DERIVADAS

- **Introducción**

Recordamos de Análisis I.

Definición

Sea f:$A \quad R$,
con A" R, y sea x0 interior a A

Resulta:

Como una derivada es un límite pueden darse una de estas tres situaciones: que sea un número, que sea infinito o que no exista.

Definición:

f es derivable en xo si y sólo si existe y es finito el límite para $x \quad x_0$
de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto

Entonces, si la recta secante tiende a la recta tangente, y el cociente incremental tiende a la derivada, resulta que:

La derivada de una función en x0 representa , si existe y es finita, la pendiente de la recta tangente a C en Po.

- ***Derivada de función vectorial***

Consideremos $\vec{f}$:
A! Rn **con** A " R " **n " 2 , y t0 pto. interior de** A

I.1.−Definición:

Se llama vector derivado de $\vec{f}$
en t0 al límite, si existe de: $\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$
, cuando t ! 0. Se indica $\vec{f}\,'(t_0)$
.

Resulta: $\vec{f}\,'(t_0)$
$= \lim_{\Delta t \quad 0}$
$\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$

Teorema:

$\overset{r}{f}$

*(t)= (*f1(t);f2(t);.....;fn(t)*)* es derivable en t0 ! fi (t) es derivable en *t0, "i"{1,...,n}*

Demostración:

$\overset{r}{f}$

(t) derivable en t0 ! " $\lim\limits_{\Delta t \; 0}$

$$\frac{\overset{r}{f}(t_0+\Delta t)-\overset{r}{f}(t_0)}{\Delta t}$$

!

" $\lim\limits_{\Delta t \; 0}$

$$\frac{(f_1(t_o+\Delta t);f_2(t_o+\Delta t);L\ f_n(t_o+\Delta t))-(f_1(t_o);f_2(t_o);L\ f_n(t_o))}{\Delta t}$$

!

" $\lim\limits_{\Delta t \; 0}$

$$\frac{\left(f_1(t_o+\Delta t)-f_1(t_o);....;f_n(t_o+\Delta t)-f_n(t_o)\right)}{\Delta t}$$

!

" $\lim\limits_{\Delta t \; 0}\dfrac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t};L\ ;\lim\limits_{\Delta t \; 0}\dfrac{fn(t_0+\Delta t)-fn(t_0)}{\Delta t}$

!

" $\lim\limits_{\Delta t \; 0}\dfrac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t}$

= f1'(t0) " ....*" "* $\lim\limits_{\Delta t \; 0}\dfrac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}$

=fn'(t0)

Recta tangente y plano normal a una curva en R3

Consideramos $\overset{r}{f}$:

A! **Rn** continua ,con **A** " **R** " n = 3. La representación gráfica del conjunto imagen es una curva en **R3**

Consideremos los puntos **P** y **P0** definidos por y por ;el vector tiene el módulo y la dirección de la cuerda **PP0** .

Al dividir por t y tomar el límite para t!0, el vector derivado, si existe, tendrá la dirección límite de la de una cuerda cuyo extremo tiende a coincidir con el punto inicial , es decir tendrá la dirección ***tangente*** a la curva en **P0** .

Resulta que la recta tangente a la curva representativa de la imagen de $\vec{f}(t)$
en P0 , es la recta que tiene la dirección de $\vec{f}\,'(t_0)$
y a la que pertenece **P0**.

t **P0** ! $\vec{X} = \vec{f}(t_0) + \lambda \vec{f}\,'(t_0)$
(ec. vectorial de la recta tg.)

o bien ,si fi'(t0)"0,"i"{1,2,3} :

$$\frac{x - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{y - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \frac{z - f_3(t_0)}{f_3'(t_0)}$$

(ecs. simétricas de la recta tangente)

Si llamamos **N** al plano perpendicular a la recta tangente en **P0**, es decir al ***plano normal*** a la curva asociada a la imagen de $\vec{f}(t)$
, resulta que la ecuación vectorial de **N** es:

$$(\vec{X} - \vec{f}(t_0))\ \vec{f}\,'(t_0) = 0$$

y la ecuación cartesiana:

f 1'(to).(x− f1(to)) + f 2'(to).(y− f2(to)) + f 3'(to).(z− f3(to)) =0

- ***Puntos regulares y singulares de una curva. Curvas regulares y lisas.***

Un punto $\vec{P}_0$ C
es un ***punto regular*** de *C* si y sólo si existe la recta tangente a *C* en $\vec{P}_0$
. Para ello debe existir una función vectorial $\vec{f}$:
[a,b] *!* ***Rn*** *con n " 2*, continua / $\vec{f}$
(t)= (f1(t);f2(t);.....;fn(t)) siendo C la curva asociada a su imagen, tal que exista y no sea nulo el vector derivado $\vec{f}$
` (to) con

$\vec{P}_0$
= $\vec{f}$
(t0). Los puntos de *C* que no son regulares se llaman ***puntos singulares*** .

Toda curva admite distintas parametrizaciones, puede ocurrir que en alguna de ellas el vector derivado sea nulo, pero que no lo sea para otra.

Si $\vec{f}$
es inyectiva en [a,b], la curva es **simple.**

Si "t"[a,b] es $\vec{f}$
' (t) continua y distinta del vector nulo, entonces la curva

C asociada al conjunto imagen de $\vec{f}$

es ***lisa.***

- ***Derivación de campos escalares***

Campos escalares de dos variables

INCREMENTO PARCIAL Y TOTAL

Sea F: **A**!**R**, con **A**" **R2** / z = F(x;y) y sea $\vec{P}_0$
=(a;b) interior a **A**

Se llama **incremento parcial de "F " debido a "x"** (se escribe: $\Delta_x F$
) al incremento que experimenta la función cuando se provoca una variación "h" ó Δx
de la variable "**x**" y se mantiene constante la variable "y".

