Apuntes Teóricos de Análisis Matemático

Intervalos

Dados dos números reales a y b tales que a < b, definimos:

A) Intervalo abierto de extremos a, b:

(a, b) = { x c R /a < x < b }

Observemos que los extremos a, b no pertenecen a (a, b). Representación gráfica del intervalo (a, b):

a b

( ) R

Para representar gráficamente al intervalo (a, b) en la recta real se ha tenido en cuenta que si a < b, entonces el punto a está a la izquierda del punto b.

b) Intervalo cerrado de extremos a, b:

[a, b] = {x c R / a≤ x ≤ b}

Observemos que en este caso los extremos pertenecen al intervalo.

Representación gráfica del intervalo [a, b]:

a b

[ ] R

C) Intervalos semiabiertos

CERRADO A IZQUIERDA Y ABIERTO A DERECHA.

[a,b) = {x c R / a ≤ x < b}

Representación gráfica del intervalo [a, b):

a b

[ )

ABