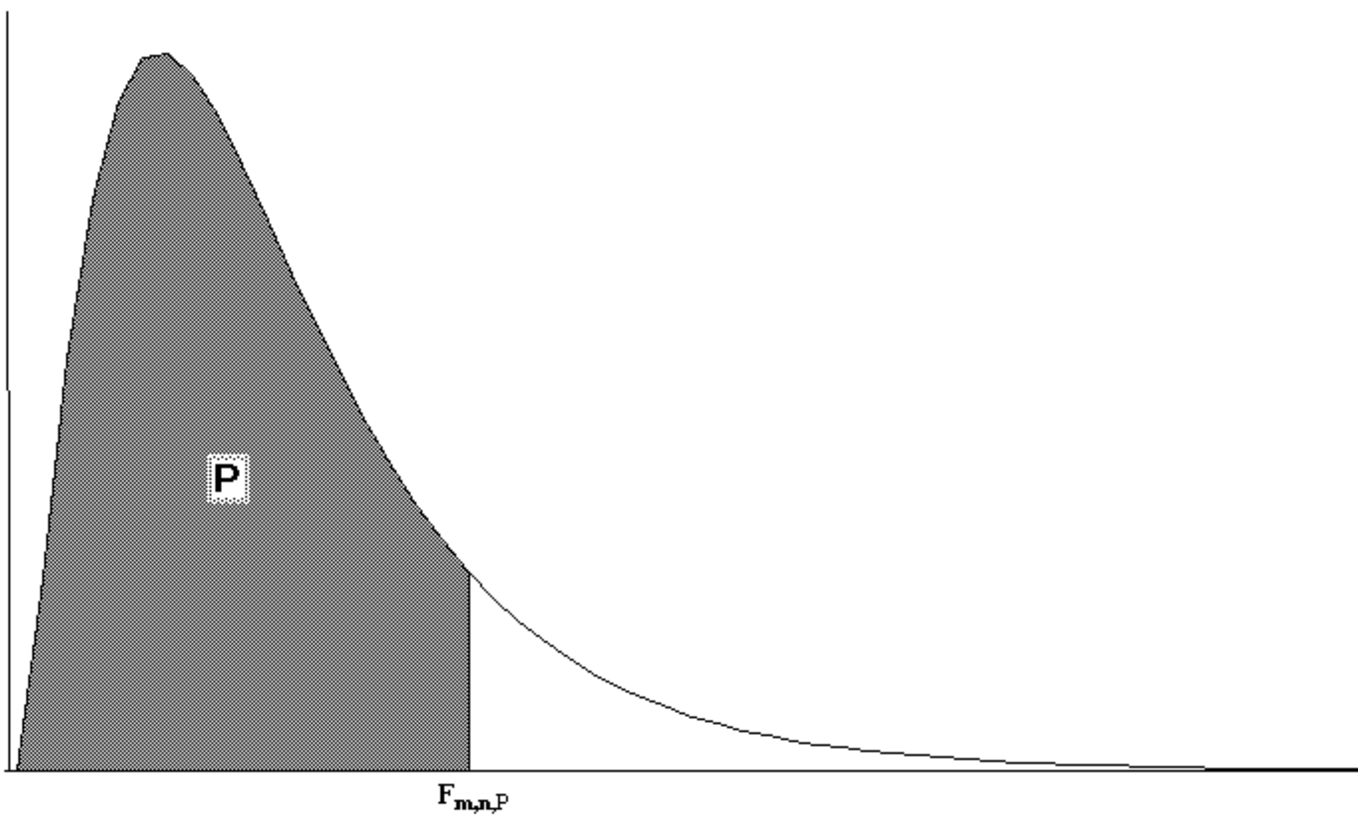
F (tn,P) = P[tn "tn,P]



n	tn,0.6	tn,0.75	tn,0.85	tn,0.9	tn,0.95	tn,0.975	tn,0.99	tn,0.995
1	0,3249	1,0000	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559
2	0,2887	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250
3	0,2767	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408
4	0,2707	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041
5	0,2672	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	0,2648	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	0,2632	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995
8	0,2619	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	0,2610	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	0,2602	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	0,2596	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	0,2590	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	0,2586	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	0,2582	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	0,2579	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467
16	0,2576	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	0,2573	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	0,2571	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	0,2569	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	0,2567	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453

