

Medida de la constante de un resorte.

Tratamiento teórico

Si colgamos de la parte inferior de un resorte en hélice un cuerpo de masa m se produce un alargamiento proporcional al peso de dicho cuerpo de la siguiente manera:

siendo K la constante recuperadora del resorte.

Si este sistema se aleja verticalmente de su posición de equilibrio y lo soltamos, se produce un movimiento armónico de frecuencia:

$$\omega = [K / m']^{1/2}$$

donde m' es la masa que oscila. Para un muelle sin masa, m' coincide con m , pero en un caso real este resorte también tiene masa (M) de tal modo que se cumple que:

$$m' \sim m + M/3$$

Podemos expresar el período de oscilación de la siguiente manera:

Con ayuda de estas fórmulas vamos a medir experimentalmente el valor de K .

Método operativo

El primer paso de la práctica fue el de intentar averiguar el valor de la constante recuperadora (k) del muelle utilizado. Para ello usamos dos métodos distintos. El primero consiste en calcular el estiramiento del muelle según la masa colocada, obteniendo así una dependencia lineal entre la masa y el alargamiento producido. El segundo método consiste en calcular la frecuencia de oscilación, y a partir de ahí calcular la constante recuperadora k . Para esto contábamos como material con un resorte de masa 22 g., del cual pendía una varilla de masa 30 g., con una pesa en su parte superior de masa 11.5 g., y una bola grande en su parte inferior de masa 50 g.

1º Método:

En el primer método, medimos en una varilla, colocando guías, el alargamiento del muelle con la varilla y una pesa. Le añadimos una pesa más y volvemos a medir el alargamiento. Así obtenemos lo que se alarga el muelle con una pesa. Realizamos esta operación sucesivamente colocando una a una las 7 pesas. Si realizamos una gráfica entre la masa colocada y el alargamiento obtenido, vemos que conseguimos casi una línea recta. Es decir, existe una dependencia lineal entre alargamiento y masa colocada. Sabemos que en este caso,

$$mg = k\Delta x$$

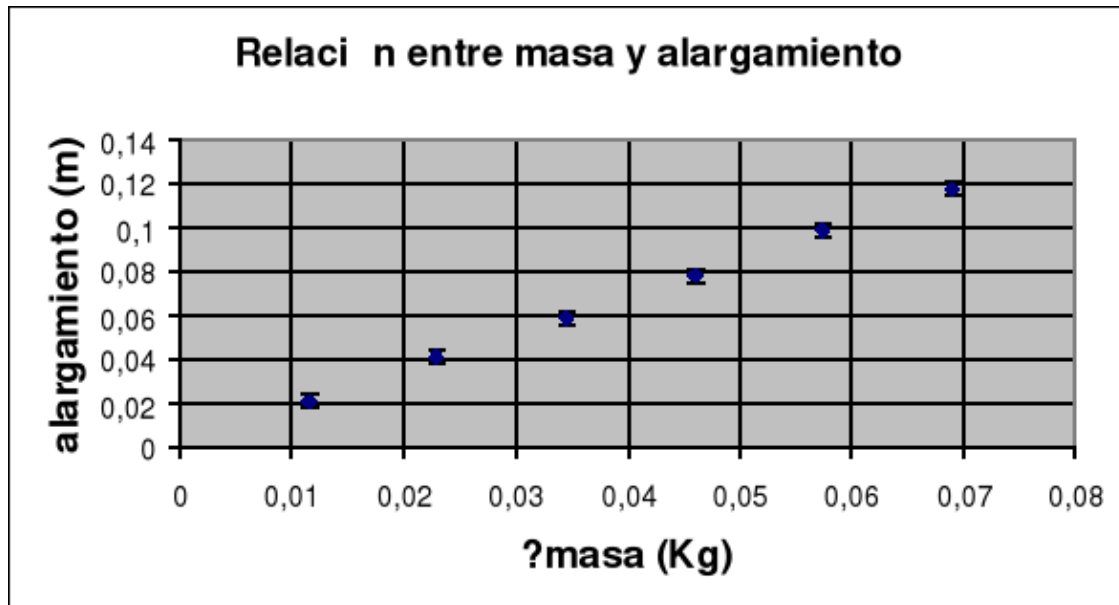
$$, \text{ y por tanto } \Delta x = \frac{g}{k} m$$

Los datos obtenidos al realizar este primer experimento fueron:

Masa (Kg)	0.011	0.023	0.034	0.046	0.057	0.069
Alargamiento (m) $\pm 10^{-3}m$	0.021	0.041	0.059	0.078	0.099	0.110

Tabla 1: relación entre masa y alargamiento.

