

Análisis Matemático (Biología)

Capítulo II: Funciones

Función: sean A y B conjuntos no vacíos y f una relación que asigna a cada elemento de A un único elemento de B. Entonces f es una función que tiene Dominio A y Codominio B.

$f: A \rightarrow B$

**Dominio:* Conj. En el que elegimos la primera variable.

**Codominio:* Conj. En el que se asignaran los valores de la función.

**Relación funcional:* método o procedimiento por el que asignamos a cada elemento del dominio un único elemento del codominio.

El dominio y el codominio pueden ser el mismo conjunto. Sin embargo, los papeles que juegan en la definición son totalmente diferentes y asimétricos.

**Imagen de f:* es un subconjunto del codominio de f.

$\text{Im } f = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tal que } b=f(a)\}$

Im f es un subconjunto del codominio de f

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto ax + b$ vale $f(x) = a \cdot x + b$

Si $a \neq 0$ función lineal

Si $a = 0 \mid x \in \mathbb{R}, f(x)=b$ función constante

Función polinomial o polinomio: suma de un número finito de funciones potenciales donde $a_n \neq 0$

Función racional: cociente de dos polinomios, es propia si el grado del polinomio divisor es mayor que el del dividendo. En caso contrario impropia.

El dominio de una función real cuya relación funcional esta dada por una fórmula será el mayor conjunto de números reales en el cual la fórmula en cuestión es válida.

Dado $a > 0, a \neq 1$ se llama *Función exponencial* de base a a la función

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya relación funcional es:

$\exp(x) = a^x$

Sea $b > 0, b \neq 1$ se indica con $\log_b x$ al único número t tal que elevando b a la potencia t se obtiene x

$\log_b x = t \iff b^t = x$

Diremos que $g: A \rightarrow B$ es una función *inyectiva* si

$$\{x_1\} \subseteq A, \{x_2\} \subseteq A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

Una función f es *sobreyectiva* si la imagen de f coincide con el codominio de f .

Una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Composición de funciones

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$

$$h: A \rightarrow C, h(x) = g(f(x))$$

Se denomina *composición de f con g o $g \circ f$* .

*Para que la composición este definida la imagen de la primera función debe estar incluida en el dominio de la segunda.

*La composición no es conmutativa, la regla de la cadena y el método de sustitución se basan en este concepto.

$f: A \rightarrow B$ es una transformación que convierte cada elemento de A en un único de B , si existe una transformación de regreso, $g: B \rightarrow A$, entonces compuesta con f resulta ser la identidad en A . Tal función g es la *función inversa* de f que verifica:

$$g \circ f = \text{id}_A \quad f \circ g = \text{id}_B$$

En caso de existir se denota $f^{-1}: B \rightarrow A$

Teorema II.1: La función $f: A \rightarrow B$ admite función inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ si y sólo si f es biyectiva.

Entonces

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Por lo tanto resulta que,

$$(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (y; x) \in G_{f^{-1}}$$

El gráfico de f^{-1} está formado por los mismos pares del gráfico de f , donde se han permutado las componentes.

Proposición II.2: si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, el gráfico de f^{-1} es un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales es el transformado simétrico del gráfico de f respecto de la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante

$$(y = x)$$

Características gráficas de las funciones.

Proposición II.3: El arco de curva es el gráfico de una función con dominio A si y sólo si la recta vertical trazada por cada elemento $x_0 \in A$

interseca a Γ precisamente en un punto.

Proposición II.4: La función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si " $y_0 \in B$ " la recta horizontal de altura y_0 interseca a $\text{Gr } f$ a lo sumo en un punto.

Proposición II.5: La función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si

" $y_0 \in B$ " la recta horizontal de altura y_0 interseca a $\text{Gr } f$ por lo menos en un punto.

Proposición II.6: La función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva si y sólo si " $y_0 \in B$ " la recta horizontal de altura y_0 interseca a $\text{Gr } f$ precisamente en un punto.

Llamaremos raíz o cero de f a todo elemento $x \in A$ tal que $f(x) = 0$.

Conjunto de raíces:

$$C_0(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$$

Conjunto de positividad:

$$C_+(f) = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$$

Conjunto de negatividad:

$$C_-(f) = \{x \in A \mid f(x) < 0\}$$

Estos tres conjuntos son subconjuntos del dominio de f , más aún

$$A = \text{Dom } f = C_0(f) \cup C_+(f) \cup C_-(f)$$

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *par* si se verifica que

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ vale } f(-x) = f(x)$$

Proposición II.7: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función par, entonces su gráfico es lateralmente simétrico respecto del eje vertical.

Simetría axial respecto de un eje o recta

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *impar* si se verifica que

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ vale } f(-x) = -f(x)$$

Proposición II.8: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función impar, entonces su gráfico es simétrico respecto del origen de coordenadas.

Simetría central respecto de un punto

Muchas funciones reales no son pares ni impares.

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica con período > 0 si vale

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ vale } f(x + p) = f(x)$$

Esta propiedad es característica de las funciones trigonométricas y combinaciones; entonces dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica con

período p , es suficiente estudiar su comportamiento en un intervalo de la forma $[x_0; x_0 + p]$.

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $P \subset A$: f es acotada superiormente en P si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in P \text{ vale } f(x) \leq M.$$

En tal caso M es una cota superior de f en P .

f es acotado inferiormente en P si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in P \text{ vale } f(x) \geq m.$$

m es una cota inferior de f en P .

Más generalmente, f es acotada en P si y solo si f es acotada superior e inferiormente en P .

Proposición II.9: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f es acotada si y sólo si existe un intervalo $[a; b]$ tal que

$$\text{Im } f \subset [a; b].$$

Capítulo III: Límites y Continuidad

El concepto de límite

El límite de $f(x)$ para x tendiendo a x_0 es l , y se denota

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

$$x \neq x_0$$

si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow 0 < f(x) - l < \epsilon$$

$$- \delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow - \epsilon < f(x) - l < 0$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

Para cada ϵ dado obtenemos un δ , es decir que el δ depende del ϵ que uno considere.

- ϵ es arbitrario, la definición se tiene que cumplir cualquiera sea el ϵ positivo que se considere.
- En la definición de límite de una función $f(x)$ para $x \rightarrow x_0$ no interesa el valor de la función en el punto x_0 . Este valor puede:

- Ser igual al límite l
- Ser diferente de l
- Directamente no existir

Propiedades de los límites

Propiedad de unicidad del límite funcional: Sea f definida en todo $(a;b)$ salvo quizás en $c \in (a;b)$. Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_2$.

$x \neq c$

Entonces vale $l_1 = l_2$.

Teorema del sándwich : Sean f, g y h funciones definidas en $(a;b)$ salvo quizás en $c \in (a;b)$ tales que

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $x \in (a;b), x \neq c$
- $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$; $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$.

$x \neq c$

Entonces vale $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$.

