

MOMENTO DE INERCIA

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a verificar cambios en su momento de rotación. Es la analogía rotacional de la masa. El momento de inercia depende de la distribución de la masa dentro del objeto respecto al eje de rotación. Cuanto más lejos está la masa del eje, mayor es el momento de inercia. Así, al contrario que la masa de un objeto, que es una propiedad del mismo objeto, su momento de inercia dependerá también de la localización del eje de rotación.

Si se suspende un cuerpo de un alambre, y se le gira un pequeño ángulo, θ , alrededor del eje de suspensión, la relación entre el momento angular, L , y el momento total de fuerzas aplicadas, τ , calculados respecto a un mismo punto de un sistema inercial, es:

$$\tau = dL / dt$$

y al dejarlo en libertad oscila con un movimiento armónico cuyo período viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{I / K}$$

donde T es el período de oscilación, I es el momento de inercia del sistema alrededor del eje de rotación, y K es la constante elástica del péndulo de torsión (es decir la relación entre el par recuperador y el desplazamiento angular).

En general, el momento angular no es paralelo al eje de rotación. Para cada cuerpo rígido existen tres ejes, perpendiculares entre sí, denominados *ejes principales de inercia*, para los que el momento angular sí es paralelo al eje de rotación. Estos ejes principales de inercia coinciden con los ejes de simetría del sólido, en el caso de que existan (Ej.: para una esfera homogénea, son ejes principales de inercia cualquier eje que pase por el centro). En nuestro caso, la velocidad angular tiene el sentido de un eje de inercia principal, de forma que el momento angular sólo tiene componente en esa dirección. En este caso, y dentro de la validez de la ley de Hooke, el momento que actúa sobre el muelle se puede expresar como:

$$\tau = - K \theta$$

El momento de inercia respecto a un eje determinado de aquellos sistemas formados por partículas discretas puede calcularse directamente mediante la ecuación:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para calcular el momento de inercia en sistemas continuos, utilizaremos la ecuación:

$$I = \int r^2 dm$$

Con frecuencia es posible simplificar el cálculo de los momentos de inercia de diversos cuerpos utilizando el llamado **teorema de los ejes paralelos**, que relaciona el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masas de un objeto, con el momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero. Sea I_{cm} el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa de un objeto de masa total M e I el correspondiente a un eje paralelo situado a la distancia h del primero. El teorema de los ejes paralelos establece que:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Algunos momentos de inercia de diversos objetos son los siguientes:

- Disco delgado de masa m y radio R respecto a su eje de revolución: **IDISCO** = $\frac{1}{2} m r^2$
- Cilindro hueco de masa m radios exterior e interior r_a y r_b respecto a su eje de revolución: **ICILINDRO HUECO** = $\frac{1}{2} M (r_a^2 + r_b^2)$
- Cilindro macizo de masa m y radio r respecto a su eje de revolución: **ICILINDRO MACIZA** = $\frac{1}{2} m L^2$
- Esfera maciza de masa m y radio r respecto a su eje de revolución: **IESFERA MACIZA** = $\frac{2}{5} m r^2$
- Varilla delgada de masa m longitud L respecto a su eje de revolución: **IVARILLA** = $\frac{1}{12} m L^2$
- Dos masas puntuales de masa m , cada una de ellas, situadas a una distancia a del eje de giro: **IDOS MASAS PUNTUALES** = $2 m a^2$

EXPERIMENTO

- Determinar la constante de recuperación angular (K). Para ello, hay que insertar la barrera en el eje. Mediante el dinamómetro hacer girar la barra 180º alrededor del eje, medir la fuerza. En este caso, el brazo de la palanca y el dinamómetro forman un ángulo de 90º. También hay que medir previamente la distancia d entre el punto de medición de la fuerza y el eje de giro. Hallar el momento, en valor absoluto, conocida la fuerza que actúa, F y el brazo de la palanca, d ($= F d$). Repetir la medida para 3 valores de ángulo de desviación diferentes (90º, 270º y 360º).

