

Tema:

Gravitación

Introducción

Al menos desde los tiempos de la antigua Grecia, dos problemas constituían el centro de la búsqueda de conocimiento:

... la tendencia de los objetos a regresar a la tierra al dejarlos caer y

... los movimientos de los planetas.

Antiguamente se creía que estos eran temas separados uno del otro. Uno de los más grandes logros de Newton fue que él los vio como aspectos de un solo problema bajo las mismas leyes físicas.

1. Ley de la gravitación universal

Newton, analizando los datos astronómicos del movimiento de la luna alrededor de la tierra, enunció que la fuerza que gobierna el movimiento de los planetas tiene la misma forma matemática que la ley de fuerza de atracción de una manzana que cae a la tierra, movimiento también estudiado por Newton.

En 1687 Newton publicó su trabajo en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. La ley de la gravitación universal establece que:

“Todas las partículas del universo se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sí. La dirección de esta fuerza es a lo largo de la línea que las une”.

Si las partículas tienen masas m y M , y están separadas por una distancia r , la magnitud de la fuerza gravitacional es

$$F = G \frac{m M}{r^2}$$

(1)

Aquí G , llamada constante gravitatoria, es una constante universal que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas.

Debemos observar que las fuerzas gravitatorias entre dos partículas son un par acción-reacción. La primera partícula ejerce una fuerza sobre la segunda que se dirige a la primera a lo largo de la línea que las une. De igual modo la segunda partícula ejerce una fuerza sobre la primera dirigida a lo largo de la línea que las une. Estas fuerzas son de igual magnitud pero de signo contrario.

La constante G no debe confundirse con g que es la aceleración de un cuerpo en caída libre. La constante G tiene dimensiones L^3/MT^2 y es un escalar, mientras que g es el módulo de un vector, tiene las dimensiones L/T^2 y no es ni universal ni constante.

La ecuación (1) expresa la fuerza entre dos partículas. Si queremos determinar la fuerza entre cuerpos extensos, por ejemplo, la tierra y la luna debemos considerar a cada cuerpo como un conjunto de partículas. El cálculo integral hace posible tal cálculo.

La experimentación ofrece pruebas de que la fuerza gravitatoria entre dos partículas es independiente de la presencia de otros cuerpos y de las propiedades del medio en que están las partículas.

1.1 La constante gravitatoria G

Puede parecer que determinar el valor de G es una tarea sencilla. Todo lo que tenemos que hacer es medir la fuerza gravitatoria F entre dos masas conocidas m y M , y separadas por una distancia r . Con estos datos podemos calcular G .

Un sistema como el Tierra-Luna no sirve para determinar G , las distancias son tan grandes que los objetos pueden considerarse como masas puntuales, pero los valores de estas masas no se pueden medir directamente. En vez de esto debemos basarnos en mediciones a pequeña escala para lo que debemos usar muestras de laboratorio.

La primera determinación de laboratorio del valor de G fue realizada por Henry Cavendish en 1789. El aparato de Cavendish constaba de dos esferas pequeñas, de masa m cada una, fijadas a los extremos de una barra ligera horizontal suspendida por una fibra de metal delgada, como se muestra en la figura. Dos esferas grandes, de masa M cada una, se colocan cerca de las esferas pequeñas. La fuerza de atracción entre las esferas grandes y pequeñas provocan que la barra gire y se tuerza el alambre de suspensión. Si el sistema se orienta como se muestra en la figura, la barra gira en el sentido de las manecillas del reloj cuando es vista desde arriba. El ángulo que gira la barra suspendida se mide por la deflexión de un haz de luz reflejado desde un espejo colocado en la suspensión vertical. La deflexión de la luz es una técnica efectiva para amplificar el movimiento.

El experimento se repitió varias veces con diferentes masas y con diferentes separaciones. Además de proporcionar un valor de G , el experimento demuestra con el resultado que la fuerza es de atracción, proporcional al producto mM e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r .