$x \neq c$

Proposición III.3: Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ y

$x \neq c$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$. Entonces vale

$x \neq c$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l \pm k$$

$x \neq c$

Proposición III.4: Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$,

$x \neq c$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$. Entonces vale

$x \neq c$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l \cdot k$$

$x \neq c$

Corolario III.5: Sea f una función tal que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$, y p una

$x \neq c$

constante. Entonces vale

$$\lim_{x \rightarrow c} p = p ; \lim_{x \rightarrow c} [p \cdot f(x)] = p \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = p \cdot l$$

$x \neq c$

Proposición III.6: Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$,

$x \neq c$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$. Entonces vale

$x \neq c$

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$

$f(x) \rightarrow l$

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x)}{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = k$

$x \neq c$

Proposición III.7: Sea $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, y sea g una función acotada cerca

$x \neq c$

de c . Entonces resulta

$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

$x \neq c$

Proposición III.8: Sea $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$. Entonces vale

$x \neq c$

- Si $l < b$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < b$.
- Si $l > b$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > b$.

Límites especiales

- *Límites en el infinito*

Describe cómo se comporta la función cuando los valores de la variable se alejan mucho.

El límite de $f(x)$ para $x \rightarrow +\infty$ es l , es decir:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

$x \rightarrow +\infty$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$, es decir $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

Paralelamente,

El límite de $f(x)$ para $x \rightarrow -\infty$ es l , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$x \rightarrow -\infty$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $x < -M$ entonces $|f(x) - l| < \epsilon$, es decir $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

• Límites infinitos

Sea f definida en $(a;b)$ salvo quizás en $c \in (a;b)$. El límite de $f(x)$ para $x \rightarrow c$ es $+\infty$, y se denota

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow c$$

si cualquiera sea el número real positivo M existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < x - c < \delta, \text{ entonces vale } f(x) > M.$$

Sea f definida en $(a;b)$ salvo quizás en $d \in (a;b)$. El límite de $f(x)$ para $x \rightarrow d$ es $-\infty$, y se denota

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow d$$

si cualquiera sea el número real positivo M existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < x - d < \delta, \text{ entonces vale } f(x) < -M.$$

El límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow c$ es *infinito sin signo*, y se denota

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

$$x \rightarrow c$$

si dado M positivo y arbitrariamente grande, existe $\delta > 0$ tal que si vale $0 < x - c < \delta$, entonces vale $|f(x)| > M$, o lo que es lo mismo, se verifica $(f(x) > M)$ o $(f(x) < -M)$.

• Límites laterales

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in D$. Llamaremos límite lateral por la derecha de $f(x)$ para $x \rightarrow c$, y se denota

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l,$$

$$x \rightarrow c^+$$

al límite de $f(x)$ restringida a los valores de x mayores que c , es decir si $\epsilon > 0$ $\delta > 0$ tal que cada vez que $0 < x - c < \delta$ se verifique que $|f(x) - l| < \epsilon$.

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in D$. Llamaremos límite lateral por la izquierda de $f(x)$ para $x \rightarrow c$, y se denota

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = k,$$

$x \neq c$

al límite de $f(x)$ restringida a los valores de x menores que c , es decir si " $\epsilon > 0$ " " $\delta > 0$ " tal que cada vez que $0 < c - x < \delta$ se verifique que $0 < f(x) - k < \epsilon$.

En este caso $0 < c - x$ significa que x es menor que c .

Proposición III.9: Sea f una función definida en un intervalo abierto $(a;b)$ salvo quizás en

$c \in (a;b)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$

$x \neq c$

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$

$x \neq c$

Esta proposición afirma que la condición necesaria y suficiente para la existencia de límite funcional es que ambos límites laterales existen y sean iguales.

Cálculo de límites indeterminados

Límite indeterminado: problema de cálculo de límite que no puede resolverse mediante las reglas operatorias elementales. Son las del tipo $0/0$, " ∞/∞ ", $0 \cdot \infty$, " $\infty - \infty$ ", 00 , " 0 y 1 ".

Proposición III.10: Sea c un número real y n un número natural cualesquiera. Entonces

c

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$x \neq c$

Proposición III.11: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$x \neq 0$

Gráficamente

$$\sin x < x < \tan x$$

O, lo que es lo mismo

$$\sin x < x < \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin x < x < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x$$

Pero en $(0; \pi/2)$ $\sin x$ es positivo, entonces se divide miembro a miembro por $\sin x$

$$x > 0$$

$$1 < \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin x < \cos x$$

Elevando a -1 , se invierten las desigualdades

$$\sin x > \cos x$$

$$1 > \frac{1}{\sin x} > \cos x$$

$$x > 0$$

Tomando límites para $x \rightarrow 0^+$ el $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$. Estamos en

$$x \rightarrow 0^+ \quad x \rightarrow 0^+$$

condiciones del Teorema del sándwich y por lo tanto vale

$$\sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad x$$

Como $\sin x$ es una función impar, para valores negativos de x resulta,

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \sin(-x) = -\sin t$$

$$\frac{\sin x}{x} = -\frac{\sin(-x)}{x} = -\frac{\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t}$$

$$x \rightarrow 0^- \quad x \rightarrow 0^- \quad t$$

con $t = -x > 0$. Por lo tanto

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \sin(-x) = -\sin t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$x \rightarrow 0^- \quad x \rightarrow 0^- \quad x \rightarrow 0^+ \quad t$$

Por lo tanto resulta

$$\sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow 0 \quad x$$

En general

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

*Límite de funciones exponenciales: de la siguiente forma

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = C$

$x \rightarrow a$

La solución depende de la existencia y el valor de los siguientes límites:

$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) ; B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$x \rightarrow a$

Se presentan los siguientes casos:

- A finito, B finito, uno de ellos no nulo. Entonces es $C = A^B$
- A finito, $A \neq 1$, $B = \pm\infty$. En este caso la solución va a depender del signo de B y si A es mayor que 1 o no lo es:
 - $A > 1$, $B = +\infty$! $C = +\infty$
 - $A > 1$, $B = -\infty$! $C = 0$
 - $0 < A < 1$, $B = +\infty$! $C = 0$
 - $0 < A < 1$, $B = -\infty$! $C = +\infty$
- $f(x) > 0$, $A = 1$, $B = \infty$. Este es el caso más complicado, se resuelve aplicando

$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e$

$t \rightarrow 0$

o

$\lim_{x \rightarrow \infty} [1 + 1/x]^x = e$

$t \rightarrow 0$

Veamos la razón teórica: existe un teorema que afirma:

Una función creciente y acotada superiormente tiene límite finito para $x \rightarrow +\infty$.

La función

$h(x) = [1 + 1/x]^x$

es creciente. Además el número 3 es una cota superior, por lo tanto el límite existe y es menor que 3. Se designa a dicho límite como e.

