

Conjuntos

• Introducción

El concepto de conjunto, de singular importancia en la ciencia matemática y objeto de estudio de una de sus disciplinas más recientes, está presente, aunque en forma informal, desde los primeros años de formación del hombre. Desde el momento que el ser humano tomó entre sus manos un puñado de piedras u observó un grupo de animales, tomó conocimiento del "conjunto". Sin embargo, por tratarse de conceptos matemáticos debemos fijar con exactitud el significado de cada término para no dar lugar a contradicciones o interpretaciones erróneas.

• Determinación de conjuntos

• Lenguaje Simbólico – Notación

Para representar los conjuntos, los elementos y la relación de pertenencia, mediante símbolos, tendremos en cuenta las siguientes convenciones:

- ◇ Los conjuntos se designan con letras mayúsculas.
- ◇ Los elementos que forman el conjunto se encierran entre llaves.
- ◇ Los elementos se designan con letras minúsculas.
- ◇ Para indicar que un elemento pertenece al conjunto se escribe el signo ". Para indicar que un elemento no pertenece a cierto conjunto, se escribe el signo ".

Entonces, si tenemos un conjunto A formado por los elementos a, b y c, escribimos:

$$A = \{ a, b, c \}$$

En este caso, al nombrar todos los elementos que forman el conjunto, lo estamos definiendo **Por extensión**.

Así, por ejemplo, para definir al conjunto B formado por los elementos 1, 2 y 3, lo haríamos del siguiente modo:

$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

Notamos, sin embargo, que dicho conjunto está formado por los números naturales menores a 4. Podemos, sabiendo esto, definir este conjunto Por comprensión, es decir mencionando la característica que define sus elementos. De este modo, representamos:

$$B = \{ x \in \mathbf{N} / x < 4 \}$$

Donde N representa el conjunto de los números naturales.

De este modo, podemos dar la siguiente:

El conjunto cuyos elementos verifican la propiedad P se indica:

$$A = \{ x \in U / P(x) \}$$

o más brevemente, si U está sobre entendido:

$$A = \{ x / P(x) \}$$

y se lee "A es el conjunto formado por los elementos x, tales que P(x).

• Lenguaje Gráfico – Diagramas

Para la representación gráfica fijamos, también, algunas convenciones, a saber:

- ◇ Los conjuntos se representan por una curva simple cerrada.
- ◇ Los elementos que pertenecen al conjunto se representan por puntos interiores a la curva.
- ◇ Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan por puntos exteriores a la curva.
- ◇ Ningún punto se representa sobre la curva.

Ejemplo:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$a = 2 \quad d = 5 \quad g = 8$$

$$b = 3 \quad e = 6$$

$$c = 4 \quad f = 7$$

• Conjuntos infinitos

Supongamos el siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ \text{números enteros pares} \}$$

Nos resulta imposible enumerar los elementos del conjunto pues no tiene un último elemento, decimos entonces que dicho conjunto es un **conjunto infinito**.

• Conjuntos especiales

Vamos a extender ahora nuestra noción intuitiva de conjunto a los casos de carencia de elementos y de unicidad de elementos, mediante la introducción de los conjuntos vacío y unitario.

Supongamos el siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ x \text{ son los meses de 32 días} \}$$

Si intentáramos definir dicho conjunto por extensión, enseguida nos daríamos cuenta que no existe ningún elemento que cumpla con la característica enunciada. Por lo tanto, dicho conjunto, es el **Conjunto vacío**.

El Conjunto vacío está caracterizado por una propiedad o función proposicional que se convierte en proposición falsa cualquiera sea el valor de x. Designaremos con el símbolo $\emptyset$ al conjunto vacío, y podemos definirlo simbólicamente así:

$$\emptyset = \{ x / x \text{ " } x \}$$

En este caso, la propiedad relativa a x es $P(x) : x \in \mathbb{Z}$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x .

Supongamos ahora al siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ x / x \text{ son los meses de 28 días} \}$$

En este caso, al definirlo por extensión encontraremos que existe un solo elemento que cumple con esa condición (Febrero). Definimos, entonces, al **Conjunto Unitario** cuyo único elemento es a , escribiendo:

$$A = \{ a \} = \{ x / x = a \}$$

Ejemplo.

Determinar simbólicamente y por extensión el siguiente conjunto definido por comprensión:

A es el conjunto de los números cuyo cuadrado es igual a 1.

En este caso la propiedad que caracteriza a los elementos de A es la conjunción de:

$$P(x) : x \in \mathbb{Z} \text{ y } Q(x) : x^2 = 1$$

Entonces: $A = \{ x / x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 = 1 \}$ y la determinación por extensión es: $A = \{ 1, -1 \}$

En este caso, $\mathbb{Z}$ representa al conjunto de los números naturales. Las notaciones usuales para caracterizar los conjuntos numéricos son:

$\mathbb{N}$ Conjunto de los números naturales $\mathbb{R}$ Conjunto de los números reales

$\mathbb{Z}$ Conjunto de los números enteros $\mathbb{Q}$ Conjunto de los números racionales

$\mathbb{C}$ Conjunto de los números complejos

• Conjunto Universal o Referencial

Supongamos el siguiente conjunto:

$$A = \{ \text{Argentina, Brasil, Chile, Uruguay} \}$$

Queda claro que estamos hablando de países de Sudamérica, y precisamente éste es el conjunto Referencial (es decir, el conjunto de referencia). Por lo tanto, no podríamos mencionar a México, pues estaría fuera del Universo.

Damos entonces la siguiente

El Referencial o universal es el conjunto formado por todos los elementos de referencia.

Como el conjunto Referencial o universal tiene fundamental importancia, se anota con un símbolo propio: R o U y se representa por un rectángulo para distinguirlo de los diagramas correspondientes a los demás conjuntos. Por lo tanto, cualquier conjunto que se estudie dentro de un cierto Universo, se representará dentro de dicho rectángulo. Decimos entonces que cualquier conjunto está incluido dentro del universo correspondiente, y a continuación vamos a estudiar el concepto exacto de "inclusión".

- **Inclusión**
- **Concepto**

Sean A y B dos conjuntos, si cada elemento de A es elemento de B diremos que A está incluido en B, o bien que A es parte de B, o que A es un subconjunto de B, y lo escribimos $A \subset B$.

A menudo será necesario demostrar que un conjunto es parte de otro entonces, de acuerdo a la definición, será suficiente demostrar que cualquier elemento del primero pertenece al segundo.

Asimismo, teniendo en cuenta la equivalencia entre una implicación y la contrarecíproca, la definición anterior puede expresarse así:

$$A \subset B \iff \forall x : x \in A \implies x \in B$$

Además, considerando la equivalencia entre $p \implies q$ y $\sim(p \wedge \sim q)$, podemos traducir la misma definición como sigue:

$$A \subset B \iff \forall x / x \in A \implies x \in B \text{ es (F)}$$

Sobreentendiendo el cuantificador universal, escribiremos

$$A \subset B \iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

En el dibujo de arriba vemos que, efectivamente, el elemento **a** es parte del conjunto A y lo es, a su vez, del conjunto B. Podemos afirmar, entonces, que $A \subset B$. Ahora bien, vemos que **b** está incluido en B pero no en A. Decimos, entonces que un conjunto A está *estrictamente incluido* en B si todo elemento de A está incluido en B, pero existe al menos un elemento de B que no existe en A.

Ejemplo.

Sean los conjuntos:

$$A = \{ \text{libros de matemática de mi colección} \}$$

$$B = \{ \text{Libros de mi colección} \}$$

Está claro que los libros de matemática están incluidos en mi colección. Podemos decir, aquí, que A está incluido en B ($A \subset B$), es decir que mis libros de matemática son un subconjunto de mi colección de libros.

• **Conjunto de partes**

Supongamos el siguiente conjunto

$$A = \{ \text{libros de mi colección} \}$$

¿Cuántos subconjuntos de A puedo formar sabiendo que en mi colección hay libros de matemática, historia y castellano? No olvidemos que el mismo conjunto A y el conjunto vacío son subconjuntos de A. Entonces los subconjuntos de A son:

$$\{ \text{Libros de mi colección} \}$$

$$\{ \text{Libros de matemática} \}$$

{Libros de historia} En total suma 5 subconjuntos.

{Libros de castellano}

"

El conjunto de partes de A se llama Potencial de A y se anota $P(A)$, entonces, en este caso particular tenemos:

$P(A) = \{ \{ \text{Libros de mi colección} \}, \{ \text{Libros de matemática} \}, \{ \text{Libros de historia} \}, \{ \text{Libros de castellano} \}, " \}$

Podemos dar, entonces, la siguiente

- **Complementación de conjuntos**
- **Concepto**

Dado un Referencial U y un conjunto A, queda determinado otro conjunto formado por todos los elementos del Referencial que no pertenecen a A. Se llama complemento de A y se designa A' o A^c (es el área coloreada del dibujo)

Ejemplo.

Sea $A = \{ \text{Libros de mi biblioteca que son de matemáticas} \}$

Sobreentendemos que en este caso el Referencial o universal es el conjunto de libros de mi biblioteca. Por lo tanto, el complemento del conjunto A es el conjunto total de libros de mi biblioteca excepto aquellos que son de matemática, es decir:

$A' = \{ \text{Libros de mi biblioteca que **no** son de matemática} \}$

- **Intersección de conjuntos**
- **Concepto**

Supongamos los conjuntos:

$A = \{ \text{Libros de tu biblioteca} \}$

$B = \{ \text{Libros de matemática} \}$

y que un compañero te pidió prestado algunos libros de matemáticas. En este caso, el Referencial en el cual vas a buscar sería el total de libros que tienes en tu casa. Ahora bien, está claro que, como vos también tienes libros prestados por otros, sólo le podrás prestar sólo aquellos que son de tu biblioteca. Por lo tanto, los libros que vas a buscar deben cumplir dos condiciones: pertenecer al conjunto A y, además, pertenecer al conjunto B. Por lo tanto, estos elementos forman un nuevo conjunto que se llama Intersección entre los conjuntos A y B.

La intersección entre dos conjuntos es una operación binaria, pues a partir de dos conjuntos se obtiene un tercero.

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos, y se establece en términos de la **conjunción**.

La definición de intersección establece:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía dichos conjuntos se llaman **disjuntos**.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo.

$$A = \{ \text{números pares} \} \quad B = \{ \text{números impares} \}$$

$A \cap B = \emptyset$ pues no existe ningún número que sea par e impar a la vez.

• Unión de conjuntos

Concepto

La unión de dos conjuntos, lo mismo que la intersección, es una operación binaria definida en el conjunto de partes de U .

De acuerdo con la definición, podemos escribir:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

El " $\vee$ " utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos de U para los cuales es verdadera la disyunción; entonces un elemento pertenece a la unión si y sólo si pertenece a alguno de los dos conjuntos.

Es claro, además, que todo conjunto es contenido en su unión con cualquier otro. En efecto:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \quad x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

• Diferencia

• Concepto

Definimos la diferencia de conjuntos del siguiente modo:

Asimismo, podemos definir la diferencia entre dos conjuntos como la intersección del primero con el complemento del segundo, es decir:

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \} =$$

$$= \{ x / x \in A \wedge x \in B' \} = A \cap B'$$

La representación mediante diagrama de Venn es la que vemos al lado.

• Diferencia simétrica

• Concepto

Definimos la diferencia simétrica del siguiente modo:

Asimismo, podemos determinar la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B como la unión de los conjuntos $A - B$ y $B - A$. En símbolos:

$$A \setminus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Podemos, también, identificarlo como:

$$A \setminus B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

A

- b
- d
- f

- a
- c
- e
- g

U

B

$A \subset B$ (A está incluido en B)

b

A

a

Definición

Un conjunto se determina por extensión si y sólo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen. Un conjunto se define por comprensión, si y sólo si se da la propiedad que los caracteriza.

Definición

El Referencial o universal es el conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia.

Definición:

Un conjunto A está incluido en otro conjunto B si cada elemento del conjunto A pertenece, también, al conjunto B.

$$A \subset B \iff \forall x : x \in A \implies x \in B$$

Definición:

Un conjunto de partes de A es el conjunto cuyos elementos son todos subconjuntos de A.

$$P(A) = \{ X / X \subset A \}$$

Definición:

Complemento de A es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A.

$$A' = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

U

A

A'

Definición:

Intersección de dos conjuntos A y B se llama al conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

$$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

U

$A \cap B$

$A \cap B$

Definición:

Se llama unión o reunión de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, o a B o a ambos.

$$A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

$A \cup B$

U

Definición:

Se llama diferencia entre un conjunto A y otro conjunto B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

$A - B$

U

Definición:

Se llama diferencia simétrica entre un conjunto A y otro conjunto B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B pero no ambos.

$$A \oplus B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ pero } x \notin A \cap B \}$$

A B

U