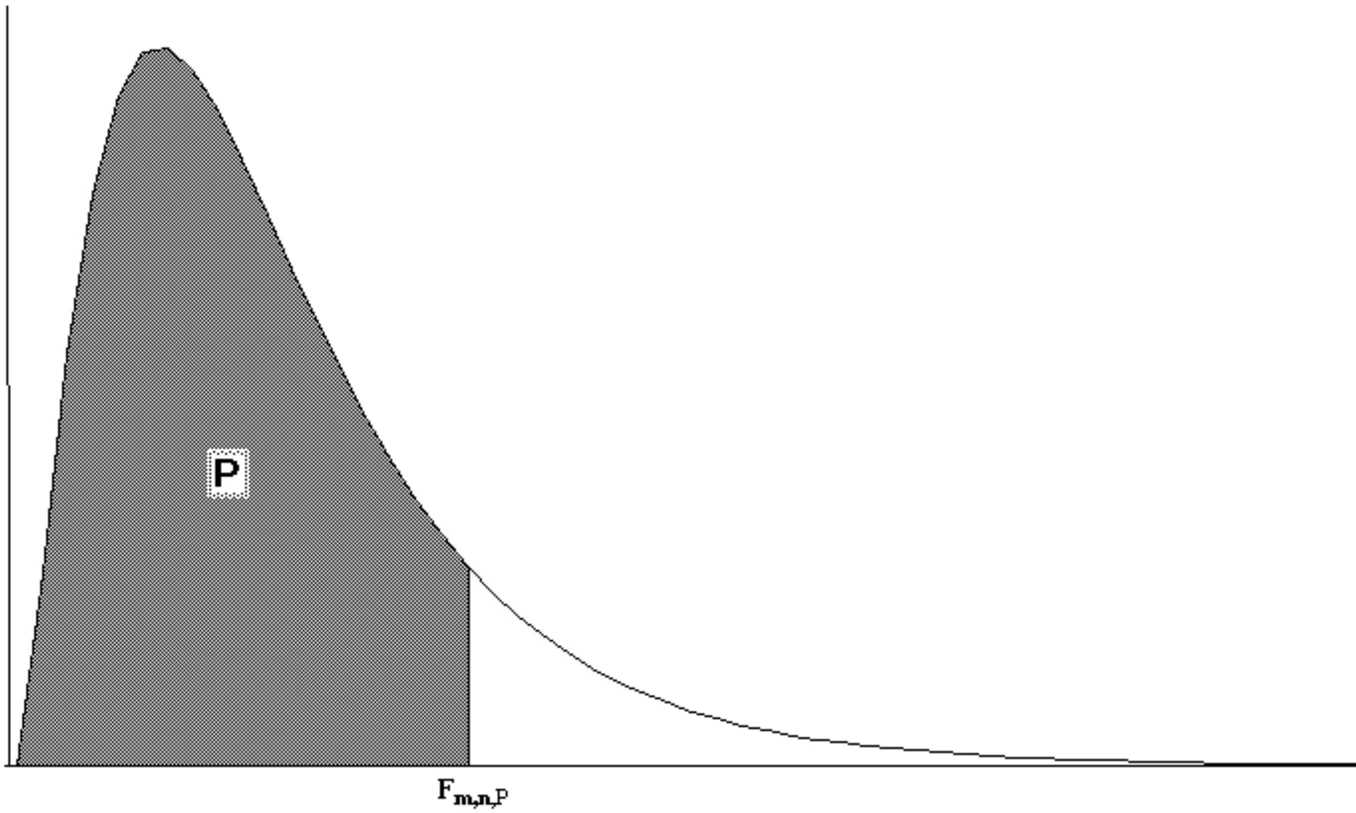
21	0,2566	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	0,2564	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	0,2563	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	0,2562	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970
25	0,2561	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	0,2560	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	0,2559	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	0,2558	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	0,2556	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
35	0,2553	0,6816	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238
40	0,2550	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,6794	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603
80	0,2542	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387
90	0,2541	0,6772	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316
100	0,2540	0,6770	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259
150	0,2538	0,6761	1,0400	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090
200	0,2537	0,6757	1,0391	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006
"	0,2533	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3264	2,5758