Es decir: $\Delta_x F$
= F(a + h ; b) − F(a;b)= F(a + Δx
; b) − F(a;b)

Gráficamente significa cortar la superficie representativa de z=F(x;y), con el plano y = b y medir la variación de la función sobre la curva intersección. En el dibujo: |$\Delta_x F$
|= medida de $\overline{TT'}$

Con el mismo criterio, **la variación de "F" debida a "y",(**$\Delta_y F$
) se obtiene considerando x = cte y provocando un incremento "k" ó Δy
sobre el eje "**y**".

Es decir: $\Delta_y F$
= F(a;b + k) − F(a;b)= F(a; b+ Δy
) − F(a ; b)

Estos incrementos $\Delta_x F$
y $\Delta_y F$
reciben el nombre de **incrementos parciales.**

Si provocamos simultáneamente variaciones en x e y , que llamaremos "h" y "k",(ó Δx
, Δy
respectivamente) ,obtendremos el **incremento total** de F

Entonces : ΔF
= F(a + h; b + k) − F(a;b)= F(a + Δx
; b +Δy
) − F(a;b)

Gráficamente este incremento mide la variación que experimenta z, sobre la curva que resulta de cortar la superficie representativa de z = F(x;y) con un plano perpendicular al plano xy, según la dirección de la recta P0P con $\vec{P}$
=(a + h; b+ k) (En el dibujo:|ΔF
|= medida de $\overline{SS'}$
).

- ***<u>Derivadas parciales</u>:***

Sea F: **A**!**R**, con **A**" **R2** / z = F(x;y) y sea $\overset{r}{P_0}$
=(a;b) interior a **A**

Se llama derivada parcial con respecto a x de F(x;y) en (a;b) (ó en $\overset{r}{P_0}$
), al límite para $\Delta\ x$
! 0, del cociente entre $\Delta_x F$
y $\Delta\ x$

F' x (a;b) = $\frac{F}{x}\Big|_{\overset{r}{P_0}} = \underset{\Delta x\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a+\Delta x;b)-F(a;b)}{\Delta x} = \underset{h\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a+h;b)-F(a;b)}{h}$

Análogamente:

F' y (a;b) = $\frac{F}{y}\Big|_{\overset{r}{P_0}} = \underset{\Delta y\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a;b+\Delta y)-F(a;b)}{\Delta y} = \underset{k\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a;b+k)-F(a;b)}{k}$

Observemos que F' x (a;b) se calcula manteniendo y = cte y F' y (a;b), con x = cte.

De la definición se deduce que las reglas para calcular derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular derivadas de funciones escalares.

Geométricamente las derivadas parciales representan las pendientes de las rectas tangentes a las curvas que se obtienen como intersección de la superficie con planos y= cte ó x = cte, según corresponda, en el punto (a;b;F(a;b))

Ejemplo:

Calcular las derivadas parciales en (0;0) de F(x;y)= $\begin{matrix} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textbf{si}\ \ (x;y)\quad (0;0) \\ 0 & \textbf{si}\ \ (x;y)=(0;0) \end{matrix}$

Recurrimos a la definición:

$$\frac{F}{x}\Big|_{\overset{r}{P_0}} = \underset{h\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a+h;b)-F(a;b)}{h}$$

!

$$\frac{F}{x}\Big|_{(0;0)} = \underset{h\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(0+h;0)-F(0;0)}{h} \qquad \frac{F}{x}\Big|_{(0;0)} = \underset{h\quad 0}{l\ m}\ \frac{\frac{h.0}{h^2+0^2}-0}{h} = \underset{h\quad 0}{l\ m}\ \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{F}{y}\Big|_{\overset{r}{P_0}} = \underset{k\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(a;b+k)-F(a;b)}{k} \qquad \frac{F}{y}\Big|_{(0;0)} = \underset{k\quad 0}{l\ m}\ \frac{F(0;k)-F(0;0)}{k}$$

!

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0;0)} = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{0.k}{0^2+k^2} - 0}{k} = 0$$

Observación:

En la página 20, se trabajó con la misma función y se comprobó que no existe límite doble para (x;y)!(0;0), por lo tanto no es continua en (0;0).

Estos significa que, para campos escalares, la existencia de las derivadas parciales no es una condición tan fuerte como la derivabilidad para funciones de una variable.

En efecto, ***para funciones escalares: derivabilidad! continuidad; sin embargo, para campos escalares, este ejemplo nos muestra que un campo puede tener derivadas parciales en un punto en el que no es continuo.***

Cuando no hay problemas en la definición de la función, puede derivarse utilizando las reglas y fórmulas conocidas. Para derivar respecto de **x** , se piensa que **y** es constante; mientras que para derivar respecto de **y**, se trabaja con **x** constante.

Por ejemplo:

Si F(x;y)= 2x.sen(xy)+ y2 , resulta:

F'x= 2 sen(x.y)+ 2xy cos(x.y) ; F'y = 2x2cos(xy) + 2y.