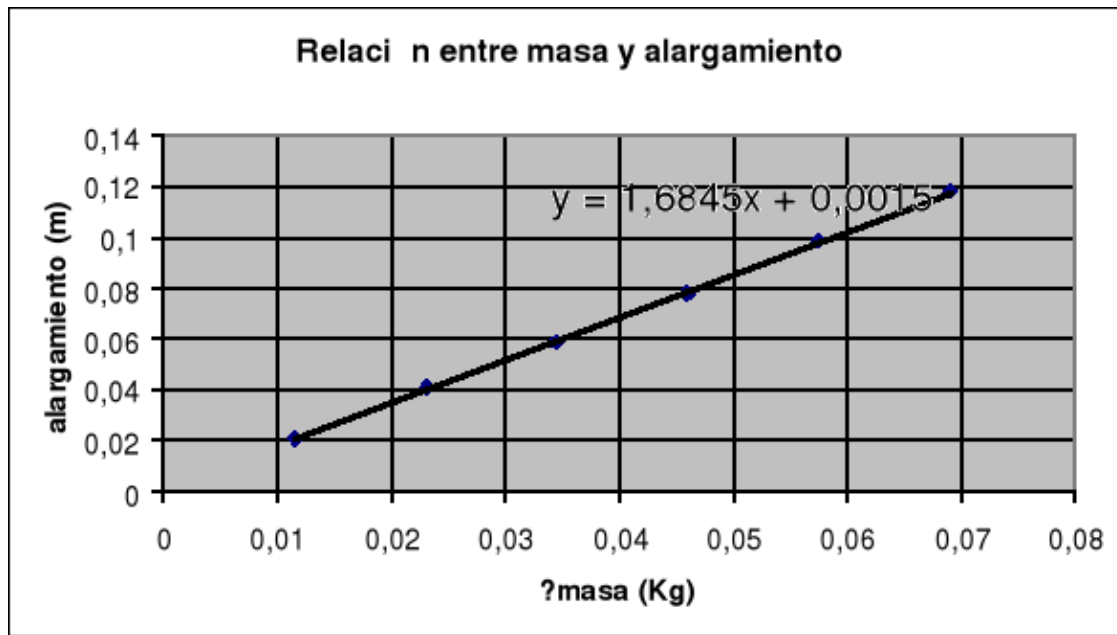
Tomamos como masa toda la masa que pendía del resorte, es decir, la suma de la varilla, la bola grande, una pesa y un tercio de la masa del muelle. Y añadimos sucesivamente 0.0115 Kg, que es la masa de cada una de las pesas. Por lo tanto hemos considerado al hacer la tabla y la gráfica el Δm



Este método creemos que es más exacto que el siguiente método, ya que el segundo método, al tener que realizar mediciones mientras el resorte está en movimiento, siempre es menos exacto que si se realizan mediciones mientras el resorte está quieto.

En el primer caso, que había que medir la distancia entre las dos guías una vez que el resorte estaba en reposo, habría que contra el error al utilizar un metro, 1 mm, así como un posible error al colocar las guías, que consideramos de más o menos unos 2 mm. En total, consideramos un error total en las mediciones de 0.003 m. Este error se arrastra lógicamente al hallar la constante recuperadora del resorte. Pero como en este caso al realizar la gráfica la hemos aproximado sabiendo que debería de ser una recta, creemos que el posible error disminuye. Como en la gráfica lo que nos interesa para calcular k es la pendiente, los posibles errores que hayamos podido cometer al aproximar la gráfica los consideramos mínimos, y por tanto este es el mejor método.

Lo que ahora nos interesa es realizar una aproximación lineal de esta gráfica, para poder así hallar su pendiente.



Sabemos por definición que la pendiente de la recta (m) que se obtendría de aquí sería $\frac{g}{k}$

, y a su vez podemos calcular geométricamente la pendiente de la recta, y el punto de corte con el eje de coordenadas mediante las fórmulas:

$$c = \bar{y} - p\bar{x}$$

$$\text{con } D = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 0.013992$$

kg^2

Para facilitar las operaciones hemos elaborado la siguiente tabla:

xi (kg)	yi (m)	xiyi (mkg)	xi ² (kg ²)	yi ² (m ²)
0.24	0.408	0.020001	0.30192	0.011932

Tabla 2: tabla para facilitar operaciones.

De donde obtenemos la pendiente como $1.68 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$ y el punto de corte con el eje de coordenadas como $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Pero la medida del alargamiento lleva un error que es arrastrado hasta dichos pendiente y punto de coordenadas. Para hallarlo nos valemos de las siguientes fórmulas:

$$\Delta c = \Delta y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}} = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{con } \Delta y = \frac{\Delta y_i}{n-2} = 3.8928 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{y } \Delta y_i = y_i - (px_i + c)$$

Como antes hemos dicho que la pendiente era g/K , despejando obtenemos que :

$$K=5.83 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$$

Pero esta pendiente lleva error, que es arrastrado a nuestra constante de la siguiente manera:

$$\Delta K = \left[\Delta K_p^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{donde } \Delta K_p = \frac{K}{p} \Delta p = \frac{-g}{p^2} \Delta p = 2.8 \cdot 10^{-1} \text{ kg s}^{-2}$$

por lo que resulta que:

$$K=5.83 \pm 2.8 \cdot 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$$

2º Método:

En el segundo método para obtener la constante recuperadora del muelle, utilizamos la frecuencia de oscilación. Aplicamos una pequeña fuerza al muelle, que tiene una pesa (además de la varilla y la bola grande), de manera que empiece a oscilar suavemente, y con un cronómetro contamos el tiempo que tarda en oscilar 20 veces. Dividimos el tiempo obtenido entre 20 y así obtenemos el tiempo que tarda en realizar una oscilación completa. Repetimos el proceso con 4 pesas y con las 7 pesas. Teniendo el periodo (T) del muelle, podemos obtener su frecuencia de oscilación, ya que $f = 1/T$. Una vez conseguida esta frecuencia, podemos relacionarla con la constante recuperadora mediante $K = 4\pi^2 m / T^2$, donde utilizaríamos como masa toda la masa que pende del resorte, contando con el propio resorte, la varilla, la bola grande y las pesas utilizadas en cada caso. Los resultados obtenidos fueron:

Masa (Kg)	0.098	0.130	0.160
Periodo (s) $\pm 0.1s$	0.810	0.950	1.000
K (kg/s ²)	5.800	5.800	5.800

Tabla 3: relación entre masa, período y constante.

Con este método es muy probable cometer errores al medir el tiempo de las oscilaciones, al utilizar un cronómetro etc, por lo tanto hemos contado con un error añadido en cada periodo de 0.1 seg. Este error se ve reflejado en las constantes recuperadoras halladas, cuya media hemos calculado como 5.820 kg/s^2 .

Esta constante depende de la frecuencia, y ésta lleva un error que será arrastrado hasta nuestra constante de esta forma:

$$\sigma_m = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}^{1/2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg / s}$$

Por lo que obtenemos el valor de la constante:

$$K=5.820 \pm 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}^2$$

Discusión

Como podemos ver, las k obtenidas mediante el primer y el segundo método son similares, por lo que confiamos en que no habrá mucha desviación respecto al valor verdadero. Pero consideramos como mejor el segundo método ya que es mucho más preciso que el primero debido a que el margen de error es mucho menor. Esta diferencia en el error puede deberse a que en el segundo método hemos realizado numerosas medidas del período de oscilación, y de esta manera disminuimos la propagación de los errores. De cualquier modo, ambos métodos son bastante fiables porque hemos trabajado con cronómetros digitales y tienen un margen de error muy bajo.

Oscilaciones forzadas; resonancias mecánicas:

Tratamiento teórico

La ecuación de movimiento de un oscilador mecánico, amortiguado y forzado es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -K x - C \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t)$$

donde m es la masa oscilante, x su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, K la constante recuperadora, C el coeficiente propio de la partícula y la viscosidad del medio y:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

la fuerza impulsora periódica.

La solución estacionaria viene dada por:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

La amplitud y el desfase de esta oscilación dependen de la frecuencia de excitación de la siguiente manera:

$$A(\omega) = \frac{F_0 / m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$\text{donde } \omega_0 = \sqrt{K / m}$$

es la frecuencia propia (natural) de oscilación del sistema en ausencia de amortiguamiento y fuerza, y

$$\gamma = C / 2m$$

es el coeficiente de amortiguamiento.

Como conocemos la curva que presenta $A(\omega)$, podemos deducir que:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Si este amortiguamiento es débil, esta frecuencia es muy parecida a la de oscilación libre, de donde sacamos que:

$$\frac{A_{max}}{\sqrt{2}} = 2\gamma$$

Con la ayuda de esta introducción teórica vamos a medir la resonancia en un oscilador mecánico amortiguado

y forzado.

Método operativo

1º parte:

Aquí comienza la segunda parte de la práctica, en la que vamos a estudiar el factor de amortiguamiento del muelle, así como su frecuencia de resonancia. Sabemos por la teoría que esta frecuencia de resonancia se acerca mucho a la frecuencia natural del oscilador, por lo tanto esto va a ser lo primero que vamos a intentar determinar.

Tenemos el muelle, del cual pende una varilla con una pesa en la parte superior y una bola pesada en la parte inferior. Hacemos una pequeña fuerza tirando del muelle de manera que comienza a oscilar levemente. Utilizando otra vez el cronómetro, medimos los tiempos de oscilación del muelle. Medimos el tiempo que tarda en realizar unas 20 oscilaciones como mínimo, para obtener mayor precisión en los resultados. Luego dividimos el tiempo obtenido entre las oscilaciones contadas y así obtenemos el periodo de oscilación, es decir, el tiempo que tarda en realizarse una oscilación completa. Repetimos este mismo proceso tres veces, para asegurar el resultado. Teniendo el periodo, como sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

, entonces calculamos la frecuencia de oscilación, que es la natural del resorte. Obtuvimos los siguientes resultados:

Periodo (s) $\pm 0.1s$	0.80	0.82	0.82
Frecuencia natural del resorte (Hz)	7.80	7.60	7.60

Tabla 4:relación entre período y frecuencia.

Viendo los resultados, vemos que al calcular el período hemos obtenido resultados bastante diferentes. Esto es debido al error al determinar el tiempo de la oscilación. Por esto podemos calcular el error en 0.02 segundos. Este error a su vez se ve reflejado en el cálculo de la frecuencia. Por ello hacemos la media de las frecuencias obtenidas en las tres mediciones, y sale aproximadamente una frecuencia natural de 7,6 rad/s.

=7.6 rad/s

Pero esta medida de la frecuencia presenta el error propio de la media, que adopta la siguiente forma:

$$\sigma_m = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} = 6.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad / s}$$

Por lo que nuestra frecuencia natural final se presenta de esta manera:

=7.66 $\pm$ 7·10⁻² rad/s

A continuación, metimos la parte inferior del resorte en una disolución de glicerina en agua, de manera que obteníamos una oscilación amortiguada. A su vez, uníamos el resorte mediante un cable a un motor, el cual proporciona al muelle una frecuencia controlable en la parte superior del mismo, con una amplitud conocida $A_0 = 1.45$

cm. Así tenemos ya nuestra oscilación amortiguada forzada. Vamos probando diferentes frecuencias, e intentamos acercarnos de este modo a la frecuencia de resonancia, es decir, la frecuencia donde la amplitud es

máxima. Cuando creemos haber encontrado dicha frecuencia, colocamos unas guías que señalan la distancia entre la parte inferior de la bola cuando está en los extremos de la oscilación. De esta manera obtenemos el doble de la amplitud máxima. Hicimos estas comprobaciones 5 veces, de manera que obtuvimos los siguientes resultados:

Frecuencia resonancia (rad/s)	7.500	7.700	7.430	7.450	7.400
Amplitud máxima (m) $\pm 10^{-3}$ m	0.071	0.068	0.069	0.071	0.070

Tabla 5: relación entre frecuencia y amplitud.

Para obtener las frecuencias de resonancia, utilizamos el cronómetro, que se programa para medir el tiempo que tarda el motor en realizar 6 oscilaciones. Luego dividimos el tiempo obtenido entre 6 y aplicando la fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$

, conseguimos la frecuencia resonancia. Este método para obtener la resonancia no es muy exacto, ya que es muy difícil ver a ojo cuándo la amplitud es máxima. Por ello hemos considerado en la amplitud un error de 0.1 cm. Sin embargo, contamos con una gran precisión para hallar el período, ya que esta controlado automáticamente por el cronómetro, y no tenemos que medirlo manualmente.

Según los datos conseguidos, podemos considerar la frecuencia de resonancia como la de 7.45 rad/s, ya que fue la que más amplitud nos dio. Si la comparamos con la frecuencia natural del muelle, podemos comprobar que se acercan, tal como nos dice la teoría que debía ocurrir.

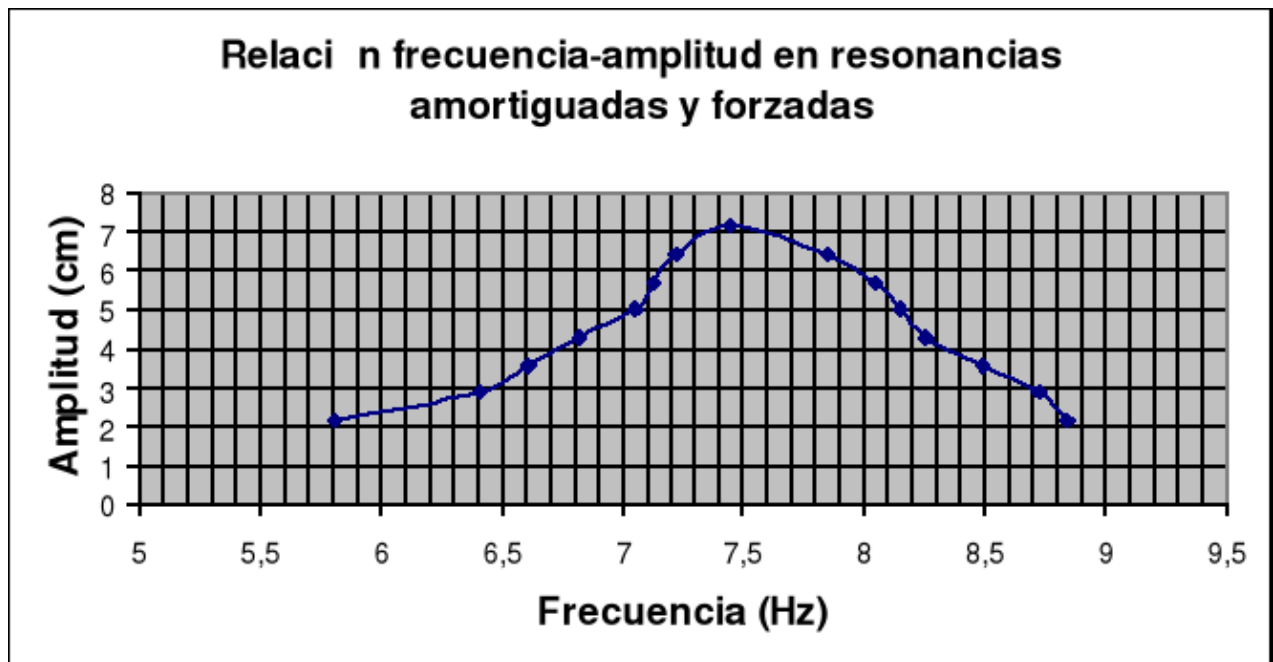
$$\omega_R = 7.45 \text{ rad / s}$$

A continuación, partiendo la frecuencia de resonancia que hemos calculado y su amplitud máxima, empezamos a calcular $0.9 \cdot A$, $0.8 \cdot A$.. etc, donde A es la amplitud máxima. Colocamos las guías en la varilla de manera que entre ellas halla el doble de los datos obtenidos, y comenzamos a probar las frecuencias hasta conseguir la adecuada, por encima y por debajo de la de resonancia. Este proceso lo repetimos hasta con $0.3 \cdot A$, realizando la siguiente tabla, donde se encuentran en la parte de arriba las frecuencias que están por encima de la de resonancia, y en la parte de abajo las frecuencias que se encuentran por debajo de la de resonancia.

	$\sim 0.9 \cdot A$	$\sim 0.8 \cdot A$	$\sim 0.7 \cdot A$	$\sim 0.6 \cdot A$	$\sim 0.5 \cdot A$	$\sim 0.4 \cdot A$	$\sim 0.3 \cdot A$
(rad/s)	7.850	8.050	8.150	8.260	8.490	8.720	8.84
A(m) $\pm 10^{-3}$	0.064	0.057	0.050	0.042	0.035	0.028	0.021
(rad/s)	7.22	7.13	7.05	6.82	6.61	6.41	5.81
A(m) $\pm 10^{-3}$	0.064	0.057	0.050	0.042	0.035	0.028	0.021

Tabla 6: relación entre frecuencia y amplitud.

A partir de estos datos elaboramos una gráfica, como se puede ver debajo, que muestra la relación entre las frecuencias y la amplitud. Podemos ver de este modo la frecuencia de resonancia, que sale aproximadamente lo obtenido en el experimento anterior, aproximadamente 7.5 rad/s.



A partir de los datos que tenemos, podemos hallar el factor de amortiguamiento del resorte, gracias a la fórmula $\omega = \sqrt{\omega_0 - 2\gamma}$, donde ω es la frecuencia de resonancia, ω_0 es la frecuencia natural del oscilador y γ es el factor de amortiguamiento.

En la teoría, en una altura que sea $\frac{1}{\sqrt{2}}$

la amplitud en la frecuencia de resonancia, la anchura de la gráfica será 2. En este caso, como el factor de resonancia es bastante elevado, entonces la gráfica es ancha y no muy empinada. Si el factor de resonancia fuera despreciable con respecto a la frecuencia natural del oscilador, la gráfica sería muy alargada en la frecuencia de resonancia, y muy estrecha. Así será la gráfica cuando utilicemos la bola pequeña en vez de la grande.

Los factores de amortiguamiento se pueden hallar pues de tres maneras:

+ midiendo en la propia gráfica la anchura a una altura $\frac{1}{\sqrt{2}}$

la amplitud máxima (0.05m). A esa altura se cumple que ~ 2

+ utilizando la fórmula $\omega = \sqrt{\omega_0 - 2\gamma}$

+ a partir de $\gamma = \frac{\omega_0 A_0}{2A_{\max}}$

γ_1	0.5500
γ_2	0.6100
γ_3	0.7760

Tabla 7: valor de γ según el método utilizado.