F (**Fm,n**,0.9) = P[**Fm,n** " [**Fm,n**,0.9]



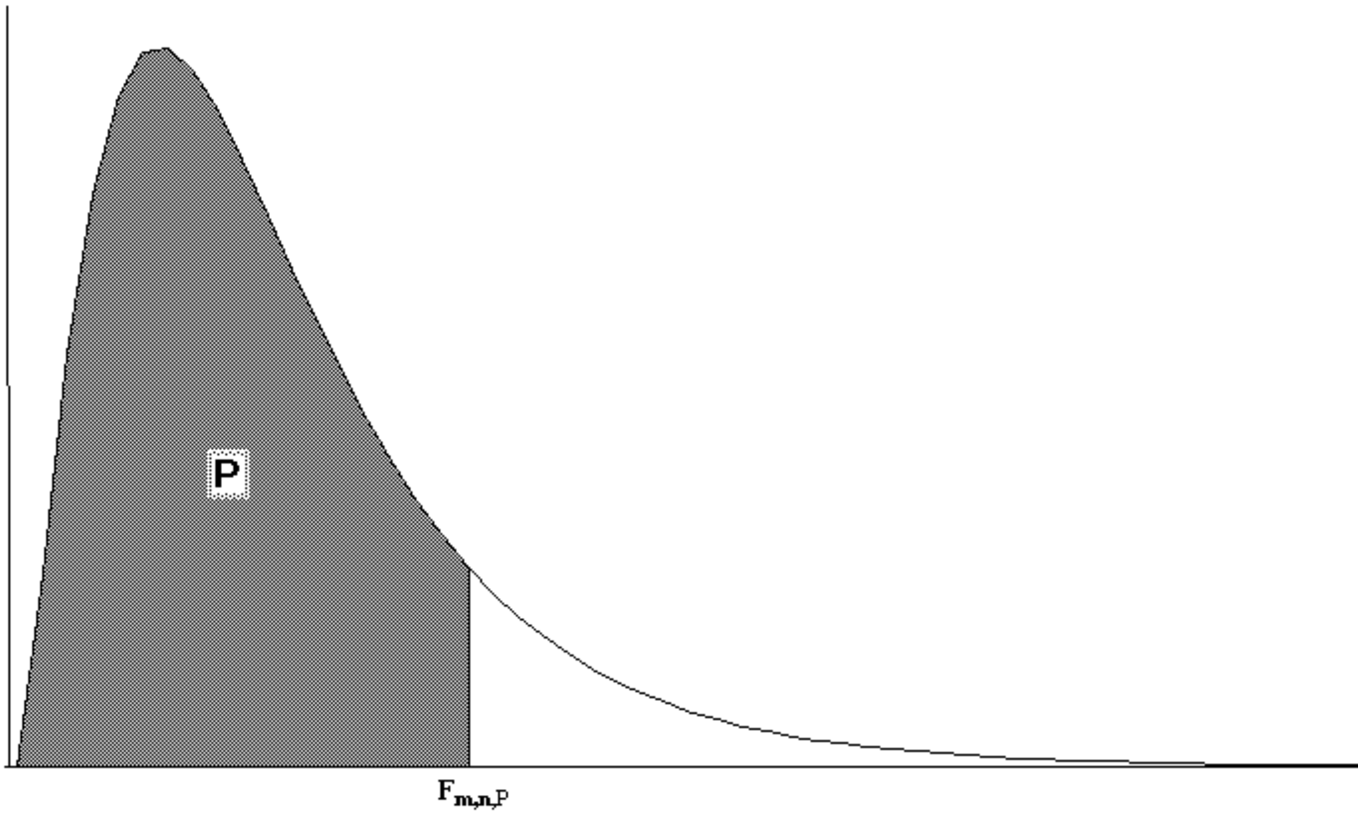
DISTRIBUCIÓN Fm,n

F (**Fm,n**,0.95) = P[**Fm,n** " [**Fm,n**,0.9]



DISTRIBUCIÓN Fm,n

F (**Fm,n**,0.99) = P[**Fm,n** " [**Fm,n**,0.99]



BOLETÍN DE EXERCICIOS

1.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998 pág 211.

La cotización de cierre diaria de un determinado tipo de acciones en la Bolsa de Madrid tiene una distribución uniforme entre las 2.000 y las 2.500 pesetas.

- Calcule la probabilidad de que un día la cotización de cierre supere las 2.300 pesetas.
- Calcule el porcentaje de días que presentaron una cotización de cierre entre 2.150 y 2.400 pesetas.
- Obtenga la cotización media de cierre y su desviación típica.
- Entre los días en los que la cotización de cierre ha sido superior a las 2.200 pesetas, ¿cuál es el porcentaje de los mismos en los que la cotización ha oscilado entre 2.300 y 2.400 pesetas?.

2.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998 pág 213.

En una determinada ciudad, la cuota por contribuyente del impuesto municipal de vehículos de tracción mecánica sigue una distribución normal con media 5.000 pesetas. El porcentaje de contribuyentes que pagan menos de 3.000 pesetas es del 15,87 %.

- ¿Qué porcentaje de contribuyentes paga una cuota comprendida entre las 2.000 y las 4.000 pesetas?.