θ (radianes)	d (cm)	F (N)	θ (N cm)
$\theta \theta \theta$	23	0,3	6,9
	14	0,4	5,6
	25	0,28	7
θ	20	0,48	9,6
	12	0,7	8,4
	25	0,4	10
$\theta \theta \theta \theta$	26	0,5	13
	17	0,8	13,6
	11	1,2	13,2
$\theta \theta$	15	1,1	16,5
	26	0,7	18,2
	11	0,5	5,5

- Construir una gráfica con los valores de θ en ordenadas y de θ en abscisas. Para obtener la recta que

mejor se acomode a estos valores, ajustar por mínimos cuadrados las funciones θ y $\dot{\theta}$. Trazar la recta de acuerdo con este ajuste y, a partir del valor obtenido de la pendiente, calcular el valor correspondiente de la constante de torsión, K, de acuerdo con la ecuación $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

De la ecuación:

$$Y = 0.9027x + 3.4885$$

sale el valor de $K = 0.9027 \text{ N cm / rad}$

- Instalar sucesivamente sobre el péndulo de torsión los diferentes cuerpos. Medir el período de oscilación de cada uno de ellos, para ello adherir un diagrama. Colocar la barrera fotoeléctrica frente al diagrama, estando los cuerpos en reposo. En el contador de 4 décadas poner en puente los bornes Start-Stop (amarillo-amarillo y blanco-blanco). Medir cada vez un semiperíodo, tomar la media entre los valores de medición de los giros iniciados primero a la izquierda y luego a la derecha (para minimizar los errores experimentales, repetir cada medida 3 veces, promediando para encontrar el período).

OBJETO	T(s)	Tmedio(s)
Varilla $L = 0.59 \text{ m}$ $m = 0.1647 \text{ Kg}$ $I = 1/12 m L^2 = 4.778 \cdot 10^{-3} \text{ A}$	2.416 2.43 2.414	 2.42
Cilindro Macizo $r = 0.045 \text{ m}$ $m = 0.3652 \text{ Kg}$ $I = 1/2 m r^2 = 3.698 \cdot 10^{-4} \text{ A}$	0.752 0.76 0.692	 0.735
Cilindro Hueco $r_a =$ $r_b =$ $m = 0.3775 \text{ Kg}$ $I = 1/2 m (r_a^2 + r_b^2) =$	1.108 1.114 1.12	 1.105
Dos Masas Puntuales $a = 0.17 \text{ m}$ $m = 0.5865 \text{ Kg}$ $I = 2 m a^2 = 0.1021 \text{ A}$	5.758 5.252 5.51	 5.506
Disco	1.472	1.481

$r = 0.105 \text{ m}$	1.476	
$m = 0.2565 \text{ Kg}$	1.494	
$I = 1/2 m r^2 = 1.414 * 10^{-3} \text{ A}$		

- Comparar los valores obtenidos experimentalmente con los momentos de inercia teóricos obtenidos de las expresiones anteriores. ¿Encuentras alguna discrepancia? En caso afirmativo, explicar cual puede ser la razón.

A partir de la ecuación:

$$T = 2 \pi \sqrt{I / K}$$

se despeja I:

$$I = T^2 K / 2$$

Para la varilla, $T_{\text{medio}} = 2.42 \text{ s}$, por lo que $I = 0.8414 \text{ A}$.

Para el cilindro macizo, $T_{\text{medio}} = 0.735 \text{ s}$, por lo que $I = 0.0776 \text{ A}$.

Para el cilindro hueco, $T_{\text{medio}} = 1.105 \text{ s}$, por lo que $I = 0.1480 \text{ A}$.

Para las dos masas puntuales, $T_{\text{medio}} = 5.506 \text{ s}$, por lo que $I = 4.355 \text{ A}$.

Para el disco, $T_{\text{medio}} = 1.481 \text{ s}$, por lo que $I = 0.3151 \text{ A}$.

– 3 –