

Índex

- **Introducció** pàg. 3
- **Història** pàg. 4
- **Trigonometria Plana** pàg. 14
 - ◆ Trigonometria i triangles pàg. 14
 - ◆ Les raons trigonomètriques pàg. 15
 - ◆ La circumferència trigonomètrica pàg. 17
 - ◆ Relacions entre els angles pàg. 20
 - ◆ Les raons trigonomètriques en combinacions d'angles pàg. 20
 - ◆ Triangles no rectangles pàg. 22
 - ◆ Problemes pàg. 24
 - ◆ Aplicacions de la trigonometria plana pàg. 26
- **Trigonometria Esfèrica** pàg. 31
 - ◆ Les raons en la trigonometria esfèrica pàg. 33
 - ◆ Triangles esfèrics rectangles pàg. 36
 - ◆ Problemes pàg. 39
- **Conclusió** pàg. 41
- **Bibliografia** pàg. 43

Introducció

L

a trigonometria sempre ha estat un camp de les matemàtiques que ha sigut clau per a la resolució de problemes de fins i tot ciències que són molt diferent a les matemàtiques com ara l'astronomia. Per això es mereix un gran apartat dins de les matemàtiques.

Degut a això he fet aquest treball amb molt d'entusiasme ja que és una de les branques de les matemàtiques que destaca per un grau de complexitat i imaginació major a qualsevol altre i fa que l'estudi de la trigonometria resulti més entretingut. Un factor que també ha influït ha estat el fet que de les matemàtiques només s'estudia les aplicacions i la teoria, però la evolució d'aquestes al llarg de la història és un tema que si no és que un es dedica en aquest tema, no s'arribarà a conèixer mai. Per això s'inclou en el treball una important part que explica l'evolució de la trigonometria al llarg de les èpoques de la humanitat amb els seus principals representants.

Degut a totes aquestes raons l'estudi d'aquest camp de les matemàtiques resultarà el més complert possible, tenint en compte el nivell de coneixements de matemàtiques de l'autor, en el que s'analitzarà des del punt més insignificant de l'estudi de triangles fins al més complex.

Història

L

a trigonometria es una de les disciplines que més lentament ha evolucionat. Es pot comparar amb d'altres relacionades amb ella que ho han fet més ràpidament com és l'àlgebra, la geometria o l'aritmètica. Però gràcies a la investigació astronòmica va anar progressant. La trigonometria va molt lligada a l'astronomia ja que gràcies a ella poden calcular-se distàncies entre astres, mides, etc.. Però el més difícil és i serà esbrinar quin és el moment en que la trigonometria va començar. Hi ha teories que diuen que en l'antiga Babilònia i l'antic Egipte ja es veien els primers indicis de trigonometria, sobretot en els egipcis els quals podrien haver-la emprat en mesures de piràmides i altres monuments. Una de les teories també diu que els egipcis van ser els primers en mesurar els angles en graus, minuts i segons. Però on va començar a estudiar-se com a disciplina de les matemàtiques va ser a l'antiga Grècia on un astrònom, matemàtic i geògraf anomenat Hiparco de Nicea va ser considerat com a inventor de la trigonometria plana i esfèrica. Va néixer al 161 aC. a Nicea i va morir al 127 aC. es creu que a Alexandria. Queden molt poques obres d'aquest gran matemàtic, entre elles la seva obra principal conservada gràcies a Estrabó i Ptolomeu. Entre els fets més importants d'Hiparco es troba l'ús per primer cop de cordes d'arc per a descriure i treballar la trigonometria. Per això Hiparco va haver de construir taules que relacionessin aquests arcs amb els angles corresponents del sistema sexagesimal dels egipcis. Un altre dels descobriments d'aquest personatge va ser la precessió dels equinoccis de la Terra calculant-la en 36" per any, xifra força pròxima a la real (50").

El segon gran científic a mencionar es Menelau d'Alexandria ciutadà de Roma en el segle I dC. La seva major aportació a la matemàtica d'aquell moment va ser el descobriment de la trigonometria esfèrica i la independència de la trigonometria respecte a l'astronomia. La seva principal obra va ser *'Las Esféricas'* escrita en tres volums on hi ha el desenvolupament de la trigonometria esfèrica. Malauradament aquesta obra no s'ha pogut conservar en l'idioma original i ha arribat a partir de edicions llatines, cosa que fa que hi contingui més correccions dels editors que teories del propi Menelau. La primera menció sobre un triangle esfèric es troba en el primer volum d'aquesta obra definit com a *'l'espai limitat per cercles màxims en la superfície de l'esfera'*. També explica que totes les propietats dels triangles plans també es poden aplicar als triangles esfèrics i que aquests últims tenen, amés, propietats pròpies. Però és en el tercer volum on Menelau exposa tots els seus coneixements de trigonometria esfèrica. És aquí on enuncia el teorema batejat amb el seu nom el qual permet resoldre alguns problemes relacionats amb els triangles esfèrics. Més tard va ser Ptolomeu qui va utilitzar aquesta fórmula. Claudi Ptolomeu era un gran astrònom, matemàtic, físic i geògraf nascut a Ptolemais Hermii, ciutat grega de la Tebaida (Egipte), l'any 100 dC., morint 70 anys més tard. La seva primera i millor obra, coneguda com a *Almagesto*, sintetitza i ordena tota els coneixements astronòmics grecs, sobretot els d'Hiparco. Aquesta obra era originalment escrita en grec però al traduir-se en àrab el nom va quedar com a al-Majisti (Obra Magna). Després de les traduccions llatines va quedar com a *Almagesto*. En l'obra Ptolomeu plantejava una teoria geomètrica per a explicar matemàticament els moviments i posicions aparents dels planetes, el Sol i la lluna contra un fons d'estrelles immòbils, tot això sense incloure cap descripció física dels objectes de l'espai. Ptolomeu també va contribuir, aplicant les seves teories, a la construcció d'astrolabis i rellotges de sol i aplicant els seus coneixements d'astronomia a la astrologia i a la creació d'horòscops.

Els grecs no varen ser els únics interessats en els problemes trigonomètrics, els hindús també ho estaven. Malauradament no es tenen suficients dades cronològiques per a fer un estudi més ample. Els coneixements més antics de la matemàtica hindú daten del segle V dC. Es tracta d'un conjunt de cinc treballs científics teòrics anomenats *Siddh ntas*. Un d'aquests treballs és l'anomenat *S rya Siddh nta* en el qual es veu per primer cop l'aparició dels sinus, cosinus que es veuen explicats en un altre d'aquests treballs anomenat *Paulisa Siddh nta*. Però aquests sinus no representaven el que representen ara. Llavors el sinus era la longitud del costat contrari de l'angle d'un triangle rectangle amb una hipotenusa ja donada.

Ja en el segle VIII la ciència grecorromana va decaure definitivament l'imperi de l'Islam va aconseguir dominar un territori major al de l'imperi romà. Gràcies als grans savis l'imperi, que encara que fossin d'ideologies o de procedències diferents treballaven en equip, van traduir tots els treballs grecs van ser traduïts i estudiats. Entre tots els coneixements que van adquirir la trigonometria va significar un lloc molt important per als països islàmics. Una de les aplicacions més importants per als islàmics va ser en la necessitat de conèixer la direcció de la Meca per a poder construir degudament les seves mesquites, ja que totes elles

havien de tenir la quibla (lloc de les mesquites on els musulmans resen) orientada cap a la Meca. Per a trobar la direcció de la Meca des de tan lluny van haver de fer ús a la trigonometria.

Entre les primeres obres en les que els àrabs es basaven es trobaven el *Almagesto* de Ptolomeu (aquest va ser el primer cop que es va traduir) i les *Esfèriques* de Menelao. Molts matemàtics àrabs van treballar les obres de Menelao i Ptolomeu com Ab Nasr, Al-B r n o T bit b. Qurra, editant-les, demostrant-les i fins i tot corregint-les, però va ser Nas r al-D n al-T s el que va destacar com a gran científic en trigonometria esfèrica. Abu Jafar Muhammad Ibn al-Hasan Nas r al-D n al-T s va ser un dels més grans científics, matemàtics, astrònoms, filòsofs, teòlegs i físics de la seva era. Va néixer a Tus, Khurasan (actual Iran) l'any 1201 i va morir el 1274. Va estudiar ciències i filosofia sota el tutelatge del seu mestre Kamal al-Din Ibn Yunus. Al-D n al-T s va ser segrestat per agents de Hasan Bin Sabah's i portat a Alamut. Quan Alamut va ser conquerida per Halagu Khan el 1256, aquest va quedar impressionat per les excepcionals habilitats de al-D n al-T s i el va nomenar com a un dels seus ministres. El 1262 va construir un observatori a la ciutat de Meragha i va continuar els seus estudis i teories. A part dels magnífics instruments de càlcul de que disposava a l'observatori, al-D n al-T s va dissenyar-se'n i construir-se'n de nous. Va dissenyar també taules en les que es representaven els moviments dels astres i les posicions d'aquests respecte d'altres amb força precisió. En la seva vessant matemàtica va estudiar la trigonometria esfèrica aconseguint sis fórmules fonamentals per a la resolució de triangles esfèrics. Però la seva contribució més important a la matemàtica, va ser el fet de considerar, tant la trigonometria plana com la trigonometria esfèrica, com una nova disciplina matemàtica.

Tornat un segle enrera, cal destacar a un dels primers matemàtics àrabs orientals interessats en l'estudi de la trigonometria esfèrica. Habas al-Hasib va donar les primeres taules amb l'aparició de la tangent actual, a partir d'observacions i mesures del sol amb un gnòmon. Però al-Battani pot ser considerat com al més important del seu temps. Al-Battani va dissenyar una taula de cotangents per graus i va formular un teorema molt similar a l'actual amb el que es pot aconseguir, a partir del cosinus de l'angle oposat i els sinus i cosinus dels altres cantons, el cosinus d'un cantó d'un triangle esfèric.

A Espanya, més concretament a al-Andalus, tots aquests coneixements van poder arribar principalment per els viatges amb motius religiosos i per el comerç ja que els comerciants van dedicar-se a vendre vells manuscrits amb fórmules, teories i treballs realitzats per matemàtics àrabs. Va haver-hi matemàtics, com `Abd Allah ibn Masarra que van dedicar-se, fins i tot, a vendre llibres i a fer de professors. Ja per l'època final del regnat d'Abd al-Rahman II (206-238 o 822-838) apareixen a Córdoba xifres àrabs descrivint algunes de les obres àrabs més importants que expliquen que simbolitzen les xifres àrabs i el seu ús. Tots aquests fets signifiquen doncs que al-Andalus ja disposava per a l'any 900 d'una taula de sinus i cosinus i al 960 del primer teorema que enuncitava les relacions entre aquestes magnituds, en aquest cas es tracta del teorema del cosinus que en aquella època la seva forma era: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$. Tot aquest desenvolupament de la trigonometria àrab es deu en major part als estudis de Menelao i Ptolomeu en les seves obres: *Les Esfèriques* i l'*Almagesto* respectivament. En aquesta època de l'Espanya musulmana van aparèixer molt matemàtics importants com Maslama al-Mayriti o Abu Abd Allah Muhammad ibn Mu'ad aquest últim com a figura indiscutible de l'època gràcies a les seves interpretacions i ampliacions de teoremes de personatges com Ptolomeu o Menelao.

A partir de l segle XII l'islamisme va començar a decaure. Els reis cristians que van estar molt interessats en la seva ciència van decidir construir escoles de traducció a les quals gent de tot arreu acudia per a traduir les obres dels àrabs. Una de les escoles va ser la de Toledo que es va consolidar com la més important de l'època.

Per tal de que tots els coneixements d'aquesta part de les matemàtiques fossin coneguts per tota Europa, va aparèixer un personatge que es podria relacionar amb Nasir al-Din al-Tusi, anteriorment comentat ja que els dos van fer una feina semblant: estendre els seus coneixements, cadascun per les seves regions. Johann Müller és el personatge en qüestió. Müller va néixer un 6 de juny de 1436 a Königsberg, arquebisbat de Mainz (actual Alemanya). També era conegut com a Regiomontanus degut a la traducció al llatí del seu poble

(Königsberg Regiomontanus Rei de la muntanya). Ja a l'edat de 25 anys va aconseguir ser catedràtic d'astronomia a la universitat de Viena, omplint el lloc que el seu mestre Peurbach va deixar buit i més tard va viatjar a Itàlia per a perfeccionar el seu grec i així poder acabar la traducció de l'Almagest que el seu mestre va començar. El 1468 va ser nomenat com a astrònom oficial del rei Mathias Corvinus d'Hongria i 3 anys més tard va establir-se a Nuremberg on un ric comerciant va posar a la seva disposició un taller on Müller va construir diversos aparells astronòmics i una impremta per a que pogués editar els seus descobriments. Gràcies als instruments que va fabricar va poder observar un cometa molt brillant i estudiar-ne els seus moviments. Actualment aquest cometa és anomenat cometa Halley. El 1476 Müller va morir, però va deixar un important tractat de trigonometria plana i esfèrica, en el qual s'explicaven tots els seus descobriments i les característiques anteriorment esmentades d'aquesta part de les matemàtiques, que no va ser publicat fins més de mig segle després, al 1533.

Quasi mig segle després de la mort de John Müller neix el 1514 Goerges Joachim també conegut com a el Rètic degut al lloc on va néixer: la província romana de Rhaetia. Durant els primers catorze anys de la seva vida va viure amb el seu pare Georg Iserin, però el 1528 van condemnar-lo a mort per suposada bruixeria i Georges Joachim va haver d'agafar el cognom de la seva mare: de Porris, que més tard va canviar-lo per la traducció alemanya del cognom: von Lauchen. Joachim va estudiar a la universitat de Wittenberg graduant-se tres anys més tard el 1536. Més tard va ensenyar matemàtiques i astronomia en la mateixa universitat. Però no va ser fins a ven començat el 1541 quan Joachim va fer avanços en trigonometria gràcies a les publicacions de les seccions trigonomètriques de l'obra de Copèrnic, *De Revolutionibus*, i introduint-hi taules fetes per Joachim de sinus i cosinus, encara que ell no les anomenava per aquest nom. Però el seu treball més important va ser a l'obra *Opus Palantium de triangulis* on Joachim feia servir ja les sis raons trigonomètriques actualment conegudes; sinus, cosinus, tangent, cotangent, secant i cosecant ; i donava també taules per a la resolució de totes sis. Aquesta obra no va ser publicada fins el 1596 varis anys després de la mort de Georges Joachim.

Un altre gran matemàtic va ser el conegut François Viète. Viète va néixer el 1540 a Fontenay-le-Comte a l'actual província de Vendée, França. De bon principi va estudiar la carrera de dret, com el seu pare que era advocat, i va treure's el títol el 1560. Quatre anys després de començar a treballar Viète va voler canviar de carrera i va dedicar-se a fer de tutor de Caterina de Parthenay filla de la famosa Antonieta de Aubeterre. En els temps lliures que Viète tenia es dedicava a les matemàtiques publicant resultats obtinguts per ell mateix. Els mètodes que Viète feia servir a l'hora de resoldre problemes matemàtics eren similars als dels matemàtics àrabs de ja feia temps. Per això a Viète se'l podia comparar amb Nasir al-Din al-Tusi ja que utilitzava un plantejament molt semblant al d'aquest famós matemàtic àrab però sense haver-se basat en ell. Entre algunes de les seves troballes es troba la incorporació del triangle polar en la trigonometria esfèrica i el descobriment de fórmules per a expressar les raons d'angles múltiples. Però per el que François Viète era conegut era per els seus treballs en àlgebra, cosa que fa que actualment l'anomenin el pare de l'àlgebra. Temps després d'aquests descobriments i treballs va morir un 23 de febrer del 1603 a la capital francesa de París.

Durant el segle XVI es pot veure a un gran matemàtic de tots els temps. Es tracta de John Napier un matemàtic tant important que es situava dins la curta filera de pensadors matemàtics començant per Arquímedes i acabant per Newton i Einstein. John Napier provenia de família noble. Va néixer el 1550 en el castell de Merchinton, un dels estats escocesos dels quals els seus pares n'eren propietaris. Ja als 13 anys va ser ingressat a la universitat de St. Andrews però va marxar-ne sense arribar a graduar-se. Va acabar d'estudiar, probablement, a París, Itàlia i Holanda. Un cop finalitzats els seus estudis va dedicar-se a recórrer les seves terres escrivint sobre els dos temes principals en el seu interès: la teologia i la matemàtica, aquesta segona com a la ciència de més interès per a ell. Estava tant interessat que per a facilitar el càlcul va idear taules de multiplicar dissenyades de tal forma que fos més fàcil treballar amb elles. En el camp de la trigonometria va idear unes regles mnemotècniques per tal de recordar les relacions entre els elements dels triangles esfèrics rectangles. També va anomenar unes proporcions per als triangles esfèrics oblics i funcions exponencials per a les raons trigonomètriques. Però per el camp que destaca fonamentalment Napier és en el camp dels logaritmes. D'ell ve el nom de logaritme Neperià, però això no entra en aquest tema. Després d'una

intensa vida John Napier va morir el 1617 al mateix lloc d'on va néixer, al castell de Merchiston.

Al igual que Napier, Newton va ser un reconegut matemàtic, potser més que Napier i tot. Newton va néixer un 4 de gener del 1643 en un poble de Woolsthorpe, Anglaterra. Va ser educat per la seva avia i més tard va anar a estudiar a Cambridge. De bon començament va interessar-se sobretot per la química, però al llegir una obra d'Euclides sobre la geometria va començar a llegir llibres de matemàtiques i a interessar-se per aquesta ciència. Al 1669 el seu professor a Cambridge, Barrow va renunciar a la seva carrera i Newton va ocupar-ne el seu lloc. Mentrestant Newton anava fent descobriments sobre diferents temes, però un dels més importants és que va ser el descobridor del càlcul diferencial i integral. Llavors va representar funcions matemàtiques utilitzant series infinites de potencies de la variable x . Va trobar la sèrie per al $\cos x$, $\sin x$ i $\tan x$. Amb aquest càlcul les raons trigonomètriques van ser incorporades a l'hora d'analitzar on encara ara tenen un paper molt important en les matemàtiques pures aplicades. El 20 de març de 1727 a causa d'una llarga malaltia, Newton va morir i va ser enterrat a la Abadia de Westminster junt amb tots els altres grans homes d'Anglaterra.

També cal destacar, per els seus estudis sobre la trigonometria, Leonhard Euler. Nascut a Basilea, Suïssa el 1707, Euler va estudiar a la universitat de Basilea, obtenint-ne el diploma a l'edat de 16 anys. Als 23 va ser catedràtic de física i tres anys més tard de matemàtiques. A l'edat de 30 anys se li va diagnosticar una ceguesa parcial que es convertiria en gairebé total al final de la seva vida. Però a pesar d'aquest problema de vista Euler va poder realitzar el seu primer tractament analític complet de l'àlgebra, la teoria de les equacions, la trigonometria i la geometria analítica a la seva obra *Introducción al análisis de los infinitos* (1748). Euler també va descobrir els nombres complexos i gràcies a això va definir les raons trigonomètriques utilitzant expressions exponencials amb nombres complexos i va demostrar com les propietats bàsiques de la trigonometria eren producte de l'aritmètica dels nombres complexos. Però la trigonometria va ser una de les infinites possibilitats d'aplicació dels nombres complexos. La seva vida va acabar de sobte, un 8 de setembre de 1783 mentre fumava i prenia el te amb la seva família a Sant Petersburg.

Un any després de la mort de Leonhard Euler, va néixer un futur astrònom que va ser força important en el seu camp i en de la trigonometria que com molt be es veu en aquestes alçades, estan molt lligats. Aquest personatge era Friedrich Wilhelm Bessel, nascut el 1784 a Minden, Alemanya i mort el 1846. Bessel va aportar, el 1838, grans innovacions en la astronomia gràcies al seu estudi de la distància a les estrelles amb el paral·laxisme trigonomètric, que com molt be diu el seu nom es calculava a partir de la trigonometria. El procés d'aquest estudi queda explicat més endavant. Una altra innovació va ser l'aplicació de un seguit de fórmules per a l'estudi de la trigonometria esfèrica anomenades grups de Bessel. Aquestes fórmules aplicaven les raons trigonomètriques als triangles esfèrics.

Trigonometría Plana

Trigonometria i Triangles

L

a trigonometria és una de les branques de les matemàtiques que es dedica a l'estudi de triangles. La paraula prové del llatí que es pot traduir com a mesura de triangles (trigonotriangle / metriamesura). Però abans de començar a explicar com resoldre tot tipus de triangles gràcies a la trigonometria cal anomenar i descriure el que és un triangle i els tipus de triangles que hi ha. Un triangle és aquella figura geomètrica que consta de tres costats i per suposat tres angles. Els triangles es poden classificar seguint dos criteris: segons les relacions entre angles o segons les característiques d'aquests. Segons les relacions entre angles existeixen tres tipus. Els triangles equilàters són aquells triangles amb tots els angles iguals cosa que fa que els costats també tinguin la mateixa mida. Si un triangle es caracteritza per tenir dos angles iguals i un de diferent, o el que ve a ser el mateix, dos costats iguals i un de diferent s'anomena isòsceles. I si el triangle té tots els angles o costats diferents llavors estem parlant d'un triangle escalè. Si es classifiquen segons les característiques dels angles es pot parlar de tres nous tipus de triangles. Els acutangles són aquells triangles els angles dels quals són tots

aguts, és a dir menors de 90° . Després també hi ha els obtusangles els quals contenen un angle obtús que és aquell angle amb un valor major de 90° . Per últim hi ha els triangles rectangles. S'anomenen així ja que un dels seus angles és recte que significa que un dels seus angles és de 90° . Aquest tipus de triangles cobren un apartat molt important dins de la trigonometria ja que a partir de l'anàlisi d'aquests apareixen característiques d'altres tipus de triangles. La característica que fa que tots els triangles tinguin un important tret en comú és que la suma dels seus tres angles ha de ser igual a 180° . Això es compleix amb qualsevol tipus de triangle pla.

Les Raons Trigonòmriques

T

ots els triangles tenen un seguit de propietats que relacionen els costats del triangle amb els seus angles. Aquestes raons són el sinus ($\sin$), el cosinus ($\cos$), la tangent (tg), la cotangent (cotg), la secant ($\sec$) i la cosecant (cosec). A partir de simples quocients entre diferents magnituds dels costats del triangle es pot trobar un valor que representarà a un angle en concret. Qualsevol triangle té tres costats. Els dos costats que formen un angle se'n diuen costats contigus i l'altre costat oposat. En el cas dels triangles rectangles, aquests costats reben un nom especial. Si l'angle que estem estudiant no és l'angle de 90° , un dels costats contigus s'anomenarà catet contigu i l'altre hipotenusa, mentre que el costat oposat es dirà catet oposat.

Amb aquesta nomenclatura es pot dir que les relacions trigonomètriques s'obtenen de la següent forma. Els sinus s'obté amb un simple quocient entre el catet oposat i la hipotenusa de l'angle a analitzar. El cosinus és pràcticament el mateix amb l'única diferència que no es divideix el catet oposat sinó el contigu. La tangent és una raó que dona una relació entre sinus i cosinus, i es pot obtenir a partir de dividir el sinus entre el cosinus. Una altra raó és la cotangent que és la inversa de la tangent, o el que és el mateix, el cosinus entre el sinus. La secant que també es calcula fent la inversa d'una altra raó, en aquest cas la del cosinus, i per últim la cosecant que és la inversa del sinus. A partir d'aquestes relacions es construeixen les sis fórmules que adopten la següent forma:

$$\sin = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} \quad \operatorname{tg} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

$$\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin} \quad \sec = \frac{1}{\cos} \quad \operatorname{cotg} = \frac{1}{\operatorname{tg}}$$

A partir de les raons trigonomètriques i el teorema de Pitàgoras es pot obtenir una fórmula anomenada relació fonamental de la trigonometria que relaciona el sinus amb el cosinus. El teorema de Pitàgoras relaciona els dos catets amb la hipotenusa dient que la suma dels quadrats dels dos catets és igual al quadrat de la hipotenusa. Aquesta relació s'obté de la següent forma:

$$a^2 + b^2 = h^2 \quad (\text{TEOREMA DE PITÀGORAS})$$

$$\sin^2 = \frac{b^2}{h^2} \quad \cos^2 = \frac{a^2}{h^2}$$

$$\cos^2 = \frac{a^2}{h^2} \quad \sin^2 = \frac{b^2}{h^2}$$

$$h^2 \cos^2 + h^2 \sin^2 = h^2$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

D'aquesta forma és pot aconseguir qualsevol raó trigonomètrica només coneixent-ne una i sense conèixer el valor de cap dels costats del triangle.

La Circumferència Trigonèmrica

xisteix un estri que serveix per a classificar les raons trigonomètriques. Aquest estri és la circumferència trigonomètrica i a part d'una classificació, també permet una obtenció més senzilla de les raons trigonomètriques. Aquesta circumferència està dividida per uns eixos de coordenades, els quals tenen l'origen de coordenades en el centre mateix de la circumferència. El radi de la circumferència és igual a una unitat, determinada per els eixos de coordenades, i aquests fan que la circumferència quedi dividida en quatre parts iguals anomenades quadrants. Aquests quadrants són ordenats des del primer fins al quart en l'ordre contrari de les agulles del rellotge i començant per el quadrant que avarca les unitats positives de l'eix de les x i les de l'eix de les y . Per a estudiar els angles del triangle a estudiar es situa l'angle en el primer quadrant si és que es menor a 90° amb un dels costats contigus (cadascun dels costats que formen un angle) a sobre de l'eix de les x , que serà un dels catets del triangle rectangle (cadascun dels dos costats més curts del triangle), i l'altre situat de tal forma que talli la circumferència. Aquest costat serà la hipotenusa, és a dir el costat oposat a l'angle 90° . A l'igual que en tots els triangles rectangles l'angle recte està sempre format per els dos catets del triangle, així que el catet que falta serà perpendicular a l'eix de les x i passarà per el punt en que la hipotenusa talli a la circumferència. Ara ja es té el triangle rectangle dins de la circumferència a punt per a ser estudiat com es pot veure en la imatge *fig. 1*. D'aquí es poden veure dues de les raons trigonomètriques: el sinus i el cosinus. Per a calcular aquestes raons cal aplicar el triangle a la circumferència fent que la hipotenusa sigui de valor 1 igual que el radi de la circumferència. El valor que tingui el catet contigu a l'angle, és a dir $C1$ en la imatge *fig. 1*, serà el valor del cosinus, mentre que el valor del catet oposat ; $C2$ en la imatge *fig. 1*, és el valor del sinus. Això és així ja que en tenir, la hipotenusa, valor 1, qualsevol valor dividit entre 1 no canvia. Les altres raons trigonomètriques s'obtenen a partir de càlculs entre les dos primeres a partir de les relacions esmentades anteriorment.

Les raons tenen la propietat de ser positives o negatives segons l'angle sigui d'un quadrant o d'un altre. Si l'angle sotmès a l'estudi és menor a 90° clarament serà un angle del primer quadrant i com que x i y són positives el sinus i el cosinus ho seran també. El problema ve quan l'angle a estudiar és major de 90° , és a dir obtús. Si surt el cas es segueixen els mateixos passos que en el cas anterior. L'única diferencia serà que el triangle rectangle quedarà situat en un altre quadrant diferent depenent de la mida de l'angle. Si és major a 90° però menor a 180° serà del segon quadrant com molt bé es veu en la imatge *fig. 2*. Si l'angle es troba entre els 180° i 270° serà del tercer quadrant, mentre que els del quart quadrant seran triangles amb l'angle a analitzar comprés entre els 270° i els 360° . D'aquesta forma les raons trigonomètriques seran positives o negatives segons el quadrant en el que es trobin. En el primer quadrant totes les raons trigonomètriques seran positives. En el segon el sinus continuarà sent positiu ja que com es veu a la imatge *fig. 2* el catet $c'1$ continua al semieix positiu de l'eix de les y , mentre que el cosinus serà negatiu ja que el catet contigu a l'angle, representat per $c'2$ es situa al semieix negatiu de l'eix de les x . D'aquesta forma s'obté que en el segon quadrant el sinus queda positiu, el cosinus negatiu, la tangent serà negativa també ja que un nombre positiu dividit entre un de negatiu donarà sempre un de negatiu, la cotangent serà també negativa ja que fer la inversa no afecta al signe, per la mateixa raó la secant serà negativa i la cosecant positiva. En el tercer quadrant el cosinus i el sinus es trobaran en el semieix negatiu de l'eix de les x i de les y , per tant el sinus, el cosinus, la secant i la cosecant seran negatives mentre que la tangent i la cotangent seran positives. Per últim en el quart quadrant el sinus continuarà sent negatiu al estar al semieix negatiu de l'eix de les y mentre que el cosinus tornarà a ser positiu ja que torna a estar al semieix positiu de l'eix de les x . D'aquesta forma el cosinus i la secant seran positius, i el sinus, la cosecant, la tangent i la cotangent seran negatius.

Quadrants	I	II	III	IV
Sinus	+	+	-	-
Cosinus	+	-	-	+
Tangent	+	-	+	-
Cotangent	+	-	+	-
Secant	+	-	-	+

cosecant	+	+	-	-
----------	---	---	---	---

Relacions Entre els Angles

T

ot angle té un altre angle que segons la relació entre els dos obté un nom o un altre. Un angle suplementari de l'angle seria aquell angle que sumat a dona un angle de 180° . Les raons trigonomètriques en ambdós angles es relacionen plenament. D'aquesta forma el sinus dels dos angles serà sempre igual mentre que el cosinus de sempre serà igual però amb signe contrari que el sinus de l'angle $180^\circ -$. Un altre tipus són els angles complementaris. Aquests en comptes de sumar 180° , sumen la meitat, 90° . Així el sinus i el cosinus tornen a relacionar-se entre ells de forma que el sinus de l'angle serà el cosinus de l'angle $90^\circ -$ i viceversa. Una altra relació entre angles és en el cas que els angles sumen 360° . Llavors s'anomenen angles oposats, i la relació entre les propietats trigonomètriques dels dos és duta a terme de forma que els cosinus dels dos són iguals mentre que els sinus són iguals però amb el signe canviat. Per últim hi ha els angles que difereixen de 180° . Aquests tenen tan els sinus i els cosinus iguals però ambdós amb els signes canviats.

Les Raons Trigonomètriques en Combinacions d'Angles

L

l'última variant en l'estudi de les raons trigonomètriques és el cas de la suma i de la diferència d'angles. Aquests casos es donen quan hi ha dos angles que sumats o restats en formen un de tercer. Per aquests casos es donen expressions que simplifiquen l'estudi. En el cas que es tracti de suma d'angles les expressions per a trobar sinus, cosinus i tangent són:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$$

Dins de la suma d'angles hi ha un cas particular que és quan els dos angles són iguals, o també anomenat angle doble. Al dir que els dos angles són iguals l'expressió es simplifica força quedant definida de la següent forma:

$$\sin(2\alpha) = 2(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) =$$

L'altre cas és el cas de l'angle compost per la diferència de dos més. En aquest cas l'expressió és:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) =$$

Igual que en la suma existeix un cas particular que és l'angle meitat. Aquest angle com molt bé diu el seu nom s'aconsegueix a partir de dividir un angle inicial en dues parts iguals. Per a la formació d'aquestes expressions

es té amb compte l'angle doble. El procediment és el següent:

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \quad \sin^2 = 1 - \cos^2$$

$$\cos(2) = \cos^2 - \sin^2 = \cos^2 - (1 - \cos^2) = 2\cos^2 - 1$$

$$= \cos^2 - \sin^2 = \pm$$

$$\text{Si } =$$

$$\cos = \pm$$

D'aquesta forma s'obté el cosinus de l'angle meitat. Si es vol trobar el sinus, tan sols cal seguir el mateix procediment amb l'única diferència que caldrà substituir els cosinus i no els sinus a l'inici del procés anterior. Si es fa això s'obté que el sinus de l'angle meitat és el següent:

$$\sin = \pm$$

Triangles no Rectangles

T

ot aquest seguit de propietats són la forma en que es pot estudiar els triangles rectangles. Però el que passa amb els triangles no rectangles és ben diferent. En el cas que no es pugui o no es vulgui aplicar la circumferència trigonomètrica en l'estudi dels triangles no rectangles, aquests adopten expressions diferents per al càlcul de les raons trigonomètriques que ja coneixem. Existeixen dos teoremes principals per al càlcul de sinus i cosinus: el teorema del sinus i el del cosinus. Aquests teoremes també es poden aplicar a triangles no rectangles, però resulta més fàcil i senzill amb les raons trigonomètriques, les quals només serveixen per als triangles rectangles. El primer teorema, el del sinus, diu que el quocient d'un costat entre el sinus del seu angle oposat és sempre igual sigui quin sigui el costat que utilitzem. Aquesta expressió també fa obtenir el doble del radi de la circumferència en la qual està inscrit. Si es volgués utilitzar aquesta expressió en triangles rectangles quedaria reduïda a una simple raó trigonomètrica, en aquest cas la del sinus:

$$= \sin B = 1 \sin A =$$