- En la misma ciudad, la cuota por contribuyente del impuesto del servicio de recogida de basuras se distribuye también normalmente con media 5.000 pesetas y desviación típica 2.000 pesetas. Si las cuotas de cada impuesto son independientes:

b.1) ¿Qué distribución sigue la cuota total por contribuyente procedente de la suma de las cuotas de estos dos impuestos?.

b.2) ¿Qué porcentaje de contribuyentes pagan una cuota total superior a las 8.000 pesetas?.

3.−Estadística I: Probabilidad Martin Pliego, F.J. y Ruiz−Maya, L. Ed AC, 1995 pág. 452.

Sea una sucesión de 10 variables aleatorias independientes con la misma distribución N (0,3). Determínese:

a) P (W < 10) si $W = \sum_{i=1}^{10} X_i$

b) P (W > 84) si $W = \sum_{i=1}^{10} X_i^2$

c) P (| W | < 1,36) si $W = \dfrac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{4} X_i^2}}$

d) P (W > 11) si

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i^2}{\sum_{i=6}^{10} X_i^2}$$

4.− Las ventas mensuales de un determinado bien de equipo se distribuyen normalmente con una media de 50 unidades y una varianza de 100. Calcule:

- La probabilidad de que en un año, superen las 620 unidades vendidas.
- La probabilidad de que en un año, no se lleguen a vender 580 unidades.
- El beneficio esperado mensualmente si éste está relacionado con el número de unidades vendidas al mes (X) a través de la expresión: **B= 0,5 X − 14**. ¿Cuál será su dispersión?.