Es fácil demostrar:

Proposición III.12: Si vale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, entonces vale

$x \neq a$

$$\lim_{x \rightarrow a} [1 + 1/f(x)]^{f(x)} = e.$$

$x \neq a$

Prop.: Si f está definida en $(a;b)$ salvo tal vez en $c \in (a;b)$ y además

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l, \text{ entonces } x \neq c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \ln(f(x)) = \ln l.$$

$x \neq c$

Concepto de continuidad.

Sea f una función definida en un intervalo abierto $(a;b)$, y sea $x_0 \in (a;b)$. f es continua en x_0 si y sólo si $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Es decir se pide

$x \neq x_0$

que exista (y sea finito) el límite cuando $x \rightarrow x_0$, y que coincida con $f(x_0)$.

Enunciado formal:

f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (depende de ϵ) tal que $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

f es continua en un conjunto A si lo es en cada uno de los puntos de dicho conjunto.

La continuidad de f en x_0 equivale al cumplimiento de tres condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y es finito

$x \neq x_0$

- Está definido $f(x_0)$, o lo que es lo mismo, $x_0 \in \text{Dom } f$.
- $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$x \neq x_0$

f tiene una *discontinuidad evitable* cuando aunque no sea continua es posible completar su definición para hacerla continua.

Si no se cumpliera a), se llama *discontinuidad inevitable*.

Propiedades de las funciones continuas

Proposición III.13: Sean f y g funciones continuas en x_0 , entonces $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son funciones continuas en

x_0 . Si además vale $g(x_0) \neq 0$, f/g también es continua en x_0 .

Proposición III.14: Sea g continua en x_0 , y f continua en $g(x_0)$.

Entonces $f \circ g$ es continua en x_0 .

Proposición III.15: Toda función polinómica es continua. Una función racional es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de 0.

Proposición III.16: Las funciones $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ (con $x \neq \pi/2 + k$, k entero), e^x , $\ln x$ ($x > 0$), x^a (si $x > 0$) son continuas.

Teorema III.17: Sea $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f es acotada y tiene máximo y mínimo en $[a;b]$. Un máximo de f en $[a;b]$ es un punto $c \in [a;b]$ tal que $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a;b]$. Paralelamente un mínimo de f en $[a;b]$ es un punto $d \in [a;b]$ tal que $f(d) \leq f(x) \forall x \in [a;b]$.

Teorema de Bolzano: Sea $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ (o bien $f(a) < 0$, $f(b) > 0$). Entonces existe una raíz de f en $[a;b]$ (es decir, $\exists c \in (a;b)$ tal que $f(c) = 0$).

Las hipótesis son dos:

- Continuidad de f en el intervalo cerrado $[a;b]$.
- f debe asumir signo opuestos en los extremos del intervalo

La tesis afirma la existencia de una raíz $c \in (a;b)$, pero no su unicidad.

Si falla la hipótesis 1. no es posible afirmar nada acerca de la existencia de raíces.

Teorema del valor intermedio: Sea $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que

$f(a) < f(b)$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$. Entonces $\exists c \in (a;b)$ tal que $f(c) = \alpha$.

Capítulo IV: Función exponencial y Función logarítmica

Propiedades básicas de la función exponencial

Proposición IV.1: Sean $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^x = a^{x/y} \cdot a^{y/y} = a^{x/y} \cdot a$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^y = \frac{a^x}{a^{x-y}}$$

- $[a^x]^y = a^{x \cdot y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

La función exponencial general puede escribirse de dos maneras equivalentes:

$$f(x) = k \cdot a^x \text{ o bien } f(x) = k \cdot e^{x \ln a}$$

donde $a = e$, o lo que es lo mismo $\ln a = 1$. Resulta imprescindible que la base a sea estrictamente positiva, ya que en caso contrario no podría definirse la función.

Teorema IV.4: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = k \cdot a^x$ con $k > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces f es biyectiva

Demostración: primero f no es una función acotada. Supongamos que $k = 1$ y $a > 1$, en este caso los valores de f son positivos. Supongamos la existencia de una cota $M > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ valga $a^x < M$. Entonces sería

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot \log a < \log M$$

y como $\log a > 0$!

$$\log M$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < \frac{\log M}{\log a},$$

$$\log a$$

que es un absurdo, ya que implicaría que $\mathbb{R}$ fuera acotado superiormente. Luego, $f(x) = a^x$ no puede ser acotada superiormente. Pero por ser creciente es inyectiva, y por ser continua, el teorema de Bolzano afirma que es sobreyectiva.

Crecimiento exponencial

$$e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

$$x! \sim x^n$$

Demostración: $\forall t > 0$ vale

$$e^t > 1 + t$$

Por lo tanto

$$e^t > 1$$

$$\forall t > 0, \frac{e^t}{t} > 1 + \frac{1}{t} > 1$$

$$t \cdot t$$

Dado $x > 0$, por el llamado axioma de Arquímedes existe un número natural k tal que $k > x$. Si $x > 0$, tomamos $t = x/k$ y vale

$$e^{x/k}$$

$$\frac{e^{x/k}}{x/k} > 1$$

$$x/k$$

donde resulta

$$e^{x/k} > 1$$

$$e^{x/k} > 1$$

$$x^k$$

elevando ambos miembros a la potencia k

$$e^x > 1$$

$$e^x > 1$$

$$x^k > k$$

Pero $x^k > 0$ ($x > 0$ y $k > 0$). Multiplicando ambos miembros por ese factor

$$e^x \cdot x^k > x^k$$

$$e^x \cdot x^k > x^k$$

$$x^k \cdot x^k > k \cdot x^k$$

Tomando límite para $x \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$e^x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} > \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x^k} = 1.$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x^k \rightarrow +\infty$$

Este resultado afirma que la función exponencial crece más rápido que cualquier función potencial, en particular que cualquier polinomio.

Proposición IV.6: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función exponencial de la forma

$$f(x) = k \cdot a^x. \text{ Entonces } k = f(0) \text{ y } a = \frac{f(x+1)}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x)$$

Demostración: En la primera afirmación basta evaluar

$$f(0) = k \cdot a^0 = k$$

Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet f(x) = a \cdot k \cdot a^x = k \cdot a^{x+1} = f(x+1)$$

y recordando $f(x) \neq 0$, se puede despejar el valor de a.

Proposición IV.7: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función exponencial expresada en la forma $f(x) = k \cdot e^x$. Entonces $x \in \mathbb{R}$ vale

$$= \ln f(x+1) - \ln f(x).$$

Propiedades básicas de la función logarítmica.

Teorema IV.8: La función logaritmo de base a con $a > 0$, $a \neq 1$,

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_a x$$

es una función no acotada, biyectiva y continua. Será estrictamente creciente si $a > 1$, estrictamente decreciente si $a < 1$.

En lo que sigue la base b será positiva y distinta de 1.

