

Matrius i determinants

2.1. Matrius

Anomenem *matriu numèrica* un conjunt de nombres disposats en files i columnes.

Anomenem *matriu d'ordre* (m,n) un conjunt de nombres reals, disposats en m files i n columnes. Cada un dels nombres de què consta una matriu n'és un element. Un element es distingeix d'un altre per la seva posició, que queda definida per la fila i la columna que ocupa dins de la matriu.

A partir d'ara considerarem les matrius com *un conjunt de vectors*, els components dels quals els disposarem en columna. Així, 2 vectors de V_3 defineixen una matriu d'ordre $(3,2)$, mentre que una matriu d'ordre $(2,3)$ representa 3 vectors de V_2 , és a dir, el nombre de files és el nombre de components dels vectors i el nombre de columnes coincideix amb el nombre de vectors que tenim.

2.2. Diferents tipus de matrius

Matriu fila i matriu columna

Les matrius d'*una sola fila* s'anomenen **matriu fila**. Les matrius files són del tipus:

$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$

De manera semblant, les que estan formades per *una sola columna* s'anomenen **matriu columna**. La forma general d'una matriu columna és:

a_{11}

a_{21}

$\vdots$

$\vdots$

a_{m1}

L'ordre d'una matriu fila de n columnes és $(1, n)$, i l'ordre d'una matriu columna de m files és $(m, 1)$.

Matriu nul·la

De la mateixa manera que considerem el vector nul, també utilitzarem la **matriu nul·la**: és la que té tots els elements zero.

No cal dir que hi ha infinites matrius nul·les que es distingeixen entre elles pel seu ordre. Per a cada ordre hi ha una única matriu nul·la, així per exemple la matriu:

Matriu oposada

La **matriu oposada** d'una matriu és la que s'obté canviant cada un dels elements pel seu oposat. Una matriu A té una i només una matriu oposada, que s'indica per $-A$.

Es pot definir dient: si $A = (a_{ij})$, la seva oposada és $-A = (-a_{ij})$

Matriu transposada

La matriu que s'obté en intercanviar les files per les columnes en una matriu A s'anomena **matriu transposada** de A , i es designa per tA . Si l'ordre de A és (m,n) , l'ordre de tA és (n,m) .

Per la mateixa definició de matriu transposada es dedueix que: $t(tA) = A$

Igualtat de matrius

Per acabar amb els conceptes bàsics de matrius, establim un *criteri d'igualtat de matrius*.

Dues matrius són iguals quan tenen el mateix ordre i a més, els elements que pertanyen a la mateixa fila i a la mateixa columna coincideixen.

És a dir, donades dos matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ del mateix ordre, $A = B$

si $a_{ij} = b_{ij}$, qualsevol que siguin i, j .

2.3. Matrius quadrades

Un cas especial de matriu singularment important és el d'aquelles matrius que tenen el *mateix nombre de files que de columnes*. Aquestes matrius s'anomenen **matrius quadrades**. En lloc de parlar de matrius d'ordre (n,n) , direm que es tracta de matrius quadrades d'ordre n .

En una matriu quadrada els elements de la forma a_{ii} formen la **diagonal principal**.

La suma dels elements de la diagonal principal d'una matriu quadrada s'anomena *traça* de la matriu A , s'indica:

$$tra(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

La **diagonal secundària** és formada per aquells elements en què la suma dels subíndexs és igual a l'ordre de la matriu més una unitat

Matriu triangular

Es diu que una matriu quadrada és **triangular superior** quan *tots els elements situats per sota de la diagonal principal són zero*.

Anàlogament, quan *són zero tots els elements situats per sobre de la diagonal principal*, la matriu quadrada s'anomena **triangular inferior**.

Matriu diagonal. Matriu escalar. Matriu unitat

La matriu que és *ahora triangular superior i triangular inferior* s'anomena **matriu diagonal**. Per tant, en una matriu diagonal tots els elements són zero, llevat dels de la diagonal principal.

