

RADICALES

Se llama raíz n -ésima de un número a , y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que elevado a n dé a .

Ejemplos:

$$\sqrt{196} = 14, \text{ porque } 14^2 = 196$$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ porque } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ porque } (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt[3]{81} = 3, \text{ porque } 3^3 = 81$$

$$\sqrt[5]{1024} = 4, \text{ porque } 4^5 = 1024$$

$$\sqrt[n]{a}$$

se llama radical; a , radicando; y n , índice de la raíz.

EXISTENCIA DE RADICALES.

Primera: si a es positivo, $\sqrt[n]{a}$ existe, cualquiera que sea n .

$$\sqrt{5}, \sqrt[4]{7}, \sqrt[5]{0,85} \text{ existen}$$

Segunda: si a es negativo, sólo existen sus raíces de índice impar.

$$\sqrt[3]{-8} \text{ existe}$$

$$\sqrt[6]{-0,85} \text{ no existe}$$

Tercera: salvo que a sea una potencia n -ésima de un número entero o fraccionario, $\sqrt[n]{a}$ es un número irracional. Sólo podremos obtener su expresión decimal aproximada.

FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

La raíz n -ésima de un número puede ponerse en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Esta nomenclatura es coherente con la definición.

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Es importante familiarizarse con la forma exponencial de los radicales, pues nos permitirá expresarlos y operar cómodamente con ellos.

$$\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Los radicales tienen una serie de propiedades, que debemos conocer y utilizar con soltura. Todas ellas son consecuencia inmediata de conocidas propiedades de las potencias. Veámoslas una a una, estudiando su significado en algunos ejemplos, y viendo sus aplicaciones.

Primera:

$$\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

Esta propiedad tiene dos importantes aplicaciones:

simplificar radicales tal y como se ha visto en los ejemplos anteriores;

conseguir que dos o más radicales tengan el mismo índice (reducir a índice común).

$$\sqrt[3]{103} = \sqrt[6]{103^2} = \sqrt[6]{10609}$$

$$\sqrt{22} = \sqrt[6]{22^3} = \sqrt[6]{10648}$$

Segunda:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{3x^2y} = \sqrt{3} \sqrt{x^2} \sqrt{y}$$

$$\sqrt[5]{32x} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x} = 2\sqrt[5]{x}$$

Esta propiedad tiene dos aplicaciones importantes:

sacar un factor fuera de la raíz;

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2 \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \sqrt{2}$$

de modo contrario, juntar varios radicales en uno solo.

$$\sqrt{15} \sqrt{20} = \sqrt{300}$$

Tercera:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{3}{x^3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{2}$$

Esta propiedad, junto con la primera y segunda, sirve para poner productos y cocientes de radicales bajo una sola raíz.

$$\frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Cuarta:

$$(\sqrt[n]{a})^p = (a^{1/n})^p = a^{(1/n)p} = (a^p)^{1/n} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplos:

$$(\sqrt{-5})^4 = \sqrt{(-5)^4} = 25$$

Quinta:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{(1/n)(1/m)} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}} = \sqrt[8]{5}$$

RADICALES SEMEJANTES

Dos radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y radicando.

Los radicales $\sqrt{3}$

y $5\sqrt{3}$

son semejantes. Tienen el mismo índice, 2, y el mismo radicando, 3.

$$\sqrt{8}$$

$$\text{y } \sqrt{2}$$

son semejantes. Esto se comprueba sacando factores del radical.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{y } \sqrt{75}$$

son semejantes. Esto se comprueba sacando factores del radical.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$$

Más ejemplos de radicales semejantes:

$$\sqrt{2} \text{ y } -5\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{3} \text{ y } \sqrt{27} \text{ ya que } \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

$$5\sqrt[3]{16} \text{ y } \sqrt[3]{128}$$

$$\text{ya que : } 5\sqrt[3]{16} \text{ y } 5\sqrt[3]{2^4} = 10\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 4\sqrt[3]{2}$$

OPERACIONES CON RADICALES

La suma o la resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o la resta de los coeficientes de los radicales sumados o restados.

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b+c)\sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

$$3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = (3+6)\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

Si los radicales no son semejantes, la suma se deja indicada.

Ejemplo:

$$2\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$$

El producto de radicales, con el mismo índice, es igual a otro radical cuyo coeficiente y radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y radicandos de los factores.

$$b\sqrt[n]{a} \cdot d\sqrt[n]{c} = b \cdot d \sqrt[n]{a \cdot c}$$

Ejemplo:

$$3\sqrt{5} : 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{\frac{15}{2}}$$

El cociente de dos radicales con el mismo índice, es igual a otro radical, cuyo coeficiente y radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y radicandos de los radicales dividendo y divisor.

$$\frac{b\sqrt[n]{a}}{d\sqrt[n]{c}} = \frac{b}{d}\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$$

Ejemplo:

$$8\sqrt{3} : 7\sqrt{5} = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

La potencia de un radical es igual a otro radical, cuyo coeficiente y radicando están elevados a dicha potencia.

$$(b\sqrt[n]{a})^m = b^m\sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$(2\sqrt{5})^3 = (2 \cdot 5^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 \cdot (5^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 2^3 \cdot (5^3)^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot \sqrt{5^3} = 8\sqrt{125}$$

Es importante observar que al elevar al cuadrado un radical de índice 2, se obtiene el radicando.

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$$

Ejemplo:

$$(\sqrt{5})^2 = (5^{\frac{1}{2}})^2 = 5^{\frac{2}{2}} = 5$$

EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Al efectuar cálculos con radicales pueden surgir expresiones fraccionarias en las que aparezcan radicales.

Estas expresiones no son números racionales, pues para ello el numerador y el denominador tendrían que ser números enteros.

A estas expresiones las llamaremos expresiones fraccionarias, y verifican las mismas propiedades que los números racionales. Es especialmente importante recordar estas dos:

Primera: dos expresiones fraccionarias son equivalentes si los productos cruzados son iguales.

Segunda: si multiplicamos el numerador y el denominador de una expresión fraccionaria por una misma expresión distinta de cero, se obtiene una expresión fraccionaria equivalente a la primera.

Conclusión

Muchas personas encuentran las matemáticas un tema arduo, complicado y, a veces, indescifrable. Por eso, en

esta carpeta hemos tratado de huir de formalismos, que en ocasiones consiguen desviar y hemos ejemplificado todas las definiciones

Las bases de las matemáticas no es saber mucho, sino saber hacer.

Bibliografía

Enciclopedia aritmética

Editorial el periódico

Enciclopedia temática interactiva matemática

Ediciones I y II

Lectus Vergara

Zeta Multimedia

9