Estos coeficientes de amortiguamiento llevan error porque los datos de los que proceden los llevan, por lo que es necesario hallarlos.

$$\sigma_m = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} = 6.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$$

En teoría los tres factores de amortiguamiento obtenidos por los diferentes métodos deberían asemejarse, pero en ese caso, aunque los dos últimos se acercan el uno al otro, el obtenido por el primer método lleva consigo un error muy considerable. Tal vez el error arrastrado al calcular la frecuencia de resonancia o la natural del resorte haya provocado esto. Haciendo la media, calculamos que el factor de resonancia vale aproximadamente 0.6453. Por lo que nos queda que:

$$= 0.6453 \pm 6.7 \cdot 10^{-2}$$

2º parte:

Ahora repetimos la experiencia anterior, pero tomando en vez de la bola grande la bola pequeña, y colocando dos pesas mas en la varilla, haciendo un total de 3 pesas. Primero de todo, como en el caso anterior, vamos a hallar la frecuencia natural del resorte, ya que sabemos que ésta se acerca bastante a la de resonancia. Para ello, tiramos del muelle suavemente para que se ponga a oscilar, y contamos el tiempo que tarda en realizar 20 oscilaciones completas, para conseguir mayor exactitud en nuestros cálculos. De este modo calculamos el período del resorte, y así podemos calcular mediante la fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$

la frecuencia natural del muelle. Los datos obtenidos en la experiencia fueron:

Período natural del resorte (s) $\pm 0.1s$	0.846	0.849	0.847
Frecuencia natural del resorte (rad/s)	7.420	7.410	7.410

Tabla 8: relación entre período y frecuencia.

Hay que tener en cuenta el error cometido en la medición del periodo, ya que es muy poco preciso manejar a ojo el cronómetro, porque se pueden cometer fácilmente errores. En este caso, los períodos son bastante semejantes, pero a pesar de esto también consideramos un error de 0.002 seg. La frecuencia media calculada es de 7.416 rad/s.

A continuación, repetimos el proceso anterior, intentando encontrar la frecuencia de resonancia. Unimos el resorte mediante un cable a un motor que proporciona al resorte una oscilación con frecuencia controlable, de amplitud fija $A_0 = 1.45$

cm. Vamos probando las diferentes frecuencias en el motor, hasta encontrar la que creemos de mayor amplitud. Entonces, utilizando el cronómetro, se mide el tiempo que tarda en realizar 6 oscilaciones completas. Dividimos entre 6 para conseguir el período, y a partir de ahí conseguimos la frecuencia. Según la experiencia, obtuvimos los siguientes datos:

Frecuencia resonancia (rad/s)	7.400	7.460	7.600	7.390	7.570
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

Amplitud máxima (cm) $\pm$ 10^{-3}	10.250	10.100	10.200	9.850	9.900
--	--------	--------	--------	-------	-------

Tabla 9:relación entre frecuencia y amplitud.

Según este cuadro, la frecuencia de resonancia es 7.40 rad/s, la cual provoca una amplitud de 10.25 cm. En este cálculo se pueden encontrar muchos errores, ya que no podemos determinar exactamente cuándo la amplitud es máxima. Por ello hemos considerado un error de 0.002 m en el cálculo de la amplitud.

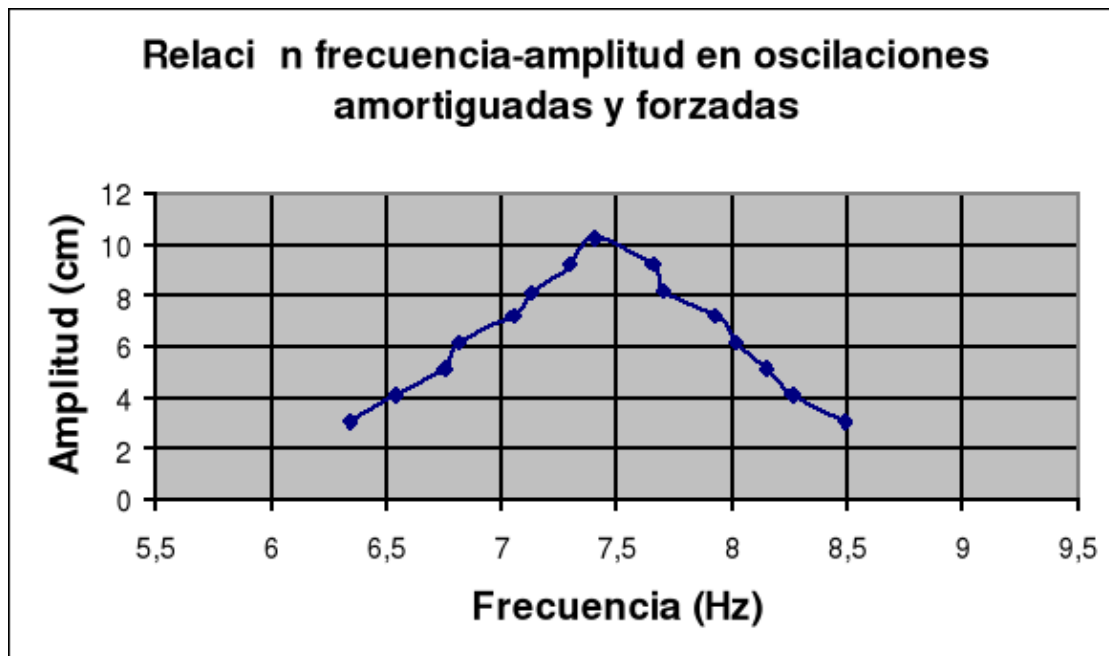
Tomando los datos anteriores, hemos calculado la novena parte de la amplitud y la hemos colocado con las guías. A continuación comenzamos a variar las frecuencias hasta conseguir una en la que coincidan los extremos. Aplicando esto hasta la tercera parte de la amplitud, hemos recogido estos datos.

