

Pregunta 14:

Resolver una ecuación diferencial con cualquier tipo de método lleva implícito como primer problema, definirse una buena condición de borde cuando no son datos conocidos, aún mas cuando se pretende obtener una aproximación polinomial spline de una sección tabulada de datos.

Para nuestro caso las condiciones son las siguientes:

$$\bullet \frac{dT}{dz} = 0$$

, para $z = 0$ y $z = 27.2$, es decir la primera derivada de la temperatura con respecto a la profundidad. Esto se debe a que en transferencia de calor las zonas con gradientes cero de temperatura en una variable se consideran como térmicamente aisladas o son puntos donde se genera calor como es el caso de la superficie $z = 0$.

$$\bullet \frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

, para $z = 0$ y $z = 27.2$, la segunda derivada evaluada en los puntos extremos y de interés es cero. Este supuesto se establece para asegurar continuidad a la solución spline de la ecuación diferencial.

Según el desarrollo planteado en la tarea, construir una función spline requiere conocer la segunda derivada de los puntos tabulados y que se encuentran resolviendo el siguiente sistema lineal.

		A								M	D
0.3833	0	0	0	0	0	0			-0.0171	0	
16.333	0.4333	0	0	0	0	0			0.0342	0	
0.4333	22.667	0.7000	0	0	0	0			-0.1139	-0.5238	
0	0.7000	29.333	0.7667	0	0	0	x	-0.4006	=	-0.9327	
0	0	0.7667	30.667	0.7667	0	0		0.4203		0.9783	
0	0	0	0.7667	30.667	0.7667	0		-0.0045		0.3478	
0	0	0	0	0.7667	29.667	0.7167		0.0513		0.1304	
0	0	0	0	0	0.7167	14.333		-0.0257		0	

En la tabla anterior se encuentran los elementos del sistema: La matriz A es una matriz tridiagonal simétrica característica de la matriz resolutiva de funciones spline, el vector columna D y por último la el vector columna M contiene los valores que satisfacen la ecuación.

Como se entenderá la solución del sistema anterior la realizamos directamente calculando la inversa de la matriz A para multiplicarlo por el vector columna D, es decir,

$$M = A^{-1} D$$

Luego de obtener los coeficientes M para la función spline que interpole los datos de la tabla construiremos un algoritmo matemático apoyado con herramientas computacionales para obtener una muestra representativa de puntos, y construir un gráfico de la temperatura en función de la profundidad, la derivada de la temperatura y la segunda derivada de la temperatura.

El algoritmo es el siguiente:

clear all;

```

x= [ 0 2.3 4.9 9.1 13.7 18.3 22.9 27.2];
y = [ 22.8 22.8 22.8 20.6 13.9 11.7 11.1 11.1];
h = x(2:8)-x(1:7);
hh =[h(1) h(1:6)+h(2:7) h(7)];
A = diag(hh/3)+diag(h(1:7)/6,1)+diag(h(1:7)/6,-1);
D = [(y(2)-y(1))/h(1) (y(3:8)-y(2:7))./h(2:7)-(y(2:7)-y(1:6))./h(1:6)...
-(y(8)-y(7))/h(7)];
D = D';
M = inv(A)*D;
k = 1;
for j = 1:7,
for s = x(j):0.2:x(j+1),
z(k) = (M(j)*(x(j+1)-s)^3+M(j+1)*(s-x(j))^3)/(6*h(j))+...
((x(j+1)-s)*y(j)+(s-x(j))*y(j+1))/(h(j))-...
(M(j)*(x(j+1)-s)+M(j+1)*(s-x(j)))*(h(j)/6);
xk(k) = s;
dz(k) = (-M(j)*(x(j+1)-s)^2+M(j+1)*(s-x(j))^2)/(2*h(j))+...
(-y(j)+y(j+1))/(h(j))-...
(-M(j)+M(j+1))*(h(j)/6);
ddz(k) = (M(j)*(x(j+1)-s)+M(j+1)*(s-x(j)))/(h(j));
k = k+1;
end;
end;
grid;
plot(x,y,'o',xk,z);
figure;

```

```

plot(xk,dz);
figure;
plot(xk,ddz);

```

danto como los siguiente resultados :

Perfil de temperatura:

A continuación enseñaremos el gráfico del perfil de temperatura versus profundidad obtenido, acompañado con una respectiva tabla con datos tabulados de puntos intermedios.

donde el gráfico anterior representa la curva spline que interpola una colección de datos representados por puntos celestes

los datos con los cuales se baso la construcción gráfico se encuentran tabulados en el anexo 1

Primer derivada de Temperatura:

El gráfico de la primera derivada de la temperatura es el siguiente y como podrá observarse, existe un mínimo en la función derivada aproximadamente por 11.2 metros de profundidad

Segunda derivada:

El gráfico de la segunda derivada es le siguiente

como puede confirmarse el plano termoclino e encuntra a 11,2 metros de profundidad aproximadamente.