Proposición IV.9: Sean $x > 0$, $y > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces vale:

- $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b [x/y] = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b (x^a) = a \cdot \log_b x$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b 1 = 0$

Proposición IV.10: Sean a , b y t números reales positivos, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Entonces vale

$$\log_b t = \log_a t \cdot \log_b a$$

Demostración: Sea $x = \log_a t$, $y = \log_b t$. Equivale a $t = a^x$ y $t = b^y$. Por lo tanto vale

$$b^y = a^x$$

Tomando $\log_b$ de ambos miembros

$$y = y \cdot \log_b b = x \cdot \log_b a$$

reemplazando x e y

$$\log_b t = \log_a t \cdot \log_b a.$$

Si la base es mayor que 1, la función logarítmica es creciente. Sin embargo, puesto que es inversa de una exponencial que crece muy rápidamente es razonable esperar que el logaritmo crezca muy lentamente.

Teorema IV.11: Para todo número positivo vale

$$x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x! \sim \ln x$$

Demostración: Sea $t = \ln x$, entonces $x = e^t$. Luego

$$x \sim e^t \sim e^t$$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\ln x \sim \frac{1}{x}$$

si $x \rightarrow +\infty$, entonces $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

x et et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

La función logaritmo natural crece más lentamente que cualquier función potencial de exponente positivo.

Capítulo V: Derivadas

Llamaremos *cociente incremental o razón incremental* de f en x_0 , para un incremento Δx de la variable independiente, al cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente. En símbolos,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

El cociente incremental de una función f en el punto x_0 , para un determinado incremento Δx de la variable independiente: es la pendiente de la recta secante al gráfico de la función f , que pasa por los puntos $(x_0; y_0)$ y $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$.

El concepto de la derivada

La derivada de una función en un punto es el límite del cociente incremental en ese punto, cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0.

$$y'_0 = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Por simplicidad si llamamos $\Delta x = h$ se denota

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$h \rightarrow 0$$

Si se define $x = x_0 + h$ resulta que $h \rightarrow 0$ si y sólo si $x \rightarrow x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

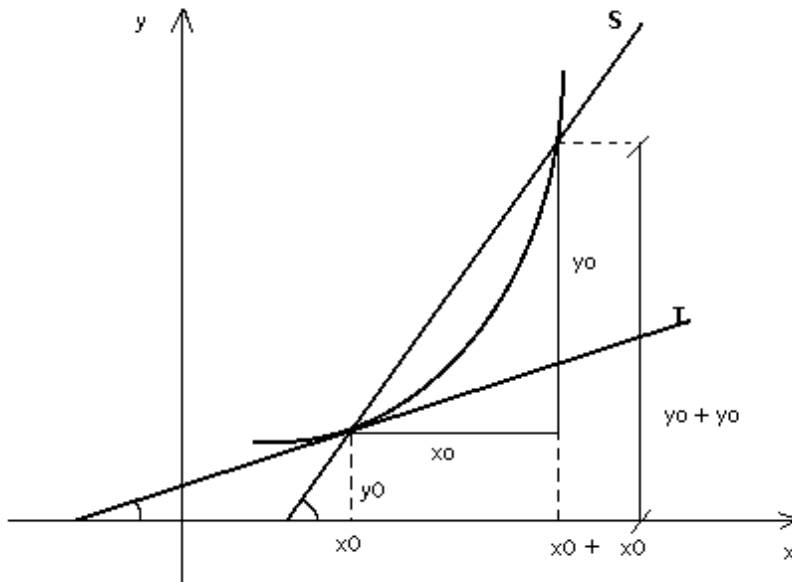
$$x \rightarrow x_0 \quad x - x_0$$

Recordando el significado geométrico del cociente incremental vale decir que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha = m$$

"x0

donde s y ms son la inclinación y la pendiente de la recta secante S .



Si $\Delta x \rightarrow 0$, entonces también $\Delta y \rightarrow 0$ y el punto $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ se mueve sobre el gráfico de f ocupando posiciones que tienden a $(x_0; y_0)$. La recta S tiende a la posición de la recta T en la que tiene con la curva solo un punto en común, el $(x_0; y_0)$. En otras palabras, T es la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0; y_0)$. El ángulo α tiende al ángulo α_0 que forma T con el semieje horizontal positivo. Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha_0$$

!

Se deduce que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha_0$$

"x0!0 "x0 !

La derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 es la pendiente de la recta T tangente al gráfico de f en el punto $(x_0; y_0)$.

Resulta que la ecuación de la recta T tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0; f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Casos especiales de derivadas

- *Derivadas laterales*

Las expresiones

$$f'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h \rightarrow 0^+ h$$

o

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h \rightarrow 0^- h$$

se llaman derivada a la derecha y derivada a la izquierda de la función f en x .

Proposición V.1: Dada una función f , existirá $f'(x)$ si y sólo si existen $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ y además se verifica $f'_+(x) = f'_-(x)$

• Derivada infinita

Sea f una función continua y z un punto de su dominio tales que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \infty$$

$h \in \mathbb{R}$

diremos que f tiene derivada infinita en z . En este caso la tangente al gráfico de f en z será perpendicular al eje x .

• Continuidad versus derivabilidad

Teorema V.2: Sea f una función derivable en z . Entonces f es continua en z .

El recíproco de este teorema es falso. Por supuesto sí es válido el contra recíproco, que afirma que la falta de continuidad implica la no derivabilidad.

Cálculo de derivadas

Algunos ejemplos de derivadas de funciones:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^m	$m \cdot x^{m-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
$\arccos x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctg x$	$1/(1+x^2)$

Reglas generales de derivación

Proposición V.3: Sean f y g dos funciones con dominio $(a;b)$ y sea

$z \in (a;b)$ tal que tanto f como g son derivables en z . Entonces $f \pm g$ es derivable en z , vale $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$.

Proposición V.4: Sean f y g dos funciones con dominio $(a;b)$ y sea

$z \in (a;b)$ tal que tanto f como g son derivables en z . Entonces $f \cdot g$ es derivable en z , vale $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

Corolario V.5: Sea f una función derivable en z , y $c \in \mathbb{R}$. Entonces vale

$$(c \cdot f)'(z) = c \cdot f'(z).$$

Corolario V.6: Sean f , g y h funciones derivables en z . Entonces

$$(f \cdot g \cdot h)'(z) = f'(z) \cdot g(z) \cdot h(z) + f(z) \cdot g'(z) \cdot h(z) + f(z) \cdot g(z) \cdot h'(z)$$

Proposición V.7: Sea f derivable en z , tal que $f(z) \neq 0$. Entonces $1/f$ es derivable en z , y además vale

$$\left[\frac{1}{f} \right]'(z) = \frac{-f'(z)}{f^2(z)}$$

$$f^2(z)$$

Proposición V.8: Sean f y g dos funciones derivables en z tales que

$g(z) \neq 0$. Entonces $(f/g)'(z)$ es derivable en z y vale

$$\left[\frac{f}{g} \right]'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$$

$$g^2(z)$$

Regla de la cadena

Sea g una función derivable en z y f otra función derivable en $g(z)$. Entonces $f \circ g$ es derivable en z y vale

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Derivadas sucesivas

Sea una función $f: (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $(a;b)$. Queda definida una nueva función $f': (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ llamada función derivada. Es posible que esta nueva función sea derivable. En tal caso, es posible calcular su propia derivada, que se denotará f'' , y se denomina derivada segunda de f . De la misma manera puede definirse la derivada tercera, la cuarta, etc.

Derivada de la función inversa

f es una función biyectiva y derivable en x , entonces existe la función inversa f^{-1} y verifica que

$$(f \circ f^{-1})(y) = y ; (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Si suponemos $f'(x) \neq 0$ resulta

$$(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$$

Si escribimos $y = f(x)$, resulta ser $x = f^{-1}(y)$. Sustituyendo

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

Se aplica este resultado al cálculo de derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Derivación logarítmica

Sean f y g dos funciones derivables y $x \in \text{dom} f$, $f(x) > 0$. Consideramos

$$k(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

Tomando $\ln$ de ambos miembros

$$\ln [k(x)] = g(x) \cdot \ln[f(x)]$$

Derivando ambos miembros

$$1 \cdot k'(x) = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot k(x)$$

De donde resulta

$$k'(x) = \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + g'(x) \cdot \ln[f(x)] \right\} \cdot k(x)$$

$$f'(x)$$

Capítulo VI: Aplicaciones de la derivada

Teoremas de valor medio del Cálculo Diferencial.

Teorema VI.1: Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a;b) \subset A$, tal que x_0 sea un extremo local de f (máximo o mínimo local). Supongamos además que f sea derivable en x_0 . Entonces vale $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Rolle: Sea f una función continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$, tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = 0$.

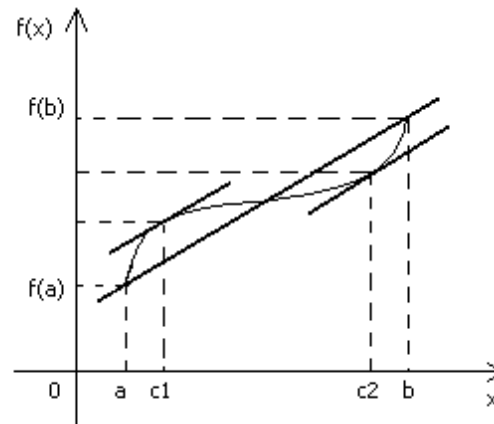
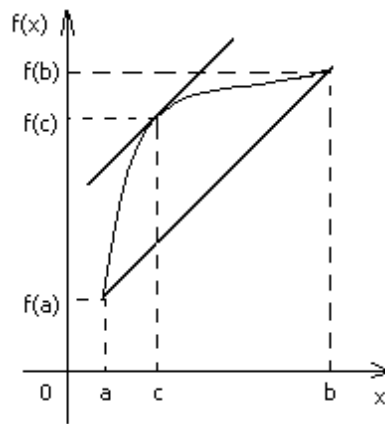
Este teorema exige tres hipótesis distintas:

- Continuidad de $f(x)$ en $[a;b]$.
- Derivabilidad de $f(x)$ en $(a;b)$
- $f(a) = f(b)$.

Teorema de Lagrange: Sea una función continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$. Entonces existe $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$b - a$



Este gráfico exhibe el sentido geométrico del teorema de Lagrange. En pocas palabras dice que si una función es continua y derivable en un intervalo, la recta tangente en algún punto interior al intervalo es paralela a la cuerda del gráfico de dicha función en ese intervalo.

El teorema de Lagrange es una generalización del teorema de Rolle.

Teorema de Cauchy: Sean f y g funciones continuas en $[a;b]$ y derivables en $(a;b)$. Entonces existe $c \in (a;b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$$

Si además g' no se anula en ningún punto de $(a;b)$, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$g(b) - g(a) \cdot g'(c)$$

Regla de L'Hospital

Teorema VI.5: Sean f y g funciones derivables en $(a;b)$, $z \in (a;b)$ tales que $f(z) = g(z) = 0$, y $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a;b)$, $x \rightarrow z$. Entonces vale

$$\lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x \rightarrow z \quad g(x) \neq 0 \quad x \rightarrow z \quad g'(x) \neq 0$$

siempre que este último límite exista.

Teorema VI.6: Sean f y g funciones derivables en $(a;b)$, $z \in (a;b)$ tales que $f(z) = g(z) = \infty$, y $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a;b)$, $x \rightarrow z$. Entonces vale

$$\lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x \rightarrow z \quad g(x) \neq 0 \quad x \rightarrow z \quad g'(x) \neq 0$$

siempre que este último límite exista.

Caso 0." : Calcular $\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)]$ donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

$x \rightarrow a$

En este caso definimos $h(x) = 1 / g(x)$ y resulta que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$$

$x \rightarrow a$

que es de la forma $0/0$.

Caso "-": Calcular $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

$x \rightarrow a$

Si a y b no son nulos vale

$$(a - b) = (a.b).(b^{-1} - a^{-1}).$$

Entonces resulta que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \{ [f(x).g(x)] . [1/g(x) - 1/f(x)] \}$$

$x \rightarrow a$

que es de la forma $0 \cdot \infty$.

Caso 1" : Calcular $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ donde $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ con $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$,

$x \rightarrow a$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Hacemos la transformación

$$k(x) = \ln h(x) = g(x) . \ln f(x)$$

Calculamos entonces

$$L = \lim_{x \rightarrow a} k(x) = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) . \ln f(x)]$$

$x \rightarrow a$

que es de la forma $0 \cdot \infty$. Si este límite es finito, será finalmente

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = e^L$$

$x \rightarrow a$

Sentido del crecimiento. Máximos y mínimos.

Lema VI.7: Sea $f: A \rightarrow B$, $(a;b) \subset A$. Son equivalentes:

- f es estrictamente creciente en $(a;b)$
- " x_0 " $(a;b)$ y para todo incremento " $x_0 + \Delta x$ " $(a;b)$ el signo del incremento de la variable independiente " x_0 " y el signo del incremento de la función " y_0 " coinciden.

Teorema VI.8: Sea f derivable en $(a;b)$ y continua en $[a;b]$, luego

- $f'(x) > 0$ " x " $(a;b)$! f estrictamente creciente en $[a;b]$.
- $f'(x) < 0$ " x " $(a;b)$! f estrictamente decreciente en $[a;b]$.
- $f'(x) = 0$ " x " $(a;b)$! f constante en $[a;b]$.

Dada la función $f: A \rightarrow B$ y $x_0 \in A$, diremos que x_0 es un máximo local de f

[x_0 es un mínimo local de f] si existe un intervalo $I = [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap A$ tal que " x " I vale $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]. Diremos que x_0 es un extremo local de f si es un máximo local o un mínimo local de f .

Teorema de Fermat: Sea $f: A \rightarrow B$, $x_0 \in (a;b) \cap A$, tal que x_0 sea un extremo local de f (máximo o mínimo local). Si además que f sea derivable en x_0 . Entonces vale $f'(x_0) = 0$.

Observaciones:

- no es cierto que la anulación de la derivada implique que el punto en cuestión sea un extremo local.
- Si el extremo local x_0 no es interior a un intervalo abierto incluido en el dominio, el teorema no vale.
- Si no se supone derivabilidad en x_0 , la condición de extremo local no queda caracterizada por ninguna propiedad de la derivada laterales, en caso de existir.
- Si se supone además que la derivada es continua, las observaciones anteriores y este teorema nos sugiere que la manera sistemática para estudiar el crecimiento de una función $f(x)$ debe comenzar computando todas las raíces de $f'(x)$, luego seguir analizando el signo de dicha derivada en los intervalos determinados por dos raíces consecutivas.

Si f es una función derivable en todo su dominio, llamaremos *punto crítico* de f a cualquier raíz de f' . Entonces x_0 es un punto crítico de f si y sólo si $x_0 \in \text{Dom} f$, y $f'(x_0) = 0$. En estas condiciones el teorema de Fermat se puede expresar así:

Si $x_0 \in (a;b) \cap \text{Dom} f$, y es un extremo local de f , entonces es un punto crítico de f .

Estudio de la curvatura del gráfico de una función.

Teorema VI.10: Sea f una función dos veces derivable en $(a;b)$.

- " x " $(a;b)$ $f''(x) > 0$! f tiene curvatura positiva en $(a;b)$
- " x " $(a;b)$ $f''(x) < 0$! f tiene curvatura negativa en $(a;b)$

Diremos que x_0 es un *punto de inflexión* de $f(x)$ si existe un intervalo abierto $(a;b) \cap \text{Dom} f$ tal que $x_0 \in (a;b)$ y f tiene un determinado sentido de curvatura en $(a;x_0)$ y el sentido contrario de curvatura en $(x_0;b)$. Aplicando el teorema de Fermat resulta:

Proposición VI.11: Sea x_0 un punto de inflexión de $f(x)$. Entonces, si f es dos veces derivable en x_0 , vale $f''(x_0) = 0$.

Los puntos de inflexión están caracterizados gráficamente ya que la tangente atraviesa a la curva de f .

Problemas de máximos y mínimos

Proceso para resolverlos:

- dar un nombre a cada una de las variables
- tratar de dibujar un 'figura de análisis'
- expresar la variable a optimizar como función de las restantes que aparecen
- expresar las relaciones matemáticas entre las restantes variables, que permitan obtener todas ellas en términos de una sola, a la que designaremos 'variable independiente'.
- Reemplazar las expresiones obtenidas en 4 en la función que obtuvimos en 3. Resulta así la variable a optimizar como función de la variable independiente.
- Derivar dicha función y determinar los puntos críticos
- Clasificarlos
- Seleccionar aquel que se ajuste a lo pedido por el problema
- Reemplazar el valor obtenido de la variable independiente en la función y verificar que el resultado sea 'realista'.

Asíntotas

La recta L es una asíntota de la función $f(x)$ si la distancia entre puntos de L y puntos del gráfico de f tiende a 0 al alejarse sobre la recta en alguna de las dos direcciones posibles (o en ambas).

Teorema VI.13: Sea f una función, $c \in \text{Dom} f$. Son equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$

$x \neq c$

- La recta vertical $x = c$ es asíntota del gráfico de f .

Teorema VI.14: Sea f una función cuyo dominio no es acotado. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

- La recta horizontal $y = k$ es una asíntota del gráfico de f .

La condición sobre la distancia entre la curva y la recta se expresa así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

$x \in \mathbb{R}$

o, lo que es lo mismo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (mx + b)$$

$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$

y dividiendo ambos miembros por x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx + b}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (m + b/x) = m.$$

$$x! " x x! " x x! "$$

De la primera se obtiene

$$b = \lim [f(x) - mx]$$

$$x! "$$

Teorema VI.15: Sea f una función cuyo dominio no sea acotado. Entonces son equivalentes:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m \text{ " } \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = b \text{ " } \mathbb{R}$$

$$x! " x x! "$$

- La recta de ecuación $y = mx + b$ es una asíntota no vertical del gráfico de f .

Estudio diferencial de una función.

Algoritmo:

- Determinar $\text{Dom}f$, raíces, conj. de positividad y negatividad.
- Analizar la continuidad de f . Clasificar discontinuidades.
- Calcular f' . Determinar los puntos críticos.
- Expresar el $\text{Dom}f$ como unión de intervalos abiertos cuyos extremos sean puntos críticos de f , puntos de discontinuidad de f' , o puntos terminales del $\text{Dom}f$.
- Evaluar el signo de f' en un punto de cada una de dichos intervalos abiertos. Determinar el conj. de crecimiento y decrecimiento de f .
- Clasificar los puntos críticos de f en máximos locales, mínimos locales y puntos estacionarios no extremos.
- Detectar posibles extremos locales entre los puntos terminales del $\text{Dom}f$.
- Calcular f'' . Determinar sus raíces.
- Expresar el $\text{Dom}f$ como unión de intervalos abiertos cuyos extremos sean raíces de f'' , puntos de discontinuidad de f'' , o puntos terminales del $\text{Dom}f$.
- Evaluar el signo de f'' en un punto de cada uno de dichos intervalos abiertos. Determinar el conj. de curvatura positiva y negativa de f .
- Determinar cuáles de las raíces de f'' son puntos de inflexión.
- Detectar límites infinitos de la función, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = "$. Determinar

$$x!$$

posibles asíntotas verticales del gráfico de f .

- Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Detectar así posibles asíntotas

$$x! + " x! - "$$

horizontales de f .

- Calcular los siguientes límites:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$x! + " x x! - " x$$

$$b_1 = \lim [f(x) - m_1x] ; b_2 = \lim [f(x) - m_2x]$$

$$x! + " x! - "$$

Si ambos elementos de un par $\{m_i; b_i\}$ fueran finitos tendríamos

asíntota oblicua.

- Realizar una tabla de valores de $f(x)$ dando a x todos los valores notables detectados a lo largo del estudio.
- Dibujar un gráfico aproximado de f .

Aproximación mediante polinomios de Taylor.

Proposición VI.16: Si $P(x)$ es un polinomio de grado n , el coeficiente del término de grado k (donde $1 \leq k \leq n$) es igual al valor de la k -ésima derivada de P en a , dividido por $k!$.

Esto equivale a decir que un polinomio de grado n puede reconstruirse si se conoce su valor funcional y el de sus primeras n derivadas en $x = a$. Si disponemos de los valores de P y de sus primeras n derivadas en un punto $a \in \mathbb{R}$, para reconstruirlo hay que expresarlo como combinación lineal de potencias de $(x - a)$; de tal manera será:

$$P(x) = a_n (x - a)^n + a_{n-1} (x - a)^{n-1} + \dots + a_1 (x - a) + a_0$$

Para cada índice k entre 1 y n vale:

$$a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \text{ y } a_0 = P(a)$$

$$k!$$

donde el exponente (k) indica orden de derivación, y no potencia.

En resumen se puede enunciar:

Proposición VI.17: Si $P(x)$ es un polinomio de grado n , vale que

$$n$$

$$P(x) = P(a) + \sum_{i=1}^n \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

$$i=1 \text{ } i!$$

El n -ésimo polinomio de Taylor de $f(x)$ en el punto a es el único polinomio $P(x)$ de grado n tal que $P(a) = f(a)$ y $P^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ para j variando entre 1 y n . El *resto de Taylor* correspondiente a dicho polinomio se define como $R(x) = f(x) - P(x)$.

Teorema VI.18: Sea $f(x)$ una función que admite $n + 1$ derivadas continuas en el punto a , y sea $P(x)$ su n -ésimo polinomio de Taylor en a . Entonces será

$$n$$

$$P(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

$i=1$ i!

Además, el resto de esta aproximación vale

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$(n+1)!$

donde b es un punto intermedio entre a y x .

La importancia de este resultado consiste en que asegura que el 'resto' o error del n -ésimo polinomio de Taylor converge a 0 más rápidamente que

$(x-a)^n$ cuando x converge hacia a .

Capítulo VII: Primitivas.

Concepto de primitiva. Primitivas inmediatas.

Llamaremos *primitiva* de la función $f(x)$ a una función derivable $F(x)$ tal que " x " Dom f , $F'(x) = f(x)$.

Lema VII.1: Sea $h(x)$ una función continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

- " x " $(a;b)$, $f'(x) = 0$
- $f(x)$ es constante en $[a;b]$

Corolario VII.2: Sean $F(x)$ y $G(x)$ dos funciones derivables. Entonces son equivalentes:

- F y G son primitivas de la misma función.
- " x , $F(x) = G(x) + c$, con c constante

Una función puede tener infinitas primitivas, y dos cualesquiera de ellas difieren de una constante.

La notación es la siguiente:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad ! \quad F'(x) = f(x).$$

Proposición VII.3:

- " $k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ (k constante)
- " $[f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Tabla de primitivas

- " $x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$

$a+1$

- " $\frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- " $\cos x dx = \sin x + C$
- " $\sin x dx = -\cos x + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

Método de sustitución.

Proposición VII.5 : Sea F una primitiva de f . Entonces $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$. O lo que es lo mismo

$$\int f(u) \cdot u' dx = \int f(u) du.$$

La aplicación de este método consta de cuatro pasos:

- Llamar $u = g(x)$ y sustituir todas las $g(x)$ que aparezcan en la función por la nueva variable u .
- Sustituir $(u' dx)$, es decir $g'(x) dx$, por du .
- Calcular la primitiva resultante como función de u .
- Deshacer la sustitución, es decir escribir $g(x)$ donde aparezca u .

Método por partes.

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables. Entonces

$$\int [u'(x) \cdot v(x)] dx = u(x) \cdot v(x) - \int [u(x) \cdot v'(x)] dx.$$

Se deben cumplir los siguientes cinco pasos:

- Elegir la parte derivada ($u'(x)$) y la parte primitiva ($v(x)$).
- Calcular la primitiva de la parte derivada.
- Calcular la derivada de la parte primitiva.
- Reemplazar estos resultados en la fórmula del método.
- Intentar la solución del nuevo problema de primitiva.

Observaciones:

- En algunos casos, después de una o varias aplicaciones del método por partes, puede ser que la primitiva remanente sea igual a la primitiva original pero con distinto signo. En este caso se resuelve algebraicamente pasando la primitiva remanente al primer miembro de la ecuación.

Primitivas de funciones racionales. Fracciones simples.

Función racional: es toda función que admita ser expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Función racional propia: función racional cuyo denominador tiene grado mayor que el del numerador.

Función racional impropia: el grado del numerador es mayor o igual al del denominador.

Teorema VII.7: Dado los polinomios $P(x)$ (dividendo) y $Q(x)$ (divisor), existen otros dos polinomios $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) con

$$\text{gr } R(x) < \text{gr } Q(x) \text{ tales que } P = Q \cdot C + R$$

Corolario VII.8: Una función racional impropia se puede expresar como suma de una función polinómica más una función racional propia.

La obtención de la primitiva de una función racional propia se resolverá mediante dos etapas:

Etapla 1: expresar cualquier función racional propia como suma de ciertas funciones racionales propias que llamaremos fracciones simples.

Etapla 2: obtener la primitiva de cada una de las fracciones simples que resultó en la descomposición de la etapa 1.

Llamaremos fracciones simples a las funciones racionales propias de alguno de los siguientes cuatro tipos:

Tipo 1 $\frac{A}{x - a}$ (A y a reales, $A \neq 0$).

$$(x - a)$$

Tipo 2 $\frac{A}{(x - a)^n}$ (A y a reales, $n \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$, $n > 1$)

$$(x - a)^n$$

Tipo 3 $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ ($-4 < 0$)

$$x^2 + px + q$$

Tipo 4 $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$ ($-4 < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

$$(x^2 + px + q)^n$$

El polinomio P es divisible por el polinomio Q si al efectuar la división entera de P por Q , el resto R que se obtiene es idénticamente nulo.

Teorema VII.9: Sea $P(x)$ una función polinómica de grado n . Son equivalentes:

- a es una raíz de $P(x)$
- $P(x)$ es divisible por $(x - a)$
- Existe una función polinómica $Q(x)$ de grado $n-1$ tal que

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Teorema VII.10: Sea $P(x)$ una función polinómica que admite solamente raíces reales. Entonces se puede expresar

$$P(x) = a(x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k}$$

donde los r_i son las raíces de P , los m_i sus respectivas multiplicidades, a el coeficiente principal de P y la suma de los m_i es igual al grado de P .

Teorema VII.11: Todo polinomio con coeficientes reales se puede expresar como producto de su coeficiente principal por factores de la forma

$(x - r)^m$ donde r es una raíz y m su multiplicidad, y factores cuadráticos irreducibles, eventualmente elevados a potencias naturales.

- Si el denominador de una función racional propia tiene solamente raíces reales simples, entonces admite una descomposición en suma de tantas fracciones simples del tipo 1 como raíces tiene el denominador. Los numeradores de dichas fracciones simples serán constantes y sus denominadores de la forma $(x - r)$ con raíz.
- Si el denominador de una función racional propia tiene solamente raíces reales, algunas simples y otras múltiples, la función admite descomposición como suma de tantas fracciones simples de tipo 1 o de tipo 2 como el grado del denominador. Para cada raíz simple corresponderá una fracción de tipo 1 de la forma

A .

$x - r$

Para cada raíz múltiple r de multiplicidad m corresponderán m fracciones de tipo 2 o de tipo 1 de la forma

B .

$(x - r)^k$

donde el exponente k varía entre m y 1. La primitiva de una fracción simple de tipo 2 de esta forma se obtiene con facilidad haciendo la sustitución $t = x - r$ que transforma el problema en el de determinar la primitiva de una potencia de exponente entero negativo distinto de -1 .

- La aparición de factores cuadráticos irreducibles en la factorización

del denominador de una función racional propia hace necesario el uso de fracciones simples de tipo 3 o de tipo 4 según que tales factores sean simples o múltiples.

Sustituciones especiales.

Fracciones simples de tipo 3: calcular

" $\frac{Ax + B}{x^2 + x + 4}$ dx cuando $-4 < 0$

$x^2 + x + 4$

Se transformará la función para llevarla a la forma

" $\frac{1}{x^2 + x + 4}$ d ,

$1 + 2$

donde θ representa una función lineal en x . La respuesta será entonces $\theta \arctan \theta$.

Cuando $A = 0$, se escribe el denominador completando el cuadrado de un binomio, y se realiza la sustitución.

Cuando $A \neq 0$, se considera el numerador tratando de formar la derivada del denominador, y separando la constante que sobra.

- La primitiva de una fracción simple del tipo 3 es siempre la suma de una función logarítmica más una función arco tangente.

Sustitución del tipo $u = \sin x$ o $u = \cos x$: sirve para calcular cualquier primitiva de los siguientes tipos:

$\int \sin^n x \, dx$; $\int \cos^n x \, dx$ n impar

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ n y m naturales, uno de ellos impar

Teniendo en cuenta que $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

Sustitución del tipo $z = \tan x$: las primitivas del tipo $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ donde n y m son números enteros (positivos o negativos), cuya suma sea par, admiten ser tratados mediante la sustitución $z = \tan x$.

Como $x = \arctan z$, deducimos que:

$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; $dx = \frac{1}{1+z^2} dz$.

$\int \frac{1}{1+z^2} \int \frac{1+z^2}{1+z^2} \int \frac{1+z^2}{1+z^2}$

Sustitución del tipo $z = \tan(x/2)$: si la expresión cuya primitiva buscamos es una combinación de sumas, restas, productos, potencias y cocientes de funciones trigonométricas, es posible reducir el problema al de la primitiva de una función racional mediante la sustitución

$z = \tan(x/2)$. Luego de varios resultados obtenemos:

$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$\frac{1}{1+z^2} \frac{1+z^2}{1+z^2}$

$\tan x = \frac{2z}{1-z^2}$ $dx = \frac{2}{1+z^2} dz$

$\frac{1-z^2}{1+z^2} \frac{1+z^2}{1+z^2}$

Sustitución del tipo $w = \arcsin x$: tiene aplicación cuando aparece en la función cuya primitiva buscamos la expresión $\sqrt{1-x^2}$, o más generalmente, la raíz cuadrada de una diferencia de cuadrados en uno de los cuales aparezca la variable.

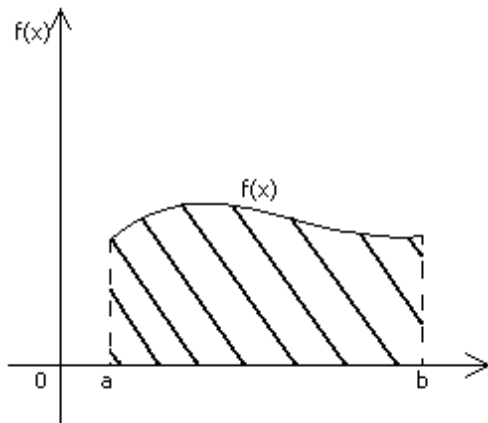
Capítulo VIII: Integral definida.

Concepto de integral definida. Propiedades básicas.

Sea $f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[a;b]$. Llamaremos *integral definida* de $f(x)$ entre a y b y denotaremos

$$\int_a^b f(x) dx$$

al área de la región limitada por arriba por el gráfico de f , por debajo por el eje horizontal, y a izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Gráficamente será:



Proposición VIII.1: Sea $f(x) = k$ (constante). Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = k \cdot (b - a)$$

Propiedad de aditividad respecto del intervalo: Sea $f(x)$ una función continua, $a < b < c$. Entonces vale:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Corolario VIII.3: Sea $f(x)$ una función continua. Entonces vale:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Principio de Cavalieri (propiedad de aditividad respecto del integrando): Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas positivas en el intervalo $[a; b]$. Entonces vale:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Proposición VIII.5: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas y positivas en $[a; b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$. Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Corolario VIII.6: Sea $f(x)$ una función continua, m y M ciertas constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$. Entonces vale:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

Proposición VIII.7: Sea $f(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[a; b]$, y P una partición de dicho intervalo. Entonces:

$$s(f, a, b, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, a, b, P)$$

Y si la partición P tiene más intervalos se verifica que:

Cuando se afina una partición, la suma inferior de Cauchy aumenta y la suma superior de Cauchy disminuye

Llamaremos norma de la partición P a la longitud máxima de un subintervalo de P , y lo denotaremos $n(P)$.

$$\lim_{n(P) \rightarrow 0} s(f, a, b, P) = \lim_{n(P) \rightarrow 0} S(f, a, b, P)$$

$$n(P) \rightarrow 0$$

Entonces diremos que f es integrable sobre $[a; b]$ si ambos límites coinciden. El valor común de ambos límites es, por definición, la *integral definida de $f(x)$ entre a y b* , es decir:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Teorema VIII.8: Una función continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ es integrable en dicho intervalo.

Teorema fundamental. Regla de Barrow.

Teorema del valor medio del Cálculo Integral: Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a; b]$. Entonces existe $c \in (a; b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral: Sea $f(x)$ continua en $[a; b]$, y $x \in [a; b]$ definimos $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Entonces $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Regla de Barrow (corolario del Teorema Fundamental del Cálculo): Sea $f(x)$ continua en $[a; b]$ y sea $G(x)$ una primitiva de $f(x)$. Entonces vale

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Cálculo de áreas de regiones entre curvas.

Teorema VIII.13: Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en $[a; b]$ tales que $x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \geq g(x)$, entonces, el área de la región encerrada entre los gráficos de ambas funciones y las rectas verticales

$$x = a \text{ y } x = b, \text{ vale}$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Teorema fundamental generalizado.

Proposición VIII.14: Sea $f(x)$ una función continua, y $u(x)$ otra función derivable cuya imagen esté incluida en el dominio de f . Sea

$$H(x) = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t) dt.$$

$$\text{Entonces vale } H'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Corolario VIII.15: Sea $f(x)$ una función continua, $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables tales que $x \in [a; b] \Rightarrow u(x) \leq v(x)$. Se define

$$G(x) = \int_{u(a)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Entonces $G'(x) = (f \circ v)(x) \cdot v'(x) - (f \circ u)(x) \cdot u'(x)$.

26