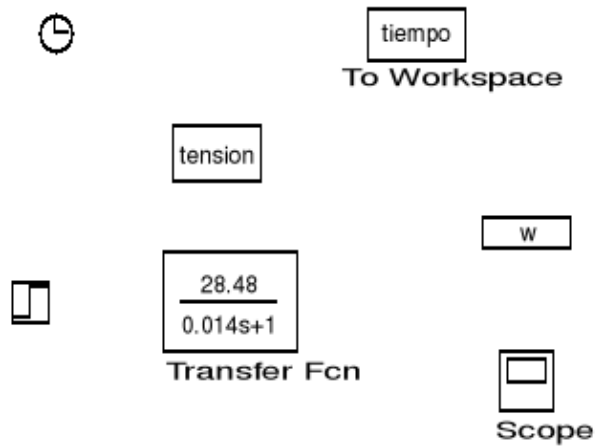


Simulación de un sistema de control discreto

En este apartado se realizará la simulación del diagrama de bloques del esquema básico simplificado del motor, discretizando el modelo de la planta y también desarrollando el modelo en variables de estado. El objetivo principal de este apartado es familiarizarse con la simulación de sistemas de control discretos.

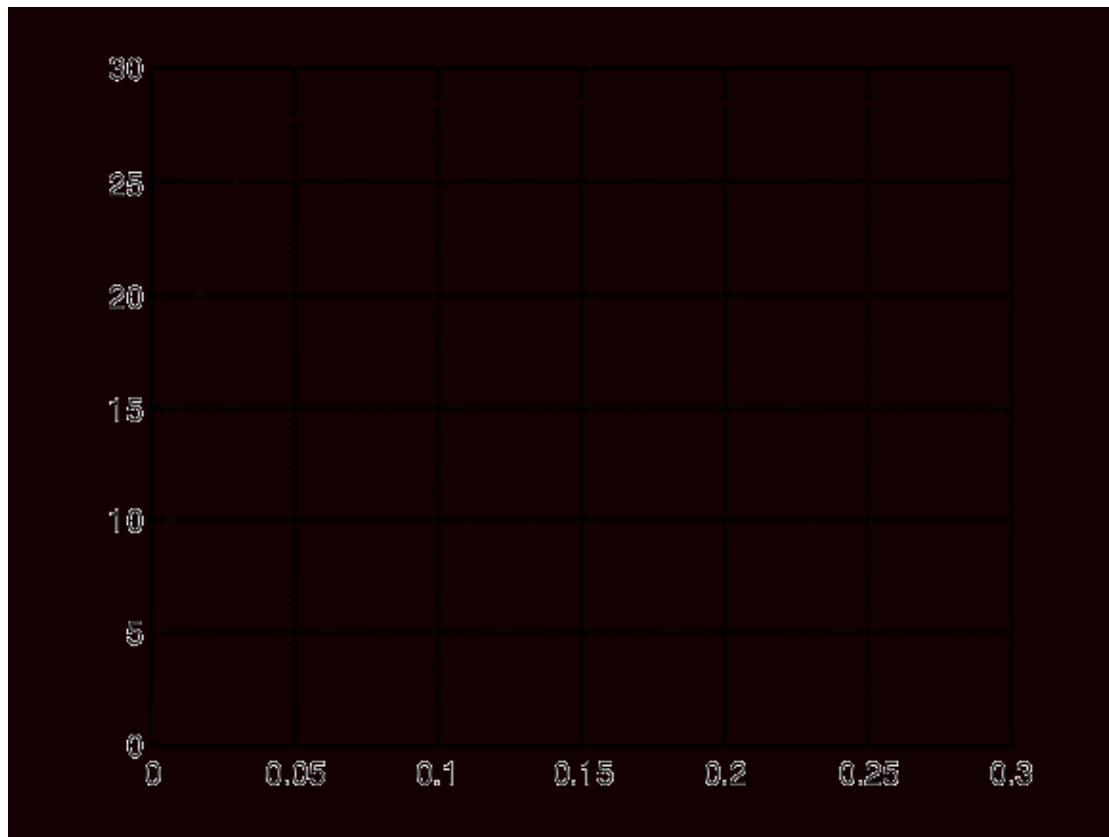
- Simulación del sistema del motor en lazo abierto con el modelo simplificado del motor de continua.

El diagrama de bloques utilizado es el siguiente:



La constante de tiempo mecánica del motor () es de 14 ms y la constante de velocidad (A) es de 272 rpm/V, es decir , 28.48 (rad/seg)/V.

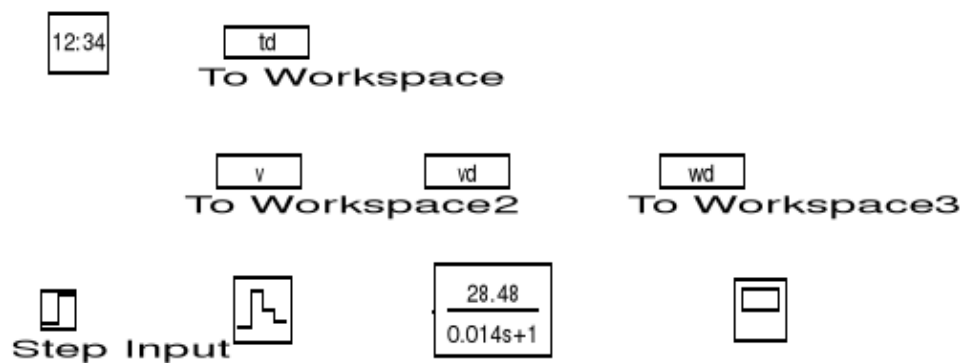
Tras la simulación, la salida del motor se representa en la siguiente figura:



Puesto que la señal de entrada aplicada es una señal escalón que varía de 0 a 1V ,se puede comprobar que la respuesta del sistema simplificado se corresponde con la de un sistema de 1º orden con constante de tiempo de 14 ms y ganancia estática de 28.48.