- ***Derivada direccional***

Sean F:A R^n R
con A abierto , $\vec{P}_o$
" A y $\vec{v}$
versor de Rn

Definición

Si llamamos $\vec{v}$
al versor que tiene la dirección y sentido de $\overrightarrow{P_O P}$
, podemos decir que existe t " **R**/ $\overrightarrow{P_O P}$
= t $\vec{v}$
. Entonces definimos como derivada direccional de F en la dirección de $\vec{v}$
en $\vec{P}_o$
al límite para t! 0 de $\dfrac{F(\vec{P}_o + t\,\vec{v}) - F(\vec{P}_o)}{t}$
. (La indicamos F' ($\vec{P}_o ; \vec{v}$
) .

Resulta: F'($\vec{P}_o ; \vec{v}$)
.= $\lim_{t \to 0}$

$$\frac{F(\vec{P}_o + t\,\vec{v}) - F(\vec{P}_o)}{t}$$

(con t " **R**)

- ***Interpretación geométrica***

Al tomar una derivada direccional en un punto con respecto a un versor, se están considerando variaciones de la función sobre la recta que pasa por el punto y es paralela al versor.

La derivada direccional de F en $\vec{P}_o$
con respecto al versor $\vec{v}$
, representa la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la sup. representativa de z=F(x;y) y el plano paralelo al eje z, que corta al plano (x,y) según la recta s (es decir, la recta que pasa por $\vec{P}_o$
y es paralela al versor $\vec{v}$
).

<u>OBSERVACIONES</u> :

- Si se trabaja con el versor opuesto, si bien el punto es el mismo, la recta s también, y la curva intersección y , por lo tanto la recta tangente, no varían, **<u>cambia</u>** el ángulo que se vincula con la pendiente.

b) Si se toman las derivadas con respecto a los versores $\vec{i}$ y $\vec{j}$
, se obtendrán las derivadas parciales respecto de x e y respectivamente.

Ejemplo:

Calcular F'($P_o; v$
) siendo F(x;y) = x2 −2xy; $\vec{P}_o$
=(1;1) y $\vec{v}$
= $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

F'($\vec{P}_o;\vec{v}$)
.=$\lim_{t \to 0}$
$$\frac{F(\vec{P}_o + t\,\vec{v}) - F(\vec{P}_o)}{t}$$
!F'($\vec{P}_o;\vec{v}$)
.=$\lim_{t \to 0}$
$$\frac{F(1 - t.\sqrt{2}/2\,;1 + t.\sqrt{2}/2) - F(1;1)}{t}$$

F'($\vec{P}_o;\vec{v}$)
.=$\lim_{t \to 0}$

$$\frac{\left(1-t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}-2\left(1-t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1^{2}-2.1.1\right)}{t}$$

$$F'(\vec{x}_0;\vec{v})=\lim_{t\to 0}\frac{1-t\sqrt{2}+t^{2}/2-2+t^{2}-(-1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t.\left(-\sqrt{2}+t\,3/2\right)}{t}=-\sqrt{2}$$

- ***Campos escalares en general***

Consideremos F:**A** $\to$ **R**, con **A** $\subseteq$ **Rn** , un punto $\vec{x}_0$ interior a **A** y un vector unitario (versor) $\breve{v}$ de **Rn**.

Derivada direccional

Llamamos derivada direccional de F en la dirección de $\breve{v}$ en $\vec{x}_0$ al límite para $t \to 0$ de $\frac{F(\vec{x}_0+t\,\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}$. La indicamos $F'(\vec{x}_0;\breve{v})$.

Resulta: $F'(\vec{x}_0;\breve{v})=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{x}_0+t\,\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}$ (con $t \in$ **R**)

- ***Derivada de un campo escalar respecto de un vector: Definición***

Consideremos F:**A** $\to$ **R**, con **A** $\subseteq$ **Rn** , $\vec{x}_0$ un punto interior a **A** y un vector $\vec{v}$ de **Rn**.

Llamamos derivada de F en $\vec{x}_0$ con respecto a la dirección de $\vec{v}$ al límite, si existe de:

$F'(\vec{x}_0;\vec{v})$

.=l m
t 0
$$\frac{F(\vec{x}_0 + t.\vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{t}$$
(con t " **R**)

<u>OBSERVACIÓN:</u>

En la derivada direccional se trabaja con un vector unitario

En la derivada con respecto a un vector, se consideran vectores cualesquiera. Al calcular derivadas en un punto respecto de vectores de la forma $\vec{v}$
que, obviamente corresponden a la misma dirección, se obtienen, en un mismo punto distintos valores para la derivada .

- ***<u>Teorema del valor medio</u>***

Recordamos el teorema de Lagrange (o del valor medio del cálculo diferencial) para funciones escalares

Si f es continua en [a,b] , derivable en (a,b) , entonces existe un punto c interior al intervalo (a,b) tal que la variación que experimenta la función al pasar de a a b es igual al producto de la derivada de f en dicho punto c por la amplitud del intervalo.

- ***<u>Teorema del valor medio para campos escalares:</u>***

Consideremos F:**A**! **R**, con **A**"**Rn** tal que exista F' ($\vec{x}$
; $\vec{v}$
) en un subconjunto de **A** al que pertenezcan $\vec{x}_o$
y $\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$
, siendo $\vec{v}$
un vector unitario de **Rn**.