5.− Se sabe que el tiempo que invierten los ejecutivos de una empresa cada día en realizar tareas administrativas sigue una distribución normal de media 2.4 horas. También se ha observado que un 33% invierten más de 2.84 horas en hacer este tipo de tareas. Además el tiempo empleado en tareas burocráticas se distribuye N (1.5, 0.5). calcular:

- La probabilidad de que un ejecutivo invierta más de 3 horas en tareas administrativas.
- Para una muestra de 5 ejecutivos, ¿cual es la probabilidad de que al menos 2 inviertan más de 3 horas en tareas administrativas?.
- ¿Que porcentaje de ejecutivos emplea mas de 4 horas en ambas tareas, y más de 2 horas?

6.− Estadística I: Probabilidad Martin Pliego, F.J. y Ruiz−Maya, L. Ed AC, 1995 pag 448.

Las notas de una asignatura en un curso siguen una distribución normal de media 6.3 y desviación típica 2.5. Determina:

- Probabilidad de que un alumno suspenda la asignatura, se suspende con menos de 5 puntos.
- El número de alumnos que en un grupo de 100 alumnos obtendrá sobresaliente, se obtiene sobresaliente con 9 puntos o más.
- ¿Cuál será la nota a partir de la cual se aprueba, si suspende el 20% de los alumnos de ese curso?

7.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998 pág 209

Mañana Juan tiene que presentarse a una entrevista de trabajo y después quiere ir a comer con una amiga a un restaurante. Como no sabe exactamente cuánto tiempo durará la entrevista, le ha dicho a su amiga que llegará al restaurante entre las dos y media y las tres de la tarde.

- Calcula la probabilidad de que Juan llegue en cualquier momento a partir de las tres menos cuarto.
- Calcula la probabilidad de que llegue exactamente a las tres menos veinticinco.
- ¿A que hora debería esperar la amiga la llegada de Juan?.
- Si la amiga de Juan llega al restaurante a las dos y cuarto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que esté sola hasta la llegada de Juan sea inferior a 25 minutos?.
- Si la amiga ha llegado a las tres menos veinte y Juan todavía no estaba en el restaurante, calcula la probabilidad de que tenga que esperar al menos siete minutos.

8.− Problemas de Estadística Casas Sánchez, J.M. y otros Ed Pirámide, 1998 pág 215

Una tienda de artículos eléctricos para el hogar vende tres marcas diferentes de refrigeradores que son igualmente competitivos en cuanto a la relación calidad−precio. Sean X1, X2 y X3 variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas que representan el volumen mensual de ventas para cada una de las tres marcas. Si las medias de estas variables son, respectivamente 8, 15 y 12 millones de pesetas y sus desviaciones típicas 2, 5 y 3 millones de pesetas:

- Obtén la probabilidad de que, para un mes en particular, el volumen total de ventas para las tres marcas de refrigeradores sea mayor que 50.0000.000 de pesetas.
- Calcula la probabilidad de que, en un mes determinado, la suma de las ventas de la primera marca y la tercera superen a las ventas de la segunda en más de 5.500.000 pesetas.
- Si se consideran 20 tiendas independientes de artículos eléctricos y en cada una de ellas las ventas de refrigeradores de las segunda marca se distribuye normalmente con media 15.000.000 y desviación 5.000.000, ¿cuál es la probabilidad de que las ventas totales mensuales de refrigeradores de la segunda marca de las 20 tiendas oscile entre 250 y 300 millones de pesetas?.

9.− A cantidade de gasóleo vendida diariamente nunha estación de servicio segue unha distribución N(50,5) (en miles de litros)

- ¿Cal é a probabilidade de que se vendan nun día máis de 60 000 litros?
- A distribución da demanda os sabados segue unha N(20,3) e os domingos unha N(10,6). Ademais unha empresa de buses recolle tódalas semanas a mesma cantidade (1 000 litros). Dado que soen recibi−lo suministro unha vez á semana, ¿de que tamaño deben te−lo seu depósito para que a probabilidade de que se lles esgote o gasóleo sexa inferior ó 1%?