2. Discretización del sistema.

Para discretizar la planta continua se utiliza el siguiente esquema:



La operación de muestreo produce una señal de pulsos modulados en amplitud y el retenedor reconstruye la señal analógica. Las características de la respuesta transitoria del sistema de control en tiempo discreto dependen del periodo de muestreo T_s . Un periodo de muestreo grande tiene efectos dañinos sobre la estabilidad relativa del sistema. Por ello hay que tener especial atención a la hora de elegir un valor adecuado.

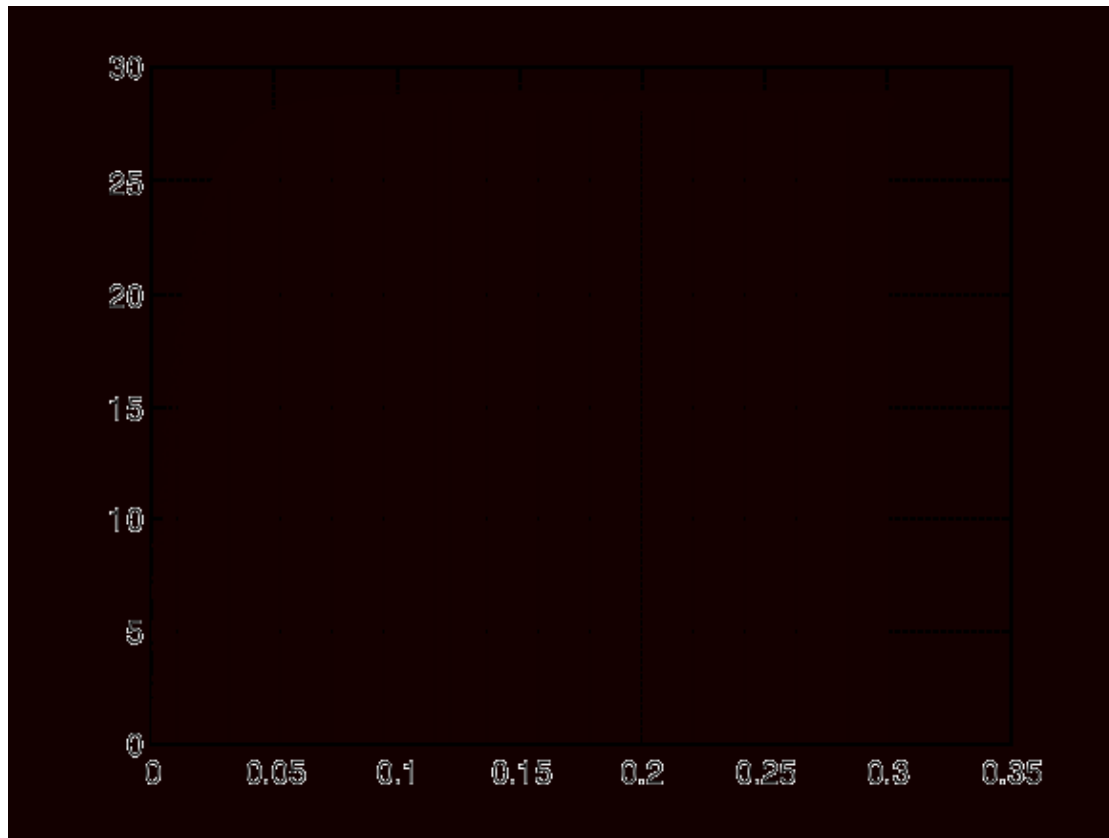
(En este caso la entrada aplicada es una señal escalón, por lo que el retenedor de orden cero no tiene

mucho sentido puesto que la señal es constante. Si observamos las variables v y vd vemos que ambas son idénticas en número de elementos y en valor (la unidad) ¿No tendría que ser un escalón discreto??)...