Entonces se cumple que :

" c" (0,t) / F($\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$
)− F($\vec{x}_o$
) = t . F'($\vec{x}_o$
+ c$\vec{v}$
,$\vec{v}$
)

Demostración**:**

Trabajaremos con la función de una variable (t) = F($\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$
) con t " [0,t]

Como existe F'($\vec{x}_o$
; $\vec{v}$
) en un subconjunto de **A** al que pertenezcan$\vec{x}_o$

y $\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$

$\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$

$\vec{v}$

$\vec{x}_o$

Resulta:

& (t) continua en [0,t] (por que para funciones de una variable se cumple que si es derivable es continua)

- (t) derivable en (0,t) (trabajamos en [0,t] porque (0)=F($\vec{x}_o$
)y (t)=F($\vec{x}_o$
  + t$\vec{v}$
)

Por el T. del valor medio para funciones de una variable, se cumple que:

" c entre 0 y t / (t) − (0) = t. ` (c)

Calculamos , por def. '(c)

$$\varphi'(c) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(c+\lambda) - \varphi(c)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + (c+\lambda)\vec{v}) - F(\vec{x}_0 + c\vec{v})}{\lambda}$$

$$\varphi'(c) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F[(\vec{x}_0 + c\vec{v}) + \lambda\vec{v}] - F(\vec{x}_0 + c\vec{v})}{\lambda} = F'(\vec{x}_0 + c\vec{v}; \vec{v})$$

Reemplazando se tiene que:

" c entre 0 y t / F($\vec{x}_o$
+ t$\vec{v}$
)− F($\vec{x}_o$
) = t . F'($\vec{x}_o$
+ c$\vec{v}$
;$\vec{v}$
)

- ***Propiedad de homogeneidad de la derivada direccional.***

Consideremos F:**A**! **R**, con **A**"**Rn** , entonces " "**R,**" F'($\vec{x}_o$
; $\vec{v}$
) y se cumple que:

F'($\vec{x}_o$
; $\vec{v}$
) = F'($\vec{x}_o$
;$\vec{v}$
)

Demostración:

Por definición de derivada direccional:

$F'(\vec{x}_o ; \vec{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda \vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \lambda \, \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda \vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{\lambda t} =$

$F'(\vec{x}_o ; \vec{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda \vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{\lambda t} = F'(\vec{x}_o ; \vec{v})$ (por def. de deriv.)

Luego: $F'(\vec{x}_o ; \vec{v}) = F'(\vec{x}_o ; \vec{v})$

- ***<u>Aditividad de las derivadas direccionales</u>***

Consideremos un campo escalar F: **A**! **R** con **A**"**Rn** " n " 2, y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos versores de **Rn** respecto de los cuales F tiene derivadas direccionales continuas en $\vec{x}_o$

Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, entonces existe $F'(\vec{x}_o ; \vec{w}) = F'(\vec{x}_o ; \vec{u}) + F'(\vec{x}_o ; \vec{v})$

Por definición de derivada respecto de un vector:

$F'(\vec{x}_o ; \vec{w})$

) = $$\lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\vec{w}) - F(\vec{x}_0)}{t}$$

= $$\lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t(\vec{u} + \vec{v})) - F(\vec{x}_0)}{t}$$

=

= $$\lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\vec{u}) + t\vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{t}$$

Sumamos y restamos en el numerador $F(\vec{x}_0 + t\,\vec{u})$
y agrupamos convenientemente , entonces:

F'($\vec{x}_o$
; $\vec{w}$
) = $$\lim_{t \to 0} \frac{F[(\vec{x}_0 + t\vec{u}) + t\vec{v}] - F(\vec{x}_0 + t\vec{u}) + F(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - F(\vec{x}_0)}{t}$$

=

= $$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t\,u) - F(x_0)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{F[(x_0 + t\,u) + t\,v] - F(x_0 + t\,u)}{t}$$

En el primer sumando tenemos, por definición: F'($\vec{x}_o$
; $\vec{u}$
); y en el numerador del segundo aplicamos el T. del Valor medio:

F'($\vec{x}_o$
; $\vec{w}$
)= F'($\vec{x}_o$
; $\vec{u}$
) + $$\lim_{t \to 0} \frac{t.\, F'[x_0 + t\,u + \alpha\,v; v]}{t}$$
con entre 0 y t.

Resulta que cuando t!0, también !0,entonces, por la continuidad pedida a las derivadas direccionales se tiene:

F'($\vec{x}_o$
; $\vec{w}$
)= F'($\vec{x}_o$
; $\vec{u}$
) + F'($\vec{x}_o$
; $\vec{v}$
)

- ***<u>Las derivadas parciales como casos particulares de derivadas direccionales</u>***

Si para el campo escalar F: **A**! **R** con **A**"**Rn** " n " 2, se calculan las derivadas direccionales con respecto a los versores de la base considerada, se obtienen las ***<u>derivadas parciales</u>***.

Es decir que si a $\vec{x}_o = \sum_{i=1}^{n} \; i \; \vec{e}_i$, se le aplica derivada de F en la dirección de **ei** se obtiene la derivada parcial de F en la dirección de **e i** .

F ` ($\vec{x}_o$ **,** $\vec{e}_i$ **)** = $\lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\,\vec{e}_i) - F(\vec{x}_0)}{t} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{X}_0)$

- ***Cálculo de derivadas direccionales en función de las derivadas parciales***

Consideremos un campo escalar F: **A**! **R** con **A**"**Rn** " n " 2, y sea $\vec{e}$ un versor de **Rn** . Supongamos además que F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$.