10.− Un estudiante chega tódolos días á parada de bus en calquera momento entre as 8 15' e 8 30'. Desa parada sae un bus ás 8 25', e a saída do seguinte distribuese uniformente entre as 8 30' e as 8 50' . Se tarda 10 minutos en entrar na clase desde que o bus sae desa parada e as clases comezan puntualmente ás 8 45':

- ¿Cal é a probabilidade de que chegue tarde un día calquera da semana?
- Nunha semana de cinco días ¿cal é a probabilidade de que non chegue nunca tarde a clase?
- ¿Cal é o tempo medio que tera que esperar para coller un bus?

11.− Sexan as variables ~ N(10,5), ~Õ, ~Ñ5. Calcula:

- P("5), P("15), P("12), P("−2), P("2), P(10" "12), P(11" "12), P(5" "12), P(5" "7) , P("a)=0.25, P("b)=0.75, P("c)=0.25, P("d)=0.75

- P("2.675), P("−15), P("14.34), P("−2), P("1.61), P(1.145" "6.63), P(5" "12), P(5" "7), P("a)=, P("−15), P("14.34), P("b)=0.75. En caso de que non atopedes os valores nas táboas podedes interpolar ou empregar un programa informático (tipo paquete estatístico ou folla de cálculo)

12.− Sexan as variables ~t10; ~F6,6; ~F3,12. Calcula:

- P("a)=0.75, P("b)=0.25, P("c)=0.99, P("d)=0.01, P("0.3),

P(−1.812" "1.372), P(1. 372" "1. 812), P(−1. 812" "−1. 372)

- P("3.05), P("−15), P("19.41), P("−2), P("4.28), P(1.145" "6.63), P(5" "7). En caso de que non atopedes os valores nas táboas podedes interpolar ou empregar un programa informático (tipo paquete estatístico ou folla de cálculo).

INTEGRAIS ELEMENTAIS

Estes son algúns tipos de integrais que deberedes saber resolver para face−los exercicios da asignatura:

$$(a + bx + cx^2 + mx^3 + kx^4)\,dx$$

$$(ax^{-1} + kx^{-2} + mx^{-3})\,dx$$

$$(a + be^{m} + ce^{-n})\,dx$$

INTEGRAIS DOBRES

Para o que é a asignatura Estatística Económica I, resolver unha integral doble vai ser equivalente a resolver dúas integrais simples consecutivas, nas cales, a variable dunha das integrais e constante para a outra e viceversa.

Un exemplo:

$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}(4xy+2)\,dy\,dx$$

Isto significa integrar a función en primeiro lugar para a variable *y* entre 0 e 2, e despois para a variable *x* entre 1 e 3.

$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}(4xy+2)\,dy\,dx = \int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{2}(4xy+2)\,dy\right)dx$$

Cando se integra respecto da variable *y*. A variable *x* considerase como un valor constante:

$$\int_{0}^{2}(4xy+2)\,dy = 2xy^2 + 2y\Big]_0^2 = (2x\,2^2 + 2\,2) - (2x\,0^2 + 2\,0) = 8x + 4$$

Ó acabar a integral respecto de *y*, non debe quedar rastro desta variable. Agora só falta integra−lo resultado respecto da variable *x*:

$$\int_1^3 (8x+4)dx = 4x^2 + 4x\Big]_1^3 = (4\,3^2 + 4\,3) - (4\,1^2 + 4\,1) = 40$$

Ó final: $\int_1^3 \int_0^2 (4xy+2)dydx = 40$

EN RESUMEN:

Para o que respecta ós exercicios da asignatura Estatística Económica I, facer unha integral dobre resúmese en realizar dúas integrais simples seguidas, mantendose como constante a variable que non se está integrando.

Outros exemplos:

$$\int_0^1 \int_0^2 xydydx = 2$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{12}{7} x(x+y)dydx = 1$$

1

B

A

Ω