Entre les matrius diagonals destaquen les **matrius escalars**, amb *tots els elements no nuls iguals*. Finalment, si una matriu escalar és tal que *tots els elements de la diagonal principal són iguals a 1*, la matriu s'anomena **matriu unitat**.

Matriu simètrica. Matriu antisimètrica

Es diu que una matriu quadrada és **simètrica** quan els *elements verifiquen* $a_{ij} = a_{ji}$, *qualsevol que siguin* i, j .

Cada element d'una matriu simètrica coincideix amb l'element que ocupa la posició simètrica respecte a la diagonal principal.

Quan en transposar una matriu en trobem una altra que és precisament l'oposada de la matriu primera, diem que la matriu inicial és **antisimètrica**. Una matriu quadrada és antisimètrica quan el *elements verifiquen* $a_{ij} = -a_{ji}$, *qualsevol que siguin* i, j .

Els elements de la diagonal principal d'una matriu antisimètrica han de ser zero, i cada un dels elements restants coincideix, llevat del signe, amb l'element que ocupa la posició simètrica respecte a la diagonal principal.

Una matriu quadrada A és simètrica si $tA = A$. Una matriu quadrada A és antisimètrica si $tA = -A$.

2.4. Operacions amb matrius

Suma de matrius del mateix ordre

Donades dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, del mateix ordre, anomenem **matriu suma** de A i B la matriu que s'obté de la suma de cada terme de A amb el corresponent terme de B :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

És a dir, la matriu suma s'obté sumant els elements de les dues matrius sumands que pertanyen a la mateixa fila i a la mateixa columna. La suma de matrius així definida només té sentit quan les matrius sumands són matrius del mateix ordre.

Es pot comprovar fàcilment que la suma de matrius d'ordre (m, n) té les propietats següents:

$$\text{Associativa: } A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\text{Existència d'element neutre: } A + 0 = 0 + A = A$$

$$\text{Existència d'element simètric: } A + (-A) = (-A) + A = 0$$

$$\text{Commutativa: } A + B = B + A$$

siguin quin siguin les matrius A, B i C d'ordre (m, n) .

L'element neutre = és la matriu nul·la d'ordre (m, n) . Pel que fa a l'element simètric, és, simplement, la matriu oposada.

L'existència d'element simètric ens permet restar matrius, per la qual cosa entenem la resta de matrius com la suma d'una matriu amb l'oposada de l'altre

$$A - B = A + (-B)$$

Producte d'un nombre per una matriu

Donat un nombre real k i una matriu $A = (a_{ij})$ d'ordre (m,n) , definim el producte de k per A de la forma:

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

la qual cosa significa que *multipliquem el nombre k per cada un dels elements de la matriu A .*

Com a cas particular s'obté que $(-1)A = -A$ per a qualsevol matriu A .

Les propietats fonamentals d'aquesta operació, en relació amb la suma de matrius, són les següents:

$$k(A + B) = kA + kB \text{ propietat distributiva}$$

$$(k + h)A = kA + hA$$

$$k(hA) = (kh)A$$

$$1A = A \text{ element neutre}$$

Seria el mateix escriure kA que Ak , però se sol escriure primer el nombre i a continuació la matriu, és una qüestió de conveni.

Producte de matrius

Si el nombre d'elements de la matriu fila i la matriu columna és diferent, el producte de les dues matrius no és possible.

La matriu producte AB té tantes files com la matriu A i tantes columnes com la matriu B .

$$\text{Associativa: } (AB)C = A(BC)$$

$$\text{Distributiva: } A(B + C) = AB + AC \text{ i } (A + B)C = AC + BC$$

Potència d'una matriu quadrada

Això només és possible en matrius quadrades. Si la matriu no és quadrada, la potència no és definida.

$$t(A + B) = tA + tB$$

$$t(kA) = K(tA)$$

$$t(AB) = (tB)(tA)$$

$$t(An) = (tA)n$$

2.5. Determinants

Els determinants van sempre associats a les matrius quadrades, el determinant d'una matriu quadrada A , se simbolitza per $|A|$.