Como las componentes de un versor son los cosenos directores del mismo:

$\vec{e} = \sum_{i=1}^{n} \cos\ i\ \vec{e}_i$, utilizando las propiedades de homogeneidad y aditividad de las derivadas direccionales se tiene:

Para campos escalares de tres variables, con derivadas parciales continuas es:

F'($\vec{x}_o$; $\vec{e}$)= F'x($\vec{x}_o$). cos + F'y($\vec{x}_o$). cos + F'z($\vec{x}_o$). cos

siendo $\vec{e}$ = cos **i** + cos **j** + cos **k**

F'($\vec{x}_o$; $\vec{e}$)= F'($\vec{x}_o$; $\sum_{i=1}^{n}$ cos i $\vec{e}_i$) = $\sum_{i=1}^{n}$

cos i F'($\vec{x}_o$
; $\vec{e}_i$
)

- ***Gradiente***

Consideremos un campo escalar F: **A**! **R** con **A**"**Rn** " n " 2 con derivadas parciales respecto de todas sus variables en todo punto de **B " A** "**Rn**.

Se llama ***gradiente de F*** al campo vectorial definido de **B** en **Rn** mediante:

Grad. F = $\frac{F}{x_1};\frac{F}{x_2};\ldots\frac{F}{x_n}$

.

También se utiliza para designarlo al operador nabla: $\vec{\ } F$
= Grad. F

Relación entre el vector gradiente y la derivada direccional

Consideremos F: **A**! **R** con **A**"**Rn** " n " 2, ,sea $\vec{e}$
un versor de **Rn** expresado a partir de sus cosenos directores, Es decir: $\vec{e}$
= n

$i=1$
cos i $\vec{e}_i$

Supongamos además que F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$
.punto interior de **A**.

Vimos que la derivada direccional puede expresarse en función de las derivadas parciales

F'($\vec{x}_o$
; $\vec{e}$
)= n

$i=1$

$\cos\alpha_i \cdot \frac{F}{x_i}\ \vec{X}_0$

.

Como el vector gradiente de F en $\vec{x}_o$
es: $\vec{\ } F(\vec{x}_0)$
= n

$i=1$

$\frac{F}{x_i} . \vec{e}_i$

, se tiene que la derivada direccional en $\vec{x}_o$
es igual al producto escalar entre el vector gradiente de F en $\vec{x}_o$

y el versor $\breve{v}$. Significa que la derivada direccional en $\vec{x}_o$ es la proyeccción del $\vec{\nabla} F(\vec{x}_o)$ sobre $\breve{v}$.

$\text{Proy}_{\breve{v}}\left(\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)\right) = \vec{\nabla} F(\vec{x}_0) \cdot \breve{v}$

Pero el segundo miembro coincide con la fórmula obtenida para la derivada direccional, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\bigg|(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} F(\vec{x}_0) \cdot \breve{v}$$

Si F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$ la derivada direccional de F en la dirección de $\vec{v}$ en $\vec{x}_o$ es igual a la proyección del vector gradiente de F en $\vec{x}_o$ sobre $\breve{v}$.

(*Recordar que la proyección de un vector sobre otro es un* ***número***).

Ejemplo:

Verificamos el resultado obtenido en la página 31

Calcular $F'(P_o; \breve{v})$ siendo $F(x;y) = x^2 - 2xy$; $\vec{P}_o = (1;1)$ y $\breve{v} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Como F es polinómica, podemos asegurar que tiene derivadas parciales continuas y, por lo tanto es válido aplicar la fórmula de derivada direccional en función del gradiente.

$F'_x = 2x - 2y$! $F'_x(\vec{P}_o) = 0$

$$\vec{\nabla} F(P_0) = (0;-2)$$

$F'_y = -2x$! $F'_y(\vec{P}_o$

)= −2

Resulta: F'($P_o ; v$)= $F(P_o) \cdot v = (0;-2) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

Por otra parte , la proyección de un vector sobre otro es máxima cuando las direcciones de ambos coinciden; mínima cuando los vectores son de la misma dirección pero tienen sentidos opuestos y nula cuando las direcciones son perpendiculares. Entonces:

- ***La derivada direccional es máxima en la dirección y sentido del vector gradiente. Como en ese caso cos = 1, resulta que el valor de la máxima derivada direccional en un punto es el del módulo del gradiente en dicho punto.***

máx. $\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\right|(\vec{x}_0) = \left|\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)\right|$

- ***La derivada direccional es mínima en la dirección del vector gradiente pero en sentido opuesto. Como en ese caso cos = − 1, resulta que el valor de la mínima derivada direccional en un punto es menos el módulo del gradiente en dicho punto.***

(mín. $\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\right|(\vec{x}_0) = -\left|\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)\right|$

- ***La derivada direccional en un punto es cero en la dirección perpendicular a la del vector gradiente en dicho punto. (Las direcciones son perpendiculares si y sólo si el producto escalar es nulo).***

(Para campos escalares de dos variables, recordar que cos 2 = sen 1)

Ejemplos:

Dados los siguientes campos escalares y el punto P_o que en cada caso se indica, hallar la o las direcciones en las que la derivada direccional en P_o es máxima .

- F(x;y)= $\frac{1}{x} - \frac{x^2}{y}$ en P_o =(2;−2)

F'x = $\frac{-1}{x^2} - \frac{2x}{y}$

$F'y = \dfrac{x^2}{y^2}$

$F(P_o)$
=(−5/2;1)

Luego la dirección de máxima derivada es

$$v = \frac{F(P_o)}{\left| \ F(P_o) \right\|}$$

$$= \frac{\frac{-5}{2};1}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{-5}{\sqrt{29}};\frac{1}{\sqrt{29}}$$

b)F(x;y)= $\begin{matrix} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \ \ (x;y) \quad (0;0) \\ 0 & \text{si} \ \ (x;y) = (0;0) \end{matrix}$

en P_o
=(0;0)

Por la forma en que está definida la función, es más sencillo obtener la derivada direccional por definición que analizar si las derivadas parciales son o no continuas.

Supongamos que consideramos un versor genérico de R2 , $\mathbf{u = (h;k)}$
.

Resulta:

$$F'(P_o;u) = \underset{t \quad 0}{\mathrm{l\ m}} \frac{F(P_o + t\,u) - F(P_o)}{t} \qquad F'(P_o;u) = \underset{t \quad 0}{\mathrm{l\ m}} \frac{F(th;tk) - F(0;0)}{t}$$

$$F'(P_o;u) = \underset{t \quad 0}{\mathrm{l\ m}} \frac{\frac{th.(tk)^2}{(th)^2+(tk)^2} - 0}{t} = \underset{t \quad 0}{\mathrm{l\ m}} \frac{\frac{t^3hk^2}{t^2(h^2+k^2)}}{t} = \frac{hk^2}{h^2+k^2} = hk^2$$

pues h2+k2=1, ya que $\mathbf{u = (h;k)}$
es un versor.

Este resultado nos permite asegurar que la función tiene derivada en cualquier dirección y sentido. Podemos escribir esta derivada en función de h:

F'($P_0 ; u)$

=h(1−h2)=h−h3

Como se pide la o las direcciones en la que la derivada direccional es máxima, y la función a maximizar es de una variable, se buscará el valor de h que anula la derivada primera y que hace negativa a la derivada segunda.

Es decir:

Sea (h)= h − h3, entonces ' (h)= 1−3h2

1−3h2 =0 ! |h|= $\frac{1}{\sqrt{3}}$

. Pero (h)=−6h, permite asegurar que la derivada direccional es máxima cuando h= $\frac{1}{\sqrt{3}}$

.

Como | k| = $\sqrt{1-h^2}$

, se tiene |k| = $\sqrt{\frac{2}{3}}$

. Entonces las direcciones en la que la derivada direccional es máxima son: $\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}$

= $\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}$

y $\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3}$

NOTA: Obsérvese que si se trabaja con el vector gradiente, la dirección de máxima derivada en un punto es única. El haber obtenido dos direcciones indica que la fórmula del gradiente no es aplicable en este caso.

Derivación de campos vectoriales **:**

- ***Derivada direccional: Definición***

Consideremos $\vec{F}: A \quad R^m, \text{con } A \quad R^n, (n \quad 2, m \quad 2)$

, un punto $\vec{X}_0 = (x_1 ; x_{2;} \ldots ; x_n)$

interior a A, $\vec{v}$

un vector de Rn, $\breve{v}$

su correspondiente versor.

Llamamos derivada direccional de $\vec{F}$

en la dirección de $\breve{v}$

en $\vec{X}_o$

, al límite para t!0 d e $\frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\breve{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$

.

La indicamos $\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v})$.

Resulta: $\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v})$.
$= \lim_{t \to 0}$
$$\frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$$
con t " R

Derivación de campos vectoriales

- ***Derivada de un campo vectorial respecto de un vector.***

Llamamos derivada direccional de $\vec{F}$
en $\vec{X}_o$
, con respecto al vector $\vec{v}$
, al límite para t!0 d e $\frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$

.

Es decir: $\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v})$.
$= \lim_{t \to 0}$
$$\frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$$
con t " R

Observación: al igual que en los campos escalares, en las derivadas direccionales se trabaja con vectores unitarios. En las derivadas respecto de un vector, se consideran vectores cualesquiera. Al calcular derivadas en un punto respecto de vectores de la forma $\alpha.\vec{v}$
que, obviamente corresponden a la misma dirección, se obtienen en un mismo punto, distintos valores para la derivada.

- ***Propiedades de las derivadas direccionales de campos vectoriales***

Sea $\vec{F}: A \quad R^m$, con $A \quad R^n, (n \quad 2, m \quad 2)$
/ $\vec{F}(\vec{X}) = (F_1(\vec{X}); F_2(\vec{X}); \ldots; F_m(\vec{X}))$
.

1) Con una demostración similar a la realizada para funciones vectoriales se tiene que:

$$\vec{F}'(\vec{X}, \vec{v}) = (F_1'(\vec{X}, \vec{v}); F_2'(\vec{X}, \vec{v}); \ldots . F_m'(\vec{X}, \vec{v}))$$

2) Si las F'i (con i "{1,2,...,m} son continuas en $\vec{X}_O$
, para cada componente vale la homogeneidad y la aditividad de la derivada direccional para campos escalares, entonces:

a) $\vec{F}'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}) = (F_1'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}); F_2'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}); \ldots; F_{m,}'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v})) =$

$$= \left(\lambda F_1'(\vec{X}_0,\vec{v});\lambda F_2'(\vec{X}_0,\vec{v});\ldots\lambda F_m'(\vec{X}_0,\vec{v})\right) =$$
$$= \lambda.\left(F_1'(\vec{X}_0,\vec{v});F_2'(\vec{X}_0,\vec{v});\ldots;F_m'(\vec{X}_0,\vec{v})\right) = \lambda.\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v})$$

b)Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son versores de Rn y $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, entonces:

$$\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{w}) = \vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{u}) + \vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v})$$

- **Derivadas parciales de campos vectoriales**

Si para el campo vectorial $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subseteq R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$, se calculan las derivadas direccionales respecto de los versores de la base canónica, se obtienen las ***derivadas parciales***.

Consideremos $\vec{X}_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j.\vec{e}_j$. A la derivada direccional de $\vec{F}$ con respecto a $\vec{e}_j$, se la llama derivada parcial de $\vec{F}$ con respecto a xj .

$$\vec{F}'(\vec{X}_o;\vec{e}_j) = \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_j}\right|_{\vec{X}_0} = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{e}_j) - \vec{F}(\vec{X}_0)}{t} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right|_{\vec{X}_0} \\ \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right|_{\vec{X}_0} \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_j}\right|_{\vec{X}_0} \end{pmatrix}$$

- ***Matriz jacobiana o matriz derivada***

Sea el campo vectorial $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subseteq R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$, se llama matriz jacobiana o matriz derivada a la matriz mxn cuyas filas son las derivadas parciales de cada una de las componentes de $\vec{F}$. La matriz jacobiana está definida en aquellos puntos de A en los que están definidas todas las derivadas parciales de las componentes de $\vec{F}$. La filas de la matriz jacobiana son los gradientes de cada componente. Las columnas son los vectores derivados del campo respecto de cada una de las variables.

$$D[\vec{F}(\vec{X})] = \begin{matrix} \frac{F_1}{x_1} & \frac{F_1}{x_2} & \cdots & \frac{F_1}{x_n} \\ \frac{F_2}{x_1} & \frac{F_2}{x_2} & \cdots & \frac{F_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{F_m}{x_1} & \frac{F_m}{x_2} & \cdots & \frac{F_m}{x_n} \end{matrix}$$

Ejemplo:

Dado el campo vectorial $F : R^3 \quad R^2 / F(x;y;z) = (2x^2y + z; 2z^2x + 3y)$, se pide su matriz derivada.

Consideramos $F(x;y;z) = (F_1(x;y;z); F_2(x;y;z))$, entonces: D[

$$F(X)] = \begin{matrix} \frac{F_1}{x} & \frac{F_1}{y} & \frac{F_1}{z} \\ \frac{F_2}{x} & \frac{F_2}{y} & \frac{F_2}{z} \end{matrix}$$

!D[$F(X)] = \begin{matrix} 4xy & 2x^2 & 1 \\ 2z^2 & 3 & 4zx \end{matrix}$

- ***Cálculo de derivadas direccionales en función de las derivadas parciales***

Consideremos un campo vectorial $\vec{F}$:**A**! **Rm**, con **A**"**Rn** ,(**n** " 2 ; **m** "2) , un punto $\vec{X}_0$ interior a **A ,** y un versor $\vec{v} = {}_{j=1}^{n} \cos \alpha_j . \vec{e}_j$ de **Rn**

Supongamos además que $\vec{F}$ ($\vec{X}$)= $\begin{matrix} F_1(\vec{X}) \\ F_2(\vec{X}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{X}) \end{matrix}$ tiene derivadas parciales continuas en $\vec{X}_0$,

entonces " i " { 1,2,....,m} , F'i $(\vec{X}_0 ; \vec{v})$

$= \vec{\ } F_i(\vec{X}_0) \ . \vec{v}$

$= {}^{n}_{j=1} \left. \frac{F_i}{x_j} \right|_{\vec{X}_0} . \cos \alpha_j$

.

Luego: $\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v}) = \begin{pmatrix} F_1'(\vec{X}_0;\vec{v}) \\ F_2'(\vec{X}_0;\vec{v}) \\ \vdots \\ F'_m(\vec{X}_0;\vec{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} F_1(\vec{X}_0).\vec{v} \\ \vec{\nabla} F_2(\vec{X}_0).\vec{v} \\ \vdots \\ \vec{\nabla} F_m(\vec{X}_0).\vec{v} \end{pmatrix}$

!

$$\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big|_{\vec{X}_0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big|_{\vec{X}_0} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Big|_{\vec{X}_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Big|_{\vec{X}_0} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big|_{\vec{X}_0} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\Big|_{\vec{X}_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}\Big|_{\vec{X}_0} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}\Big|_{\vec{X}_0} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\Big|_{\vec{X}_0} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix} = D[\vec{F}(\vec{X}_0)] . \vec{v}$$

Luego , si $\vec{F}$ tiene derivadas continuas en $\vec{X}_0$ se cumple que:

$$\vec{F}'(\vec{X}_0;\vec{v}) = D[\vec{F}(\vec{X}_0)] . \vec{v}$$

<u>Derivadas sucesivas o iteradas.</u>

- ***De funciones vectoriales***

La derivada de $\vec{f} : A \to R^m$ con $A \subseteq R$ / $\vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); \ldots ; f_m(t))$ se obtiene derivando cada una de las componentes que son funciones escalares.

Por lo tanto si las f i con i" {1,2,...m} tienen derivadas n−simas, podremos definir la derivada n−sima de **f**

mediante: $$f^{(n)}(t) = \left(f_1^{(n)}(t); f_2^{(n)}(t);\ldots f_m^{(n)}(t)\right)$$

- ***De campos escalares.***

Sea F:**A**!**R** con **A** " **Rn** . Las derivadas parciales de F están definidas para todo punto de **B** " **A** " **Rn** . Por lo tanto, para cada una de ellas podrá analizarse la existencia de sus derivadas parciales que, si existen, serán las derivadas segundas de F. Así sucesivamente, podrán definirse las derivadas n− simas de F.

Un campo escalar de n variables puede tener n derivadas primeras y en consecuencia n2 derivadas segundas, n3 derivadas terceras,....., nk derivadas k−simas. Bajo ciertas condiciones, algunas de las derivadas iteradas son iguales.

Sea F:R2!R/ F(x;y)= x2y + 3xy, podemos calcular

F'x(x;y)= 2xy + 3y F'y(x;y)=x2 + 3x

Cada una de estas funciones puede ser derivada respecto de cada una de sus variables, permitiéndonos obtener cuatro derivadas segundas:

$$\frac{F'_x}{x} = \frac{{}^2F}{x^2} = F'_{xx} =$$

2y $$\frac{F'_y}{x} = \frac{{}^2F}{x\ y} = F'_{yx} = 2x+3$$

$$\frac{F'_x}{y} = \frac{{}^2F}{y\ x} = F'_{xy} = 2x+3$$
$$\frac{F'_y}{y} = \frac{{}^2F}{y^2} = F'_{yy} = 0$$

Las recuadradas son las que llamaremos derivadas cruzadas. Como vemos en este ejemplo resultan iguales.

Analicemos esas derivadas en (0;0) para el campo F:A
R2!R/ F(x;y)= $$\begin{array}{ll} \dfrac{3yx^2 - 2xy^2}{x+y} & \text{si } (x;y) \quad (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{array}$$

con A={(x;y) R^2
/x
−y $(x$
;y)=(0;0)}

Debemos calcular las derivadas primeras. Si lo hacemos por fórmula para (x;y)"(0;0) y por definición en el origen obtenemos:

F'x(x;y)= $\dfrac{3yx^2+6xy^2-2y^3}{(x+y)^2}$ **si** $(x;y) \neq (0;0)$

0 **si** $(x;y)=(0;0)$

y F'y(x;y)= $\dfrac{3x^3-4x^2y-2xy^2}{(x+y)^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$

0 si $(x;y)=(0;0)$

Entonces

$$F''_{xy}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{F'_x(0;k)-F'_x(0;0)}{k}$$

$$F'_{xy}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{3k.0^2+6.0.k^2-2k^3}{(0+k)^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-2k^3}{k^3}=-2$$

Del mismo modo:

$$F''_{yx}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{F'_y(h;0)-F'_y(0;0)}{h}$$

$$F'_{yx}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3h^3-4.h^2.0-2h.0^2}{(h+0)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3}=3$$

En este ejemplo, como vemos las derivadas cruzadas en (0;0) son distintas.

- ***Teorema de Schwarz***

Consideremos un campo escalar de dos variables F : **A**!**R** con **A** " **R2** /

existan F'x , F'y y Fxy en un entorno de $\vec{x}_o=(x_o;y_o)$
punto interior de **A.**

Entonces, si Fxy es continua en $\vec{x}_o$
, existe Fyx y se cumple que Fyx($\vec{x}_o$
)=Fxy($\vec{x}_o$
).

(En el ejemplo falla la continuidad de las derivadas primeras

La propiedad subsiste para cualquier número de variables, ya que en la derivación respecto de dos de ellas se mantienen constantes las demás. Si se cumplen las hipótesis del T. de Schwarz , de las n2 derivadas segundas que tiene un campo escalar de n variables , sólo $\dfrac{n(n+1)}{2}$
son distintas.

Pueden enunciarse condiciones similares para las derivadas sucesivas de orden superior. Si tales condiciones se cumplen , el número de derivadas k−simas distintas será el de

combinaciones con repetición de n elementos tomados de a k., es decir el número combinatorio $\genfrac{}{}{0pt}{}{n+k-1}{k}$

Por ejemplo, un campo escalar de 3 variables (n = 3), tiene 15 derivadas parciales distintas de cuarto orden (k= 4).

- ***De campos vectoriales***

Debe considerarse que las derivadas de campos vectoriales surgen de derivar cada componente y las componentes de un campo vectorial son campos escalares.

Ejercicio de final. Tema 11 .1.b)

Se llama derivada de f en xo al límite, si existe, del cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

, cuando $x \quad x_0$

.

Notación: f '(xo)=Df(xo)=$\frac{dy}{dx}\ x_0$

f(x0)

f(x)

x

f

Po

P

x

x0

$$f'(x_0) = \lim_{x \quad x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

El cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

*(cociente incremental), representa la pendiente de la recta secante a la curva **C**, representativa de la función.*

Cuando $x \quad x_0$

, el punto P resbala sobre la curva hasta coincidir con P0, la recta secante alcanza una posición límite que corresponde a la recta tangente.

define como tangente a la curva en Po.

x0

f(x0)

x

f(x)

x

f

Po

P

s

tt

Por def. de derivada

Por def. de $\vec{f}$

Por límite de una función vectorial

Por def. de vector y de deriv. de una función escalar

$\vec{f}(t_0 + \Delta t)$

$\vec{f}(t_0)$

$\vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)$

y

x

z

P

P0

$\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_0)$

$\overset{r}{f}(t_O + \Delta t)$

$\overset{r}{f}(t_0 + \Delta t) - \overset{r}{f}(t_0)$

$|\Delta_y F$
$|$ = medida de$|\overline{MM'}$
$|$

z

M'

Q

T '

y

b

b+k

a

a+h

T

S

S'

M

x

F'y (a;b)= mt = tg

x

y

z

a

b

y

x

a

b

Po

s

z

y

–

x

–

y

f(b)

f(a)

A

B

t

r

f

a c b **x**

Geométricamente significa que si f es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe un punto en el arco representativo de f) en el que la recta tangente es paralela a la cuerda que une los extremos del arco.

A

En R2 sería:

multiplicamos y dividimos por

0 α
t

(pues proyectar un vector sobre otro significa multiplicarlo escalarmente por el versor correspondiente)

continuas en P_o

,la dirección de máxima derivada está dada por el vector gradiente en P_o