Plano Termoclino:

Para encontrar el plano termoclino hay que solucionar la ecuación lineal :

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x) M_i + (x - x_i) M_{i+1}}{h_i}$$

, con $i = 3$ que es el intervalo donde ocurre el minimo de la primera derivada de T.

Dando como resultado:

El plano termoclino se encuentra a una profundidad de 11.3448044 metros

Conclusiones 14

Una buena idea para aproximar soluciones gráficas a ecuaciones diferenciales cuando se tiene algunos valores intermedios, es ocupar alguna forma de interpolación, como es en el caso de la spline cúbicas. Sin embargo no puede confiarse totalmente en métodos de interpolación para obtener soluciones. Siempre se debe tener presente que las interpolaciones spline entregan una respuesta aproximada bajo un marco de continuidad restringida. En casos muy extremos, estas aproximaciones pueden llegar a lo grosero. Por ejemplo, de la tabla de temperatura versus profundidad de la pregunta 14, debiéramos esperar un perfil de temperaturas estrictamente monótonos y decreciente, sin embargo en le segundo intervalo de interpolación la spline cúbica interpreta la curva con una leve pendiente positiva.

La interpolación resulta ser una buena herramienta de aproximación de perfiles, pues muy involucrado en su cálculo se encuentra la solución de sistemas lineales con matrices características tridiagonales. Estas matrices presentan bondadosas propiedades de cálculo que economizan mucha operatoria, en particular cuando los sistemas exceden los 100 grados de libertad, por dar un ejemplo. Sin embargo estas soluciones se encuentran limitadas a la naturaleza de los problemas, es decir para situaciones en que la primera y segunda derivadas en los extremos de la tabla de valores no son cero, la matriz característica pierde su tridiagonalidad, estropeando muchas de las ventajas comparativas de las matrices antes mencionadas.

Pregunta 15.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_p(t) dt = h \sum_{j=0}^p \gamma_j y_n$$

$$\gamma_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 s(s+1)\dots(s+j-1) ds$$

- Un polinomio interpolante usando diferencia retardadas es de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{-s}{k} f(x_n)$$

$$\text{con } f(x_n) = y_n$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_n(x) dx = \sum_{k=0}^p \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^k \frac{-s}{k} dx = \sum_{k=0}^p (-1)^k y_n$$

$$\text{pero } x = x_n + sh$$

$$\text{y } x_{n+1} - x_n = h$$

, entonces $dx = h*ds$ entonces reemplazando:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_n(x) dx = \sum_{k=0}^p h \int_0^1 \frac{s(s+1)\dots(s+k+1)}{k!} ds = \sum_{k=0}^p h y_n$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_n(x) dx = \sum_{k=0}^p h \gamma_k y_n$$

- Luego la fórmula o el método predictor–corrector Adams–Bacshforth plantea que:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_n(x) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=0}^p h \gamma_k y_n$$

$$\text{para } P=2 \quad y_{n+1} = y_n + h[\gamma_0^0 y_n + \gamma_1^1 y_n + \gamma_2^2 y_n]$$

$$\text{para } P=3 \quad y_{n+1} = y_n + h[\gamma_0^0 y_n + \gamma_1^1 y_n + \gamma_2^2 y_n + \gamma_3^3 y_n]$$

por lo tanto para entender o cuantificar el método hay que evaluar γ_j

iii)

$$\gamma_0^0 = \frac{1}{0!_0} \int_0^1 ds = 1$$

$$\gamma_1^1 = \frac{1}{1!_0} \int_0^1 s ds = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2!_0} \int_0^1 s(s+1) ds = \frac{5}{12}$$

$$\gamma_3^3 = \frac{1}{3!_0} \int_0^1 s(s+1)(s+2) ds = \frac{3}{8}$$

entonces:

$$\text{para } P=2 \quad y_{n+1} = y_n + h^0 y_n + \frac{1}{2}^1 y_n + \frac{5}{12}^2 y_n$$

$$\text{para } P=3 \quad y_{n+1} = y_n + h^0 y_n + \frac{1}{2}^1 y_n + \frac{5}{12}^2 y_n + \frac{3}{8}^3 y_n$$

Observación:

$$^0 y_n = y_n$$

Entonces para:

$$\text{para } P=2 \quad y_{n+1} = y_n + h y_n + \frac{1}{2}^1 y_n + \frac{5}{12}^2 y_n$$

$$\text{para } P=3 \quad y_{n+1} = y_n + h y_n + \frac{1}{2}^1 y_n + \frac{5}{12}^2 y_n + \frac{3}{8}^3 y_n$$

Conclusiones 15

Resulta importante entender como funcionan los métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método predictor corrector de Adams Bashfort la bibliografía lo define como método multipaso explícito, es decir, al determinar un nueva aproximación Y_{n+1} se hace en función de los

anteriores Y_n . Presente ventajas con respecto a los métodos de paso único por resición, aunque nos encontramos con que para mayor presición necesitada mayor operatoria requiere la rutina de cálculo.