El experimento original dio un valor para G de $6.75 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2$. Como se mencionó antes el experimento se repitió varias veces refinando el resultado cada vez más hasta llegar al valor aceptado actualmente de $6.67259 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2$ con una incertidumbre de $\pm 0.00085 \times 10^{-11}$.

Ejemplo: tres masas en interacción.

Tres esferas unidas de masas 2Kg, 4Kg, y 6Kg se colocan en las esquinas de un triángulo rectángulo, como en la siguiente figura, donde las coordenadas están en metros. Calcular la fuerza gravitacional resultante sobre la masa de 4Kg, suponiendo que las esferas se encuentran aisladas del resto del universo.

Solución: primero se calculan por separado las fuerzas individuales sobre la masa de 4Kg, debida a las masas de 2Kg y 6Kg, y después se hace la suma vectorial para obtener la fuerza resultante sobre la masa de 4Kg.

La fuerza sobre la masa de 4Kg debida a la masa de 2Kg es hacia arriba y esta dada por:

$$F_{42} = G \frac{m_4 m_2}{r_{42}^2} \hat{j}$$

$$5.39 \times 10^{-11} \hat{i} \text{ N}$$

La fuerza sobre la masa de 4Kg debida a la masa de 6Kg es hacia la izquierda y esta dada por:

$$F_{46} = G \frac{m_4 m_6}{r_{46}^2} - \hat{j}$$

$$-10.0 \times 10^{-11} \text{ i N}$$

Entonces, la fuerza resultante sobre la masa de 4Kg es la suma vectorial de $\mathbf{F}_{42}$ y $\mathbf{F}_{46}$

La magnitud de esta fuerza es $11.6 \times 10^{-11} \text{ N}$ y su ángulo es de 149° con el eje positivo de las X.

2. Masa inercial y masa gravitatoria.

El procedimiento utilizado hasta ahora para asignar masa a un objeto, fue el de comparar su respuesta a una fuerza determinada (es decir, a su aceleración) con la de una masa estándar se hace esta comparación con base en la segunda ley de Newton, y la masa que aparece en $F = m a$ se llama masa inercial. Podemos emplear también un procedimiento basado en la ley de la gravitación de Newton para medir la masa de un objeto. Midamos la fuerza de un kilogramo patrón en el campo gravitatorio de la tierra (es decir, su peso), y determinemos luego la fuerza sobre nuestra masa desconocida de la misma manera. De acuerdo con la ecuación

$$\mathbf{F} = G \frac{m M}{r^2}$$

la razón entre aquellas fuerzas deberá ser la misma que la razón entre las masas, y por tanto tenemos un segundo método para determinar la masa. En este caso estamos midiendo la masa gravitatoria.

Parece razonable preguntar si estas masas son de hecho las mismas. ¿Es igual la masa inercial a la masa gravitatoria?. No existe nada en el marco de la dinámica de Newton que exija que sean iguales. Su igualdad debe ser reconocida en la teoría de Newton como una coincidencia asombrosa, pero surge natural en la relatividad general.

Newton fue el primero en probar la igualdad de las masas inercial y gravitatoria, usando un péndulo hecho en forma de caja vacía. Lleno la caja con muestras de materiales diferentes y midió el periodo del péndulo resultante. El concluyo que las masas inercial y gravitatoria eran las mismas aproximadamente en un factor de $1E-3$. Luego de varios experimentos de diversa naturaleza y de mucha precisión y exactitud, se aproximó esta incertidumbre a $1E-12$, sugiriendo que no existe una diferencia entre las masas inercial y gravitatoria, y nos obliga a reexaminar nuestras leyes de la dinámica para explicar esta igualdad aparentemente accidental. Esto se puede examinar con el principio de equivalencia.

2.1 El principio de equivalencia

A Einstein se le ocurrió la idea de que si una persona cae libremente no sentirá su propio peso. Entonces, si comparamos los siguientes casos:

- una persona dentro de una cámara aislada en caída libre bajo la gravedad de la tierra
- una persona dentro de una cámara aislada que flota libremente en el espacio interestelar, donde los campos gravitatorios son sumamente débiles.

Vemos que ningún instrumento de medición que opere completamente dentro de la cámara es capaz de distinguir entre los dos casos.

Luego, al continuar el análisis, si consideramos ahora una persona dentro de una cámara en reposo sobre la tierra, se observa que:

- una bola acelera hacia el piso a razón de $9.8 \frac{m}{seg^2}$
- un péndulo sencillo de longitud específica tiene cierto periodo de oscilación
- una masa colgada de un resorte estira al resorte en cierta cantidad
- el piso ejerce una determinada fuerza normal sobre los cuerpos que reposan en el

Supongamos ahora que la cámara es parte de un cohete en el espacio interestelar, y además que los motores se hallan encendidos para darle al cohete una aceleración de exactamente $9.8 \frac{m}{seg^2}$.

. Se observa que:

- si ahora la persona deja caer una bola, la observa moverse con esa aceleración con relación al suelo
- el péndulo oscila normalmente
- la masa estira el resorte en la cantidad apropiada, y el suelo ejerce su fuerza normal correcta.

En resumen, no existe ningún experimento que pueda ser llevado a cabo dentro de la cámara que distinga entre la condición de reposo en un marco inercial dentro de un campo gravitatorio g y la aceleración igual a g con relación a un marco inercial en el espacio, de gravedad despreciable, siendo esta la definición del principio de equivalencia.

La igualdad de las masas inercial y gravitatoria se deduce directamente del principio de equivalencia. Hagamos descansar a un objeto sobre una balanza de resorte situada sobre el suelo de la cámara. Cuando la cámara acelera en el cohete, el suelo debe ejercer una fuerza hacia arriba $m_i a$ para acelerar el objeto, aquí m_i es la masa inercial, y la balanza de resorte lee la fuerza de reacción ejercida por el objeto. En cambio, cuando la cámara esta en reposo en un campo gravitatorio la balanza marca el peso $m_g g$ (que depende de la masa gravitatoria). Hemos dispuesto nuestros experimentos de modo que $a = g$, y si las lecturas de balanza han de ser idénticas (como lo exige el principio de equivalencia) entonces las masas inercial y gravitatoria deben ser iguales.

Ejemplo: masa inercial y masa gravitatoria

Hallar la masa inercial y la masa gravitatoria de un objeto que es pesado en una balanza, indicando esta $P = 19.6N$

Solución: la masa inercial la obtenemos por la segunda ley de Newton:

" $F = m \cdot a$, siendo $a = g$ y $F = P$

entonces, la masa inercial es

$$m = \frac{P}{g} = \frac{19.6 N}{9.38 \frac{m}{seg^2}} = 1.9 Kg$$

Ahora con la formula $F = G \frac{m M}{r^2}$

tenemos que M es la masa de la tierra, r es el radio y m es la incógnita.

Entonces la masa gravitatoria es:

Vemos que ambos valores se aproximan a 2Kg. No son idénticamente iguales, ya que G , P el radio de la tierra y su masa tienen cada uno una incertidumbre, por lo tanto estos valores son aproximados.

3. La gravedad cerca de la superficie de la tierra.

Supongamos que la tierra es esférica y que su densidad depende solamente de la distancia radial desde su centro. La magnitud de la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo de masa m situado a una distancia r del centro de la tierra, puede expresarse como

$$F = G \frac{m M_t}{r^2}$$

donde M_t

es la masa de la tierra. Esta fuerza puede expresarse como $F = m g_0$

. Aquí g_0

es la aceleración en caída libre debida a la atracción gravitatoria de la tierra. Al combinar las dos ecuaciones tenemos que

$$g_0 = \frac{GM_t}{r^2}$$

La tabla muestra algunos valores de g_0

en diversas altitudes sobre la superficie de la tierra.

3.1 Modelo de la tierra.

La tierra real difiere de nuestro modelo en tres maneras:

- la corteza de la tierra no es uniforme. Existen variaciones de densidad local en todas partes. La medición precisa de las variaciones locales en la aceleración en caída libre da información muy útil, por ejemplo, en las exploraciones de petróleo.
- la tierra no es una esfera. La tierra es aproximadamente un elipsoide, achatada en los polos y abultada en el ecuador. El radio ecuatorial de la tierra es mayor que su radio polar en 3Km. Así, un punto en los polos está más cerca del núcleo denso de la tierra que un punto en el ecuador. Es de esperar que la aceleración en caída libre aumente cuando se va al nivel del mar, desde el ecuador a los polos.
- La tierra está girando. La figura muestra la tierra girando desde una posición en el espacio por encima del polo norte. Una masa m descansa sobre una balanza de plataforma en el ecuador. Esta masa está en movimiento circular uniforme debido a la rotación de la tierra y se acelera hacia el centro.

La tierra ejerce una atracción gravitatoria hacia abajo de magnitud $m g_0$

. La balanza empuja hacia arriba la masa m con una fuerza $m g$

, el peso de la masa m . Estos dos fuerzas no se equilibran realmente y así tenemos

$$F = m g_0 - m g = m a$$

o sea

$$g_0 - g = a$$

donde a es la aceleración centrípeta. Para a podemos escribir $\omega^2 R_t$

donde ω

es la velocidad angular de la tierra y R_t su radio.

donde $T = 24\text{hs}$.

$$g_0 - g = 0.034 \frac{m}{seg^2}$$

Vemos que g en el ecuador de la tierra es menor que g_0 , el resultado esperado si la tierra no estuviese girando, por únicamente $0.034/9.8$ o 0.35% . El efecto disminuye cuando se va a latitudes mayores y se anula en los polos.

Ejemplo: aceleración en caída libre en una estrella y en un asteroide

(a) Una estrella de neutrones es una estrella colapsada de densidad extraordinariamente alta. La estrella pulsante en la nebulosa del Cangrejo es la más conocida de muchos de estos ejemplos. Consideremos una estrella de neutrones con una masa M igual a la masa del Sol, $1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}$, y un radio R de 12 Km . ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie? (b) El asteroide Ceres tiene una masa de $1.2 \times 10^{21} \text{ Kg}$ y un radio de 470 Km . ¿Cuál es la aceleración en caída libre en su superficie?

Solución: (a) partiendo de la ecuación $g_0 = \frac{GM_c}{r^2}$

tenemos que

$$9.2 \times 10^{11} \frac{m}{seg^2}$$

Aun cuando los pulsares giran a velocidad extraordinaria, los efectos rotatorios tienen solamente una influencia pequeña sobre el valor de g , a causa del pequeño tamaño de la estrella.

(b) En el caso del asteroide ceres, tenemos

$$0.36 \frac{m}{seg^2}$$

4. Movimientos de satélites y planetas. Leyes de Kepler.

Mediante las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal de Newton, podemos entender y analizar el comportamiento de todos los cuerpos en el sistema solar. Adoptaremos dos hipótesis que simplifican al análisis

- consideraremos a la fuerza gravitatoria solamente entre el cuerpo en órbita (planeta) y el cuerpo central (sol), ignorando el efecto perturbador de la fuerza gravitatoria de otros cuerpos (demás planetas, lunas, etc.).
- suponemos que el cuerpo central es más masivo que el cuerpo en órbita de modo que podemos despreciar su movimiento bajo su interacción mutua. En realidad, ambos objetos orbitan con respecto a su centro de masa común, pero si un objeto es mucho más masivo que el otro, el centro de masa está aproximadamente en el centro del cuerpo más masivo.

La base empírica para entender los movimientos de los planetas son las tres leyes de Kepler, ahora demostraremos como pueden relacionarse estas leyes con los resultados analíticos de las leyes de Newton.

- *La ley de las órbitas: todos los planetas se mueven en órbitas elípticas teniendo al sol como uno de los focos.*

Newton fue el primero en darse cuenta que existe una relación matemática directa entre el inverso de los cuadrados de las fuerzas y las órbitas elípticas. La figura muestra una órbita elíptica típica. El origen de las coordenadas está en el cuerpo central, y el cuerpo que gira en torno está localizado en las coordenadas polares

r y e . La órbita se halla descrita por el semieje mayor a y la excentricidad e . Una órbita circular es un caso especial de una órbita elíptica con $e = 0$, en cuyo caso los dos focos coinciden en un solo punto situado en el centro del círculo. Para los planetas del sistema solar, las excentricidades son pequeñas y las órbitas son casi circulares.

La distancia máxima R_a

del cuerpo en órbita al cuerpo central se indica con el prefijo griego apo, que significa lejos, como en afelio(apo-lejos, helios-sol) que significa distancia máxima desde el Sol, o apogeo(apo-lejos, geo-tierra), distancia máxima desde la tierra. De igual manera la distancia mas corta R_p esta indicada por el prefijo peri, como el perihelio y perigeo. Como se observa en la figura

para órbitas circulares

$$R_a = R_p = a$$

- *La ley de las áreas: una línea que una a cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Un cuerpo en órbita se mueve mas rápidamente cuando esta cerca del cuerpo central que cuando esta lejos. Demostraremos ahora que la ley de las áreas es idéntica a la ley de conservación del ímpetu angular.

Consideremos el pequeño incremento de área dA barrido en un intervalo de tiempo dt . El área de esta cuña aproximadamente triangular es la mitad de su base r , por su altura r . La tasa a la cual esta área es barrida es $dA/dt = \frac{1}{2}(r)(r\omega)/dt$. En el limite esto es

El ímpetu angular instantáneo del cuerpo que órbita es $L = mr^2\omega$, y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

En la medida en que podamos considerar a los dos cuerpos como un sistema aislado, L es una constante, y, por lo tanto, dA/dt es una constante. Por lo tanto, el aumento en la velocidad de un cometa que al pasar cerca del Sol es precisamente una demostración de la conservación del ímpetu angular.

Debe observarse que la conservación del ímpetu angular es valida para cualquier fuerza central, es decir, para cualquier fuerza que actúe a lo largo de una línea que une a dos partículas y que dependa solamente de la magnitud de la separación entre dos partículas. Observece también que, al verificar la ley de las áreas, no hemos empleado la ley del inverso de los cuadrados; la validez de la ley de las áreas no nos dice nada con respecto a como varia F con r .

- *La ley de los periodos: el cuadrado del periodo de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.*

Probemos este resultado en órbitas circulares. La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

Reemplazando a por r y $2\pi/T$, obtenemos

Se obtiene un resultado similar para órbitas elípticas, con el radio r reemplazado por el semieje mayor a .

La relación entre T^2
y a^3

debe estar determinada por la cantidad $\frac{4\pi^2}{GM}$

. Para todos los planetas que giran en torno al Sol, la razón $\frac{T^2}{a^3}$

debe ser una constante; la tabla muestra que este es el caso. Si podemos medir T y a para un cuerpo en órbita, podemos determinar la masa del cuerpo central. Este procedimiento es independiente de la masa del cuerpo que órbita, y así no nos da información con respecto a su masa.

Ejemplo: satélite geoestacionario

Se desea colocar un satélite de comunicaciones en órbita de modo que permanezca fijo sobre un punto dado en el ecuador de la tierra en rotación. ¿Cuál es la altura sobre la tierra de esa órbita?

Solución: para que el satélite permanezca sobre un punto dado de la superficie, debe girar a la misma velocidad angular que el punto. El periodo del satélite debe ser por lo tanto de 24hs o bien 86400seg. El radio de la órbita debe entonces ser:

$$r = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

y su altura sobre la superficie de la tierra es

$$h = r - R_t = 4.22 \times 10^7 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 3.58 \times 10^7 \text{ m}$$

Esta órbita se denomina la Órbita Geosíncrona Clarke, en honor a Arthur C. Clarke, quien propuso la idea por primera vez en 1948.

5. Campo Gravitatorio

Un hecho básico de la gravitación es que dos partículas ejercen sobre ellas fuerzas mutuas. Podemos considerar esto como una interacción directa entre las dos partículas, si lo deseamos. Este punto de vista se denomina acción a distancia, según el cual las partículas intercalan aunque no estén en contacto. Otro punto de vista es el concepto de campo, que considera que una partícula modifica de algún modo al espacio alrededor de ella y genera un campo gravitatorio. Este campo, actúa entonces sobre cualquier otra partícula, ejerciendo la fuerza de atracción gravitatoria sobre ella.

De acuerdo con este punto de vista tenemos dos partes separadas en nuestro problema. Primero, debemos determinar el campo gravitatorio generado por una distribución dada de partículas. Segundo, debemos calcular la fuerza gravitatoria que ejerce este campo sobre otra partícula situada en él.

Consideremos a la tierra como una partícula aislada y despreciemos todos los efectos rotatorios y otros que no sean los gravitatorios. Utilizamos un pequeño cuerpo de masa m_0 como una sonda del campo gravitatorio. Si este cuerpo se coloca en la vecindad de la Tierra, experimentara una fuerza que tiene una dirección y una magnitud definidas en cada punto situado en el espacio. La dirección es radial hacia el centro de la Tierra, y la magnitud es $m_0 \cdot g$. podemos asociar un vector g con cada punto cerca de la Tierra, el cual es la aceleración que ese cuerpo experimentaría se dejara caer en ese punto. Definimos a la intensidad del campo gravitatorio en un punto como la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto o, en términos de nuestra masa de prueba,

$$g = \frac{F}{m_0}$$

Ejemplo: Fuerza entre una masa y una fuerza.

Una barra homogénea de longitud L y masa M está a una distancia h de una masa puntual. Calcúlese la fuerza sobre m .

Solución:

Un segmento de la barra de longitud dx tiene una masa dM . Como la masa por unidad de longitud es constante, se sigue que la razón de las masas dM/M es igual a la razón de las longitudes dx/L , por lo que $dM = M/L dx$. La variable r en la ecuación equivale a x en nuestro caso y la fuerza sobre la masa m es hacia la derecha; de aquí se obtiene

La fuerza sobre una partícula que se encuentre en el origen debida a la barra es hacia la derecha. Obsérvese que la barra no es equivalente a una partícula de masa M localizada en su centro de masa.

Como se esperaba, vemos que la fuerza sobre m es en la dirección positiva de las x , ya que la fuerza gravitatoria es de atracción.

Obsérvese que en el límite $L \rightarrow 0$, la fuerza varía como lo cual es lo que se espera para la fuerza entre dos masas puntuales. Además, si $h \gg L$, la fuerza también varía como

. Esto se puede ver del hecho de que el denominador de la expresión para F se puede expresar en la forma , el cual es aproximadamente h^2

. Entonces, cuando los cuerpos se encuentran separados grandes distancias comparadas con sus dimensiones características, ellos se comportan como partículas.

6. Energía Potencial Gravitatoria.

En las proximidades de la superficie terrestre, la fuerza gravitatoria ejercida

por la Tierra sobre un objeto es constante, ya que la distancia al centro de

la Tierra, $r = R_T + h$ es siempre aprox. R_T para $h \ll R_T$. La energía potencial

de un objeto próximo a la superficie terrestre es $mg(r - R_T) = mgh$ en donde

se ha elegido $U = 0$ en la superficie de la Tierra, $r = R_T$. Si estamos lejos de

la superficie de la Tierra, debemos tener en cuenta el hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra no es constante sino que disminuye con

la distancia en la forma $1/r$. La definición general de la energía potencial

es:

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

en donde $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre una partícula y $d\mathbf{s}$ es el desplazamiento general de la partícula. Para la fuerza gravitatoria radial $\mathbf{F}$

dada por la ecuación: $F = \frac{GMm}{r^2}$

r^2

$$dU = -F \cdot ds = F_r dr = - \frac{GMm}{r^2} dr = + \frac{GMm}{r^2} dr$$

r^2

Integrando ambos miembros de ésta ecuación resulta

$$U = - \frac{GMm}{r} + U_0$$

r^2

en donde U_0 es una constante de integración. Como en la energía potencial

sólo importan los cambios, podemos darle el valor cero en cualquier posición.

La superficie de la Tierra es una buena elección para muchos problemas cotidianos, pero hay casos excepcionales. Por ejemplo, si consideramos la energía potencial asociada al sistema planeta-Sol, no hay ninguna razón para

elegir la superficie del Sol como origen. En efecto, casi siempre es más conve-

niente tomar como origen de la energía potencial gravitatoria de un sistema de

dos objetos cuando la separación de los objetos es infinita. Por ello, la elección $U_0 = 0$ suele ser muy conveniente. Así

$$U(r) = - \frac{GMm}{r} \quad U=0 \text{ a } r=\infty$$

r

Energía potencial gravitatoria con $U=0$ a separación infinita

La figura es un gráfico de $U(r)$ en función de r para esta elección de $U=0$

en $r=\infty$ para un objeto de masa m y la Tierra de masa M_T . Ésta función

comienza con el valor negativo $U = - \frac{GMm}{R_T} = -mgR_T$ en la superficie de la

R_T

Tierra y crece cuando r aumenta aproximadamente al valor cero para r infinito.

6.1 Velocidad de escape.

*En las últimas décadas la idea de escapar del campo gravitatorio terrestre ha pasado de la fantasía a la realidad. Sondas espaciales han sido enviadas a los puntos más alejados del sistema solar. Algunas de éstas sondas acabarán girando alrededor del Sol, mientras que otras abandonarán el sistema solar y se perderán en el espacio exterior. En ésta sección veremos que existe una velocidad inicial mínima llamada **velocidad de escape**, que es la necesaria para que un cuerpo escape de la Tierra.*

Si proyectamos un cuerpo hacia arriba desde la Tierra con cierta energía

cinética inicial, a medida que el cuerpo asciende, su energía potencial crece y la energía cinética disminuye. El máximo incremento de energía potencial, como podemos ver en la figura es $\frac{GMm}{RT}$. Por tanto, este valor es el mismo $\frac{GMm}{RT}$

que puede decrecer la energía cinética. Si la energía cinética inicial es mayor que $\frac{GMm}{RT}$, la energía total E será mayor que cero (E_2 en la figura) y el $\frac{GMm}{RT}$

cuerpo todavía tendrá cierta energía cinética cuando r sea muy grande (o incluso cuando r sea infinito). Así, el cuerpo escapará de la Tierra si la energía cinética inicial es mayor que $\frac{GMm}{RT}$

Como la energía potencial en la $\frac{GMm}{RT}$

superficie de la Tierra es $\frac{GMm}{RT}$, la energía total $E = EC + U$ debe ser mayor $\frac{GMm}{RT}$

o igual que cero para que el cuerpo escape. La velocidad del cuerpo próximo a la superficie terrestre, correspondiente a una energía total cero se denomina velocidad de escape v_e . Puede determinarse expresado que en la superficie de la Tierra la energía total es igual a cero.

$$E = EC + U = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{RT} = 0$$

$$\bullet \frac{GMm}{RT}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{RT}} = \sqrt{2gRT}$$

$\frac{GMm}{RT}$

Ejemplo:

¿Cuál es la energía potencial gravitatoria del sistema luna-tierra, respecto a la energía potencial a una separación infinita?

Solución:

Las masas de la tierra y de la luna son de 5.98×10^{24} kg. y 7.36×10^{22} kg., respectivamente, y su distancia de separación media d es de 3.82×10^8 m. Entonces según la ecuación:

Una energía de esta magnitud es aproximadamente igual a la producción de energía industrial mundial, a su

tasa actual, durante aproximadamente 10^8 años.

FISICA I