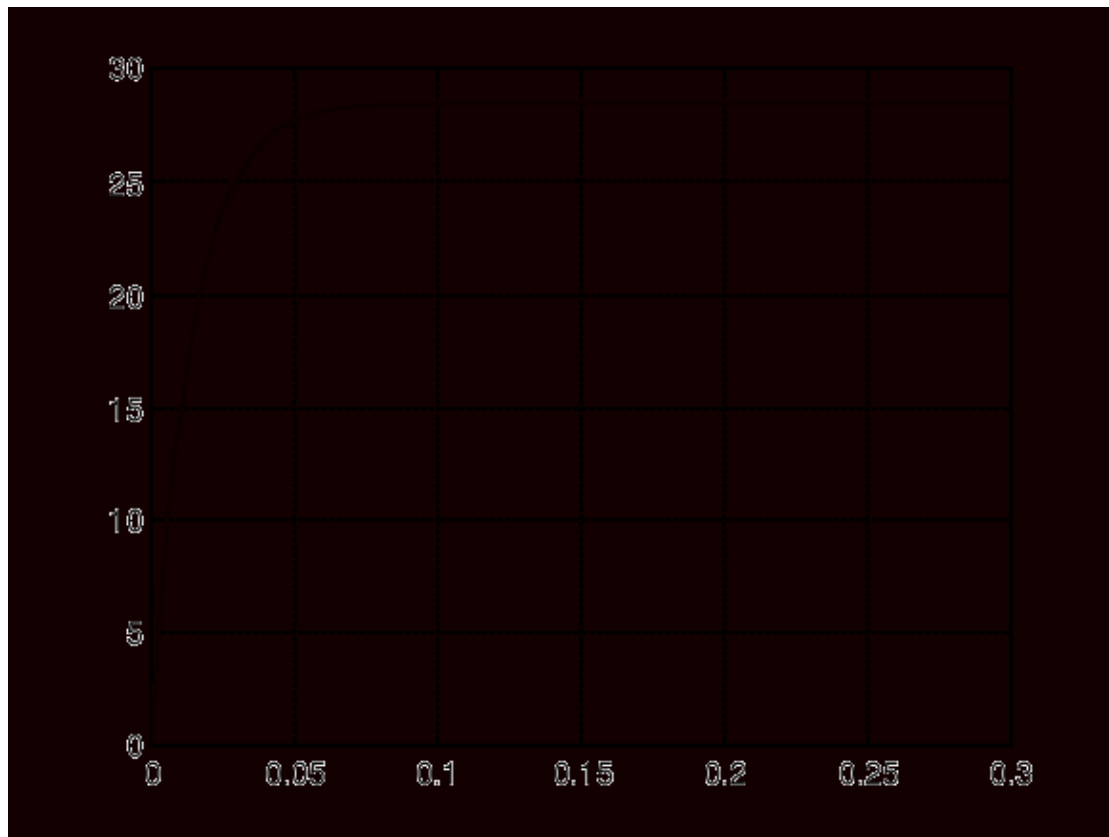
Como regla práctica se muestrea con $T_s = 1/10$ para obtener suficiente información del transitorio, y en este caso se ha tomado como valor 1.4ms. Este será el valor que daremos al parámetro Sample Time del mantenedor de orden cero y del reloj digital.

Puesto que se indica que el paso de simulación debe ser inferior al período de muestreo del sistema, se ha elegido un valor de 1ms.

Si visualizamos la salida del sistema con la función stem (es decir, la salida discretizada con un periodo de muestreo de 1.4ms) se obtiene:



Para comparar los resultados con los obtenidos en el apartado anterior visualizamos la salida en tiempo continuo junto con la salida del apartado anterior:



Se observa que los resultados son prácticamente idénticos ya que apenas se nota la diferencia entre w y w_d .

Esto es de esperar ya que a la entrada del bloque que representa el modelo simplificado del motor de continua se tiene la misma tensión en ambos apartados.

Tras sucesivas simulaciones se ha comprobado que, para un mismo periodo de simulación, el número de elementos de las variables varía cuando se modifican tres parámetros.

Estos parámetros son el periodo de muestreo del reloj digital, el periodo de muestreo del retenedor de orden cero y el paso de simulación.

El menor de todos ellos será el que determine el número de filas, y para que los valores obtenidos sean correctos, el paso de simulación debe ser el de menor tamaño, luego:

- Discretización del sistema mediante discretización de la planta

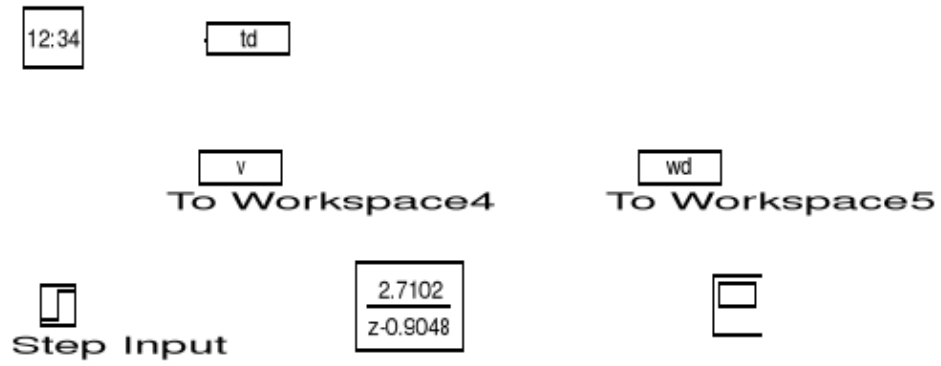
En este apartado se va a discretizar la planta utilizando la función `c2dm`. Esta función convierte los polinomios de la función de transferencia de un sistema continuo LTI en polinomios de tiempo discreto, utilizando un determinado método e indicando el periodo de muestreo.

El método que vamos a utilizar es el `zoh`, que convierte a tiempo discreto la función de transferencia suponiendo un interpolador de orden cero en la entrada. De esta forma evitamos la utilización del bloque Zero-Order Hold.

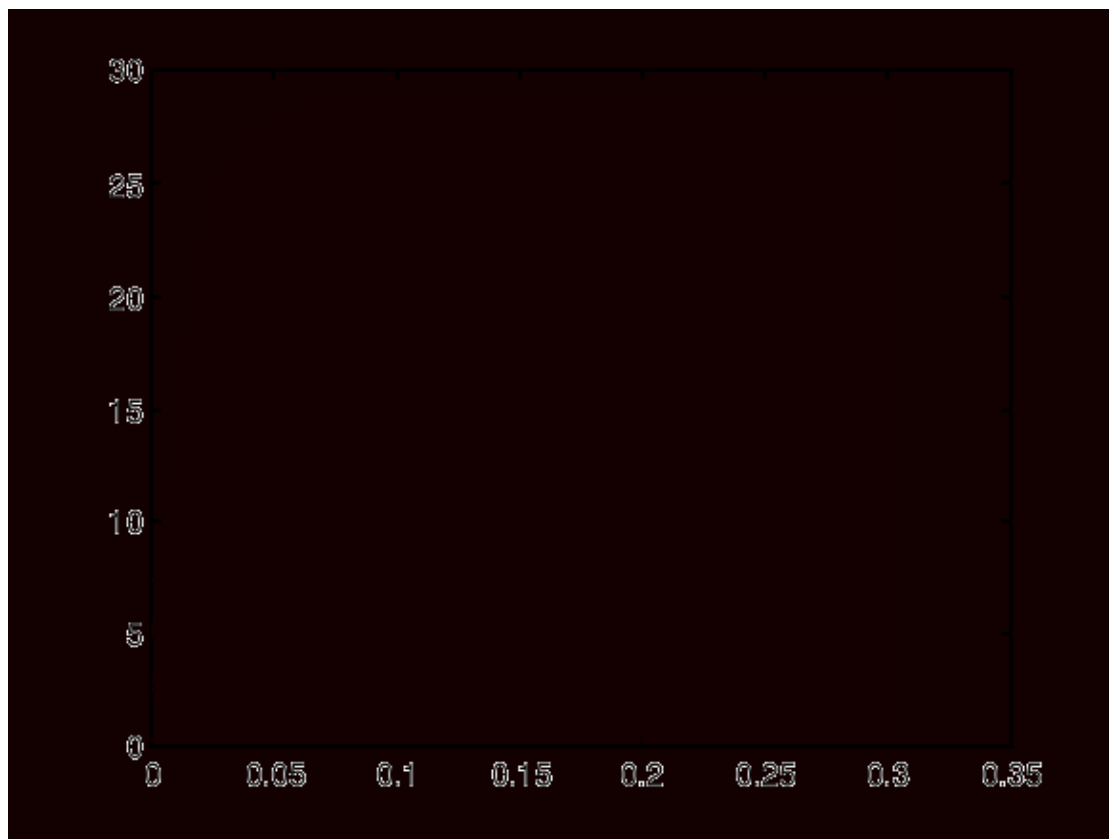
El periodo de muestreo será el anterior, de 1.4 ms.

La función de transferencia resultante sería:

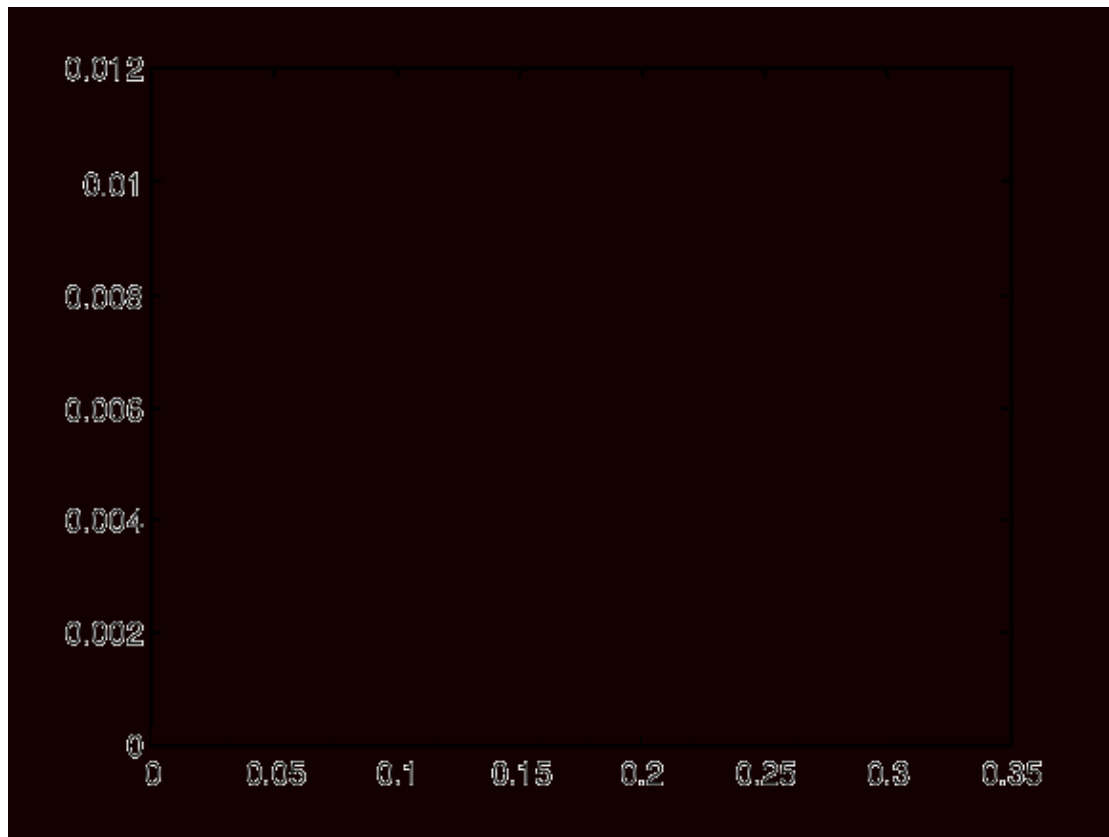
Por lo que el esquema utilizado para la simulación sería el siguiente:



La salida del bloque discretizado sería:



Para comprobar la diferencia con el sistema del apartado anterior, representamos la resta de ambos:

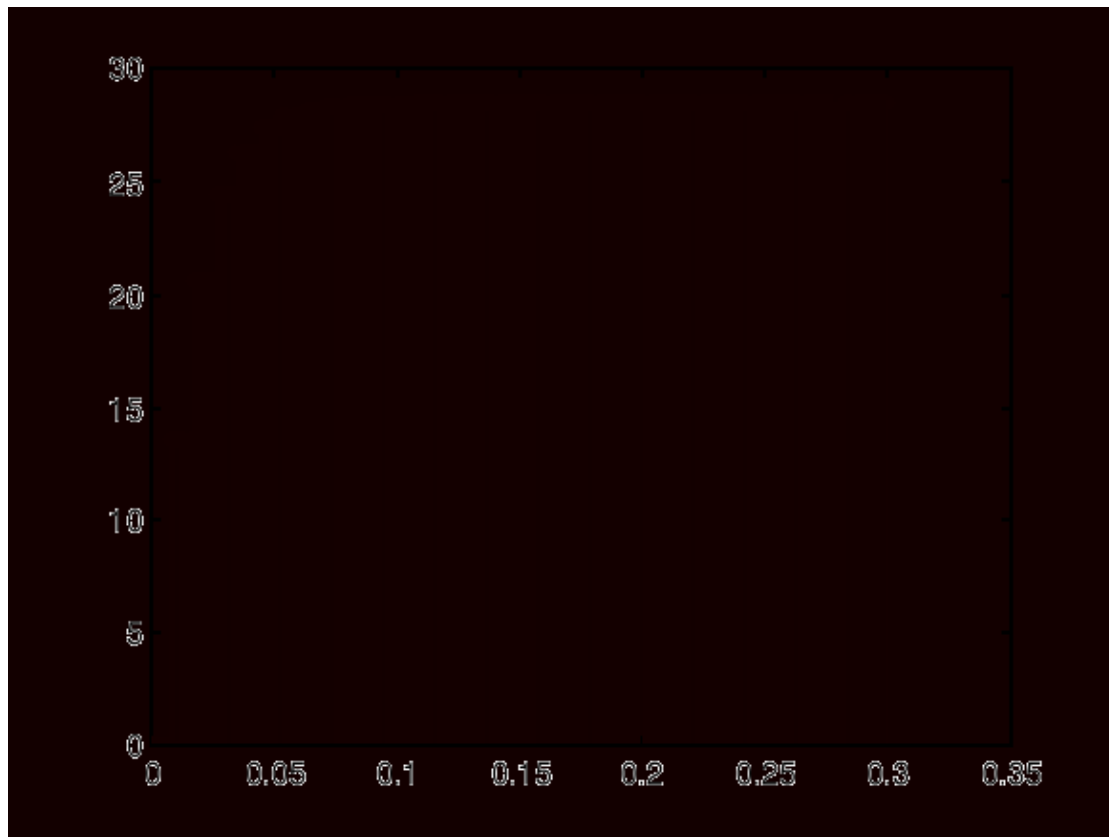


Se observa que la diferencia entre ellas es mínima y que los sistemas se comportan prácticamente igual.

Para comprobar cómo afecta el periodo de muestreo del S/H en el sistema, simulamos para diferentes valores y se ha comprobado que a medida que aumenta se introduce ruido y se advierten claramente las diferencias entre las salidas.

Por ejemplo, con $T_s=9\text{ms}$ se obtiene la siguiente función de transferencia:

y la salida del sistema sería:



Resulta evidente la pérdida de información en el transitorio.

- Modelo en variables de estado

Representamos el modelo en variables de estado utilizando la función `tf2ss`, que transforma la función de transferencia a un modelo en variables de estado.

Con variables de estado se trabaja directamente sobre las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, permitiendo un estudio del comportamiento de las variables internas además de las variables de entrada/salida.

Haciendo uso de esta función obtenemos los siguientes valores para las matrices:

Matriz de evolución del sistema:

Matriz de aplicación de control

Matriz de observación:

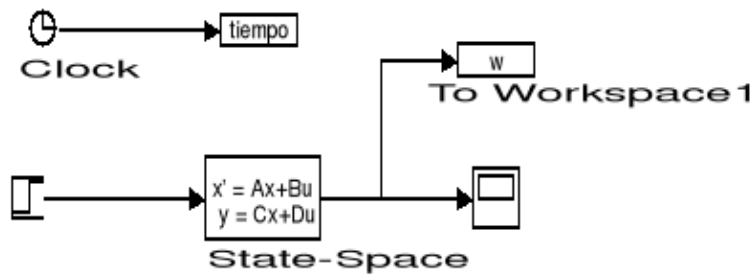
Matriz de transición directa de control

Los elementos de las matrices anteriores toman valores constantes, ya que se trata de un sistema LTI.

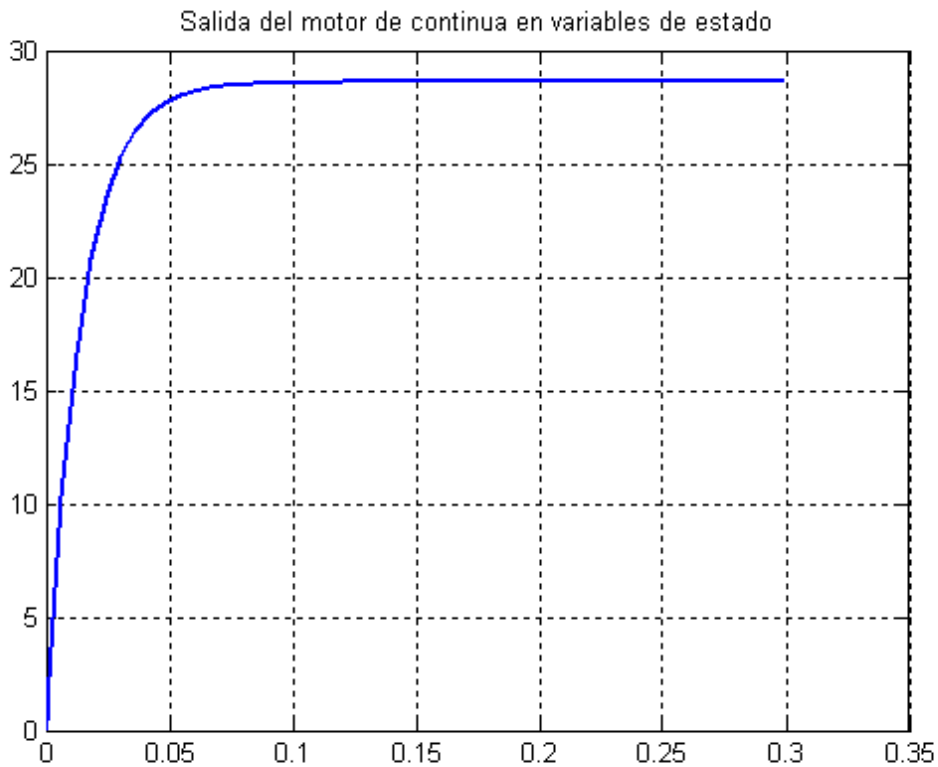
El sistema tiene una única entrada, una única salida y un solo estado, puesto que todas las matrices son de orden 1×1 .

Así, las ecuaciones que rigen el sistema en variables de estado serían:

El diagrama de bloques empleados es el siguiente:



Los resultados de la simulación son prácticamente idénticos a los obtenidos en la cuestión 1 y se observan en la siguiente figura:



- Modelo en variables de estado con dos estados

En el diseño de sistemas de control en el espacio de estados debe ser el propio diseñador el que elija los estados que le interesen y en la cuestión anterior es la función tf2ss quien realiza esta tarea.

Si queremos trabajar con el modelo del motor de continua en variables de estado con dos estados (e e I) y dos entradas (v y M) tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_M/J \\ -k_E/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ M \end{bmatrix}$$

De esta forma, las matrices serán:

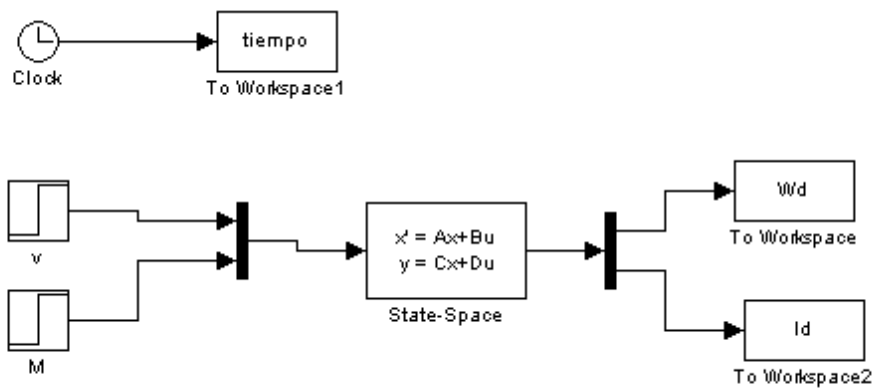
Matriz de evolución del sistema:

Matriz de aplicación de control:

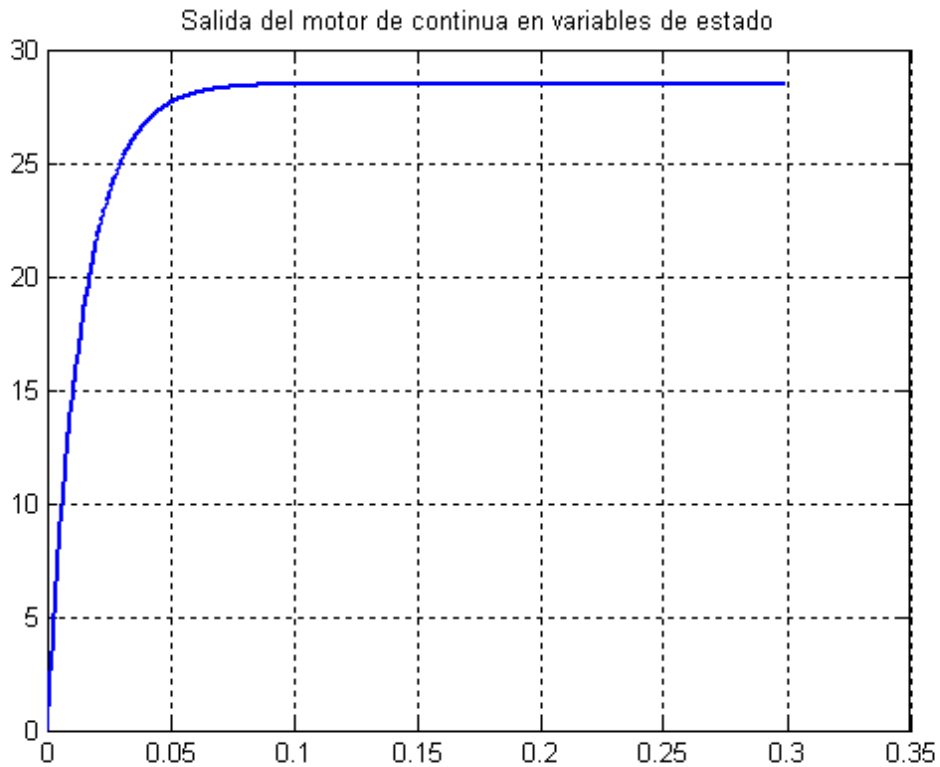
Matriz de observación:

Matriz de transición directa de control:

Así, el diagrama de bloques sería el siguiente:



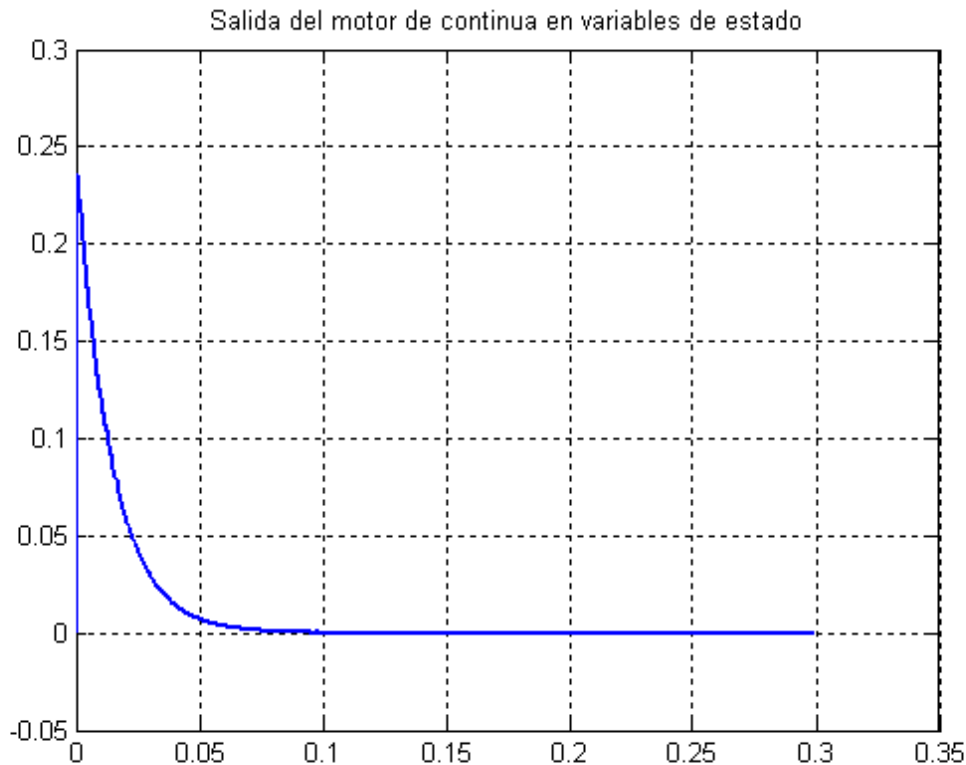
El resultado obtenido para se muestra a continuación:



Se comprueba que los resultados obtenidos son aproximadamente los de la cuestión 4, siempre y cuando el par externo sea nulo.

Existe una mínima diferencia entre los polos dominantes de ambos sistemas, pero es muy pequeña y no se observan apenas desviaciones en las constantes de tiempo.

Además, tendremos una nueva salida I_d , que para un par externo nulo ($M = 0$) sería :



Con las ecuaciones obtenidas hasta ahora podemos saber si el sistema es o no estable. Como los autovalores de A son los polos de la función de transferencia del motor, hacemos uso de la función `eig` y se obtienen dos valores de estos dos polos que se encuentran en el semiplano izquierdo, por lo que el sistema es estable:

El modelo real del motor es un sistema de segundo orden pero se aproxima a un sistema de primer orden debido a que los polos están muy alejados entre sí. Uno de los polos está relacionado con la constante mecánica, y el otro con la constante eléctrica siendo el dominante el relacionado con $\tau = 14\text{ms}$, es decir, $p_1 = -70.7$, ya que es aproximadamente 100 veces menor que p_2 .

En el modelo de la cuestión 1, el único polo existente se encuentra ubicado en $p = -71.42$, que es aproximadamente el modelo resultante de despreciar p_2 .

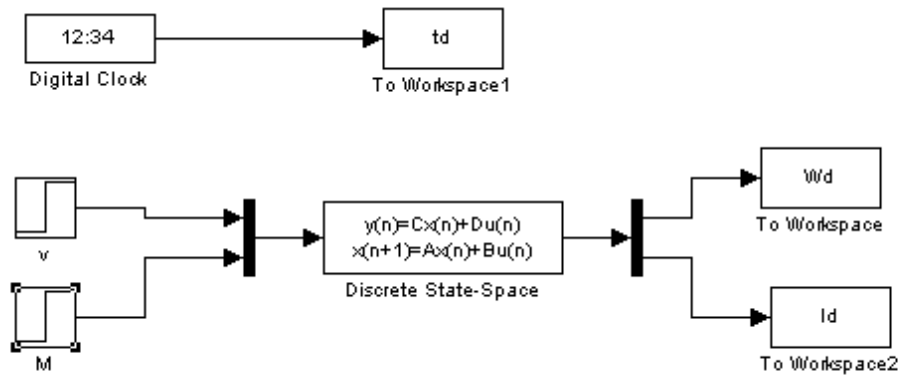
- Discretización del modelo continuo en variables de estado

Se discretiza el modelo continuo de segundo orden en variables de estado del motor de continua utilizando la función `c2dm` y las matrices discretas obtenidas son:

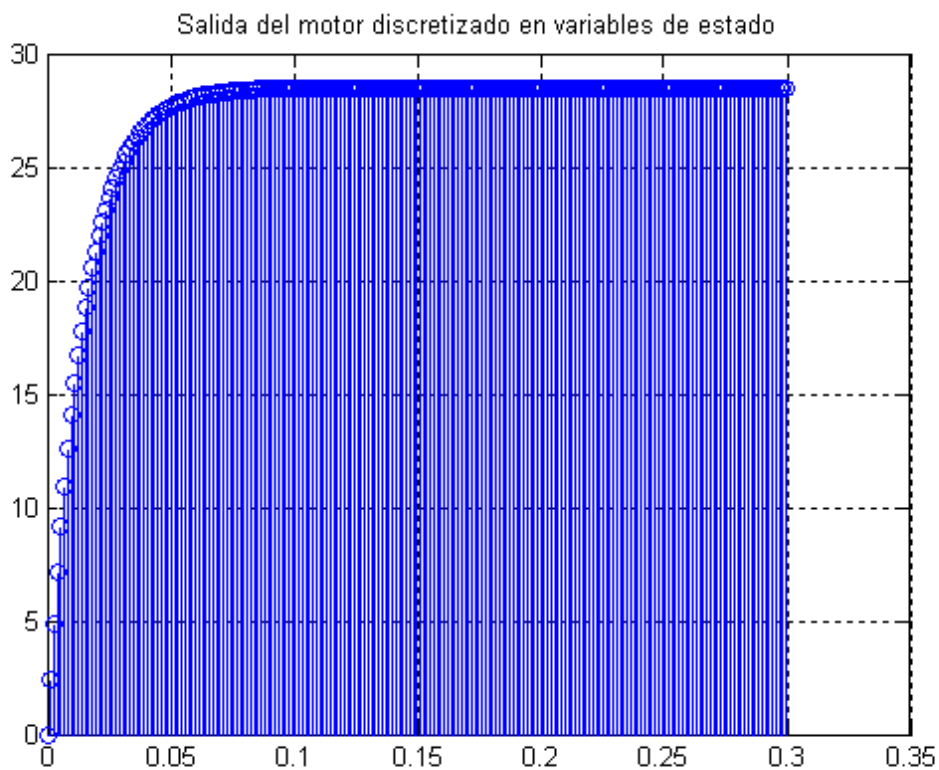
Matriz de evolución del sistema y matriz de aplicación de control:

Matriz de observación y matriz de transición directa de control:

El diagrama de bloques sería el siguiente:



Y a la salida se obtiene aproximadamente el mismo resultado que en la cuestión 3:



- Obtención de los polos de la planta discretizada en variables de estado del motor de continua.

Utilizando la función eig se obtienen los siguientes polos de la planta discretizada

Puesto que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, se comprueba que el sistema es estable.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad tienen un papel muy importante en el control óptimo de sistemas multivariables:

–CONTROLABILIDAD

Un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema no es controlable.

La condición necesario y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de controlabilidad (CO) tenga el mismo rango que la matriz A.

Para estudiar la controlabilidad de nuestro sistema utilizamos la función `ctrb`, que nos permite obtener la matriz de controlabilidad:

Y su rango es 2, igual que el rango de la matriz A, por lo que el sistema es controlable.

–OBSERVABILIDAD

Un sistema es completamente observable si cualquier estado inicial $x(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $y(kY)$ sobre un número finito de periodos de muestreo. El sistema, por tanto, es completamente observable si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida.

La condición para la observabilidad es que la matriz de observabilidad (OB) tenga el mismo rango que la matriz A.

Utilizando la función `obsv` obtenemos la matriz requerida:

EL rango de OB es 2, por lo que el sistema es observable.