Pero lo importancia de los métodos predictores correctores radica en definirla nueva aproximación Y_{n+1} como la suma del valor anterior Y_n más la integral del intervalo de trabajo de alguna interpolación de los datos anteriores.

Pregunta 16:

Supongamos que tenemos una colección de puntos relacionados entre si por tres variables, y queremos trazar la mejor recta entre ellos, entonces cada punto está relacionado de la siguiente forma.

$Z = a + bX + cY$, donde a, b, c son constante cuyo valor debe estimarse.

Ahora si lanzáramos una línea recta en error de ubicación que corresponde a la distancia entre la línea y el punto lo podemos expresar como.

$$e = Z - a - bX - cY$$

ahora si acumularemos el error al cuadrado

$$E = e^2 = (Z - a - bX - cY)^2 \quad 0$$

La recta más representativa es aquella que minimiza el error, para ello calcularemos la derivada de E en función de a, b, c y buscaremos el mínimo

$$\frac{dE}{da} = \frac{d}{da} (Z - a - bX - cY) = 0$$

entonces esto es como,

$$\bar{Z} = a + b\bar{X} + c\bar{Y}$$

y de la misma manera se calculan las derivadas parciales de E con respecto a b, c dando como resultado,

$$\bar{XZ} = b\bar{X^2} + a\bar{X} + c\bar{XY}$$

$$\text{para el caso de } \frac{dE}{db} = 0$$

además de

$$\bar{YZ} = b\bar{XY} + a\bar{Y} + c\bar{Y^2}$$

$$\text{para el caso de } \frac{dE}{dc} = 0$$

luego tenemos un sistema lineal con una matriz característica de dimensión tres, que puede expresarse de la siguiente forma.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \overline{X} & \overline{Y} & a & \overline{Z} \\ \overline{Y} & \overline{XY} & \overline{Y^2} & b & = & \overline{ZY} \\ \overline{X} & \overline{X^2} & \overline{XY} & c & & \overline{ZX} \end{array}$$

ahora podemos relacionar el anterior sistema de ecuaciones con el siguiente modelo,

$$\ln(Q) = \ln(a0) + a1 * \ln(D) + a2 * \ln(S)$$

donde $\ln(Q) = Z$,

$$\ln(D) = X,$$

$$\ln(S) = Y,$$

son las equivalencias entre el sistema de ecuaciones y el modelo propuesto en la tarea,

además las constantes de la solución del sistema se reemplazan como:

$$\ln(a0) = a$$

$$a1 = b$$

$$a2 = c$$

entonces el sistema de ecuaciones se reescribe:

	A		w		c
1,000000000000000	0,597253156409351	-4,836219246174730	4,024849672038600		2,9911855
-4,836219246174730	-2,888447209865510	25,966362430344000	x 2,615843931140000	=	-13,082561
0,597253156409351	0,562467324910261	-2,888447209865510	0,536779868581758		2,3247205

donde A es la matriz del sistema, w es el vector columna con las soluciones que fueron calculadas directamente, de la siguiente forma:

$$w = \text{inv}(A) * d$$

realizando la comprobación tenemos que

$$E = A * w - d = (-4.440892098500626e-016 \ 0 \ 0)t$$

$$= (a \ b \ c)t$$

por lo tanto podemos calcular los coeficientes a0, a1, a2 que son los siguientes:

A0	5.597189400845032e+001
A1	2.615843931140002e+000
A2	5.367798685817587e-001

Obs: todas las operaciones matemáticas fueron resguardadas en la siguiente rutina de cálculo.

clear all;

$Q = [1.4 \ 8.3 \ 24.2 \ 4.7 \ 28.9 \ 84.0 \ 11.1 \ 69 \ 200];$

$S = [0.001 \ 0.001 \ 0.001 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05];$

$D = [1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3];$

$z = \log(Q);$

$x = \log(D);$

$y = \log(S);$

$A = [1 \ \text{mean}(x) \ \text{mean}(y); \ \text{mean}(y) \ \text{mean}(x.*y) \ \text{mean}(y.*y);$

$\text{mean}(x) \ \text{mean}(x.*x) \ \text{mean}(x.*y)];$

$b = [\text{mean}(z) \ \text{mean}(z.*y) \ \text{mean}(x.*z)];$

$w = \text{inv}(A)*b;$

$E = A*w - b;$

$w = w';$

$a0 = \exp(w(1));$

$a1 = w(2);$

$a2 = w(3);$

conclusiones 16

Del presente problema podemos destacar lo siguiente, La construcción de regresiones lineales multivariadas puede simplificarse significativamente ocupando conjuntamente sistemas lineales y conceptos básicos de estadística como el de la media. De ésta forma podemos modelar cualquier tipo de fenómenos sólo limitado por la estabilidad numérica de este.

Con respecto de los sistemas lineales debemos recordar que para pequeñas dimensiones siempre es recomendables ocupar métodos directos de solución.