Determinants d'ordre 2

Anomenem determinant d'una matriu quadrada A , d'ordre 2, el nombre obtingut de la manera següent:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

en què, per indicar que es tracta d'un determinant de la matriu quadrada, s'han substituït amb barres verticals els parèntesis que engloben els elements de la matriu.

Per calcular un determinant d'ordre 2, associat a una matriu quadrada d'ordre 2, només cal multiplicar els elements de la diagonal principal i restar-ne el producte dels elements de la diagonal secundària.

El desenvolupament d'un determinant d'ordre 2 consta de dos sumands, cada un dels quals és producte de dos factors. En cadascun dels sumands hi figura una vegada, i només una, cada fila i cada columna de la matriu.

Determinants d'ordre 3

Es pot recórrer a l'anomenada **regla de Sarrus**:

Es multipliquen els tres elements de la diagonal principal, tot seguit es multipliquen els dos elements situats sobre una línia paral·lela a aquesta diagonal; el tercer factor d'aquest producte és l'element situat al vèrtex oposat a aquesta línia; finalment, es multipliquen els dos elements situats sobre l'altra paral·lela per l'element del vèrtex oposat. I al final se sumen els tres nombres obtinguts.

Es procedeix de manera anàloga amb la diagonal secundària i les paral·leles, i se sumen els tres resultats. Finalment, el nombre obtingut es resta del que correspon a l'operació efectuada a partir de la diagonal principal.

2.6. Adjunts d'una matriu quadrada

Els determinants d'aquestes submatrius els anomenem **menors** d'ordre k de la matriu inicial.

Un **menor complementari** és el determinant que resulta en suprimir una fila i una columna d'una matriu quadrada. Els menors complementaris els denotarem per M_{ij} , per indicar el determinant de la matriu que s'obté en suprimir la fila i i la columna j .

El nombre que s'obté a partir de l'expressió $(-1)^{i+j} M_{ij}$ s'anomena **adjunt** de l'element de lloc ij . Denotarem els adjunts amb el símbol m_{ij} , de manera que:

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Considerem una matriu quadrada A , anomenem **matriu adjunta** de A la matriu formada pels adjunts dels elements de A . Designem aquesta matriu amb el símbol A^* , de manera que $A^* = (m_{ij})$.

2.7. Propietats dels determinants

- a) El determinant d'una matriu és igual al de la seva transposada. $|A| = |tA|$
- b) Si en una matriu quadrada s'intercanvien dues línies, el seu determinant canvia de signe.
- c) Si multipliquem una línia per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.
- d) Si dues línies són iguals, el determinant és zero.
- e) Un determinant amb una línia de zeros és zero.

f) *El determinant de la matriu escalar 1 és 1.*

g) Si $v = v_1 + v_2$, aleshores $D(u, v) = D(u, v_1 + v_2) = D(u, v_1) + D(u, v_2)$

h) *Si una línia és combinació lineal de les altres, el determinant és zero.*

A partir d'aquesta propietat es dedueix la següent:

Si u, v i w són tres vectors de V^3 linealment dependents, aleshores $D(u, v, w) = 0$, i recíprocament.

Naturalment, si $D(u, v, w) \neq 0$ els vectors u, v i w de V^3 són linealment independents.

i) *Si se suma a una línia una combinació lineal de les altres, el determinant no varia.*

2.8. Rang d'una matriu

*El **rang d'una matriu** és el nombre màxim de vectors linealment independents que es pot extreure de la matriu.*

*Anomenen **rang d'una matriu** l'ordre màxim dels seus menors no nuls.*

Exemple 3

Si trobem un menor d'ordre 2 diferent de zero voldrà dir que el rang de la matriu és 2.