

El péndulo físico y el péndulo reversible

Objetivos

En esta práctica vamos a emplear el péndulo físico y el péndulo reversible para determinar:

- El periodo de oscilación del péndulo físico.
- El momento de inercia.
- La longitud reducida del péndulo reversible (distancia entre sus dos ejes de oscilación).
- El valor de la aceleración de la gravedad experimentalmente.

Material

- Varilla metálica con muescas, que hará de péndulo físico.
- Regla, graduada en milímetros.
- Dos soportes con cuchillas sobre las que oscila el sistema.
- Cronómetro, al que asignamos un error de reacción de 0,1s.

Fundamentos

El péndulo físico

Un cuerpo rígido que gira libremente en torno a un eje fijo de rotación, que no coincide con su centro de gravedad, constituye un péndulo físico. Las leyes de la dinámica de rotación establecen que el momento de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual al momento de inercia del cuerpo multiplicado por la aceleración angular α a que es sometido:

(1)

Donde M es el momento de las fuerzas que actúan sobre el sistema, I el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de oscilación (O) y α el ángulo que nos da la posición del cuerpo respecto de la de equilibrio. Por tanto la derivada segunda de α respecto del tiempo dos veces es la aceleración angular del sistema.

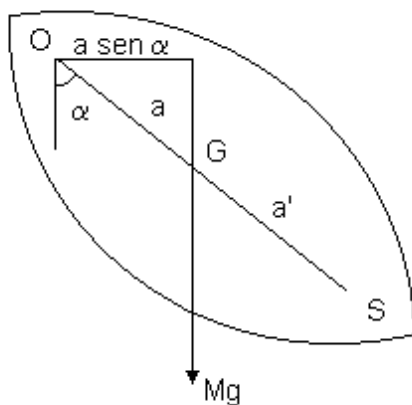


Figura 1 – El péndulo físico

El momento de la fuerza de la gravedad que actúa sobre un péndulo físico como el de la figura 1, cuando el sistema forma un cierto ángulo respecto a la posición de equilibrio, se puede expresar, en función de ese ángulo como:

(2)

Donde m es la masa del péndulo, a es la distancia del eje de oscilación O al centro de gravedad y el signo indica que es un momento recuperador, que tiende a llevar al sistema a la posición de equilibrio.

Hemos empleado la aproximación del seno de un ángulo por el propio ángulo, válido para oscilaciones pequeñas, de forma que al realizar la experiencia tendremos que cuidarnos de que esta hipótesis se cumpla, es decir hacer oscilar al péndulo con un ángulo pequeño.

Igualando las dos expresiones anteriores (1) y (2), obtenemos la que nos da el periodo del péndulo físico:

(3)

Para la posterior comparación con los valores experimentales podemos poner, en esta expresión, el momento de inercia respecto al eje de oscilación en función del momento de inercia respecto del centro de masas, a través del teorema de Steiner, en el que el momento del centro de gravedad será la suma del momento de la barra y el de las dos masas con las cuchillas:

Y sustituyendo en la expresión (3), obtenemos:

(4)

En el caso del péndulo simple o péndulo matemático esta expresión se simplifica en la siguiente:

(5)

Donde l es la distancia del eje de giro al centro de gravedad que en el péndulo matemático es la longitud del péndulo.

Por tanto, si igualamos las dos expresiones (3) y (5) obtenemos:

(6)

Que nos da la l de un péndulo matemático del mismo periodo de oscilación que el péndulo físico que estamos estudiando. A este valor se le llama longitud reducida del péndulo físico.

El péndulo reversible

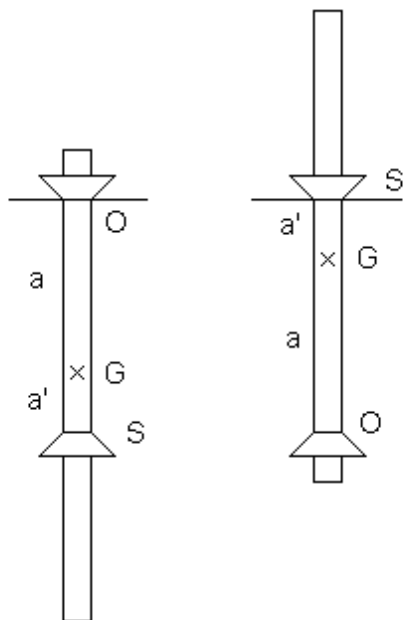


Figura 2 – El péndulo reversible

Si consideramos un punto S que dista $= a + a'$ del eje de oscilación del péndulo físico y ponemos el péndulo a oscilar sobre el eje que pasa por este punto S, observaremos que el periodo es el mismo en ambos casos. Esto es válido para cualquier punto que tomemos como eje de oscilación; calculando la correspondiente longitud reducida, obtendremos el centro de oscilación en el cual, si ponemos el eje, tendremos un péndulo con el mismo periodo de oscilación.

Realización

EL Péndulo físico

Para la toma de medidas, procedemos de la siguiente manera:

- Pesamos las cuchillas y la barra.
- Sujetamos las cuchillas a la barra de forma simétrica respecto al centro de gravedad. Utilizaremos las muescas de la barra como guía, haciéndolas coincidir con las cuchillas. Empezaremos con cada cuchilla a una distancia de G de 5 cm (a).
- Suspendemos la barra por una de las cuchillas y la ponemos a oscilar, midiendo el tiempo que tarda en realizar una serie de oscilaciones, que serán de 5 a 10, según vaya creciendo el periodo. Debemos respetar un ángulo de oscilación pequeño, ya que hemos utilizado la aproximación del seno por el ángulo, válida cuando éste es pequeño.
- Vamos separando cada cuchilla a intervalos de dos centímetros, siempre de forma simétrica respecto a G y midiendo los respectivos tiempos.
- Anotamos los valores medidos en una tabla (Tabla I) y construimos la Gráfica 1 de $T^2a=f(a^2)$, para posteriormente comparar su ajuste por mínimos cuadrados con la expresión (4)

El Péndulo reversible

Con el péndulo reversible vamos a hallar experimentalmente el valor de g para el que el periodo es el mismo, oscile de O o del centro de oscilación S. Para ello procedemos de la siguiente manera:

- Colocamos una de las cuchillas cercana a un extremo de la barra (O), la cual dejaremos fija a lo largo del experimento.
- La otra cuchilla (S) la situamos cercana al centro de gravedad, por debajo de éste. Anotamos la distancia entre ambas cuchillas (d). Comenzaremos por un valor de $d=35$ cm.
- Medimos el periodo de oscilación (midiendo varias oscilaciones y dividiendo), con el péndulo suspendido por O y por S.
- Desplazamos la cuchilla P de dos en dos cm y continuamos obteniendo los respectivos periodos TO y TS.
- Finalizamos con un valor de $d=50$ cm.
- Tomamos medidas adicionales cada centímetro en la zona donde se cruzan ambas series de puntos.
- Anotamos los resultados en la Tabla II y construimos la correspondiente Gráfica 2 de TO y TS frente a d, para hallar el punto donde $TO=TS$ sobre ella.

Medidas y resultados

EL Péndulo físico

Hemos obtenido los siguientes valores para la barra y las cuchillas:

Masa de las cuchillas: $m_c = 20,05 \pm 0,15$ g.

Masa de la barra: $m_b = 114,2 \pm 0,1$ g.

Longitud de la barra: $l = 66 \pm 0,1$ cm.

Adjuntamos la Tabla I con los tiempos del péndulo físico para cada una de las longitudes que hemos considerado, sus errores, los periodos, los correspondientes errores y finalmente los valores de a^2 y T^2a con sus errores, que serán los que utilizemos en la construcción de la Gráfica 1 – $T^2a=f(a^2)$.

Nótese que en todos los casos hemos utilizado la propagación cuadrática de errores. En el caso del error de a , lo consideramos como el resultante de medir la posición de G y luego la posición de P desde ésta en ambas direcciones, con una regla que aprecia milímetros. El error del tiempo lo hemos tomado como el de reacción del usuario por ser mayor que la dispersión media y el error de dispersión que estábamos obteniendo.

Tabla I – El péndulo físico

Y en la página siguiente incluimos la Gráfica 1 – $T^2a=f(a^2)$, con su correspondiente recta ajustada por mínimos cuadrados, de la que extraeremos los valores de g e IO experimentales.

Los valores que obtenemos del ajuste por mínimos cuadrados de los puntos experimentales son:

$$p = 0,04944538 \pm 0,00548628$$

$$n = 11,6358225 \pm 2,6814876$$

Con ellos acudimos a la expresión (4), de la que podemos extraer:

$$g = 1000 \pm 110 \text{ cm/s}^2$$

$$I_b = 46000 \pm 10000 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$$

El momento de inercia teórico de la barra empleada como péndulo físico se obtiene mediante:

$$I_{bT} = 41450 \pm 130 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$$

Aunque el momento de inercia de la barra obtenido experimentalmente tenga muy poca precisión, si que se observa cómo el momento teórico queda incluido dentro de los márgenes de error del experimental, con lo que podemos dar por válida aunque poco fiable.

El Péndulo reversible

A continuación mostramos la tabla de valores obtenidos para el péndulo reversible, con el número de oscilaciones consideradas en cada caso, los respectivos tiempos y los periodos, con sus errores:

	TO	TS

Y en la página siguiente tenemos la Gráfica 2 – TS y TO en función de d, en la cual estimaremos el punto en el que:

Es decir, en el que los periodos coinciden y es la separación entre O y S para la cual se cumple esto. De aquí obtendremos otro valor de g.

Nótese que hemos eliminado de la gráfica el valor de TP para d = 40 cm, ya que se desplazaba mucho de la tendencia de los demás valores.

Como se puede observar en la gráfica estimamos que el punto en el que coinciden los periodos es: $d = 41 \pm 0,5 \text{ cm}$.

Y el periodo en este punto, que obtenemos de la media de los periodos TO y TS es:

$$T = 1,285 \pm 0,014 \text{ s.}$$

Una vez estimados estos valores podemos pasar a calcular la gravedad:

$$g = 980 \pm 20 \text{ cm/s}^2$$

Conclusiones

En este apartado vamos a evaluar los tres valores para la gravedad de que disponemos, a saber: el dato en Valencia, el obtenido del péndulo físico y el obtenido del péndulo reversible.

$$g_f = 1000 \pm 110 \text{ cm/s}^2 \quad r = 11 \%$$

$$g_r = 980 \pm 20 \text{ cm/s}^2 \quad r = 2 \%$$

$$g = 981 \pm 1 \text{ cm/s}^2 \quad r = 0,1 \%$$

Se puede observar que los que tienen menos precisión contienen siempre en sus márgenes de error a los de mayor precisión, con lo cual podemos dar nuestros resultados experimentales como válidos, teniendo presente la precisión que se puede obtener con cada uno de los dos métodos.

Cuestiones

Deducid teóricamente la longitud reducida de un péndulo formado por un hilo y una bola de radio r .

Un hilo del que pende una bola forma la aproximación física de la idea de péndulo matemático, en el que la longitud reducida no es más que la distancia del punto fijo del que cuelga el hilo al centro de la bola.

En esta aproximación al péndulo matemático se considera el hilo inextensible y de masa despreciable frente a la de la bola, mucho mayor, así como el hecho de idealizar la bola como una masa concentrada en su centro.

De esta forma, acudiendo a la expresión (6), que nos da la longitud reducida en función del momento de inercia, la masa y la longitud total del péndulo, y aplicando estas aproximaciones, obtenemos:

$a = l + r$ Distancia del punto fijo del hilo al centro de la bola, ya que hemos considerado ésta como una masa localizada en su centro. l es la longitud del hilo y r el radio de la bola.

$I = ma^2$ Considerando la única masa de la bola, que oscila a una distancia a del punto fijo del hilo.

Si sustituimos en la fórmula (6):

Tal y como se construye el péndulo reversible, ¿lo es realmente?

Si acudimos a la expresión (3), que nos da el periodo del péndulo físico, y ponemos el momento de inercia del sistema en función del momento respecto al eje que pasa por el centro de gravedad, mediante el teorema de Steiner, podemos observar lo siguiente:

Hemos comprobado experimentalmente que hay un punto en el que el péndulo tiene el mismo periodo, oscile de O o de S. Esto equivale a decir que hay dos valores de a que en esta expresión nos van a dar el mismo periodo, ya que el momento de inercia I_G , y la masa del sistema son constantes, y por tanto lo único que varía es la distancia del centro de gravedad al eje de oscilación.

Llegamos a la conclusión de que basta con que el cociente que tenemos dentro de la raíz sea el mismo para dos valores de a , y si de hecho igualamos este cociente a una constante, llamémosla k , arbitraria, lo que obtenemos es una ecuación de segundo grado en a , que, por su propia naturaleza, admite dos soluciones para a que satisfacen la ecuación, con las cuales, al hallar el cociente obtendremos un mismo valor de k y por tanto dan el mismo periodo:

También se puede entender esto como que dado un valor de a , habrá siempre otro que nos de el mismo cociente.

En conclusión, podemos afirmar que el péndulo reversible es realmente reversible desde el punto de vista matemático.