	$\sim 0.9 \cdot A$	$\sim 0.8 \cdot A$	$\sim 0.7 \cdot A$	$\sim 0.6 \cdot A$	$\sim 0.5 \cdot A$	$\sim 0.4 \cdot A$	$\sim 0.3 \cdot A$
Frecuencia (rad/s)	7.660	7.700	7.930	8.020	8.150	8.260	8.490
Amplitud (cm) $\pm 10^{-3}$	9.220	8.200	7.170	6.150	5.120	4.100	3.070
Frecuencia (rad/s)	7.300	7.130	7.050	6.820	6.750	6.540	6.340
Amplitud (cm) $\pm 10^{-3}$	9.220	8.200	7.170	6.150	5.120	4.100	3.070

Tabla 10:relación entre amplitud y frecuencia.

Una vez creemos haber encontrado la frecuencia adecuada, el cronómetro nos mide el período muy precisamente, y conseguimos de este modo la frecuencia. El encontrar la frecuencia adecuada para cada amplitud también arrastra muchos errores, porque el método no es muy preciso. Tenemos que calcularlo casi a ojo por lo que consideramos también un error en la frecuencia de 0.1 rad/s.

A continuación hemos realizado una gráfica con la tabla anterior, en la que se ve la relación entre frecuencia y amplitud.



La gráfica nos muestra la relación entre la frecuencia y la amplitud. Podemos observar que es más alargada y estrecha que en la primera parte, por lo que a su vez, el factor de amortiguamiento en este caso también va a ser menor que el calculado en la primera parte.

A continuación viene el cálculo del factor de amortiguamiento, otra vez con los tres métodos utilizados anteriormente:

+ midiendo en la propia gráfica la anchura a una altura la amplitud máxima

+ utilizando la fórmula $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma}$

+ a partir de $\gamma = \frac{\omega_0 A_0}{2A_{\max}}$

γ_1	0.450
γ_2	0.500
γ_3	0.505

Tabla 11: valor de γ según el método utilizado.

En esta ocasión, al contrario que en la anterior, los factores de amortiguamiento calculados se acercan más, y por tanto arrastran menos errores. El factor de amortiguamiento medio calculado vale 0.485. Pero este valor tiene error, que se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_m = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} = 1.7 \cdot 10^{-2}$$

Así pues, nuestro coeficiente de amortiguamiento adopta la siguiente forma:

$$= 0.485 \pm 1.7 \cdot 10^{-2}$$

Discusión

El método más exacto es el tercero porque, al depender de la frecuencia y de la amplitud, nos aproximamos de forma más certera al valor verdadero del coeficiente de amortiguamiento. Los errores encontrados no son demasiado notables, lo que nos hace pensar que hemos hecho un buen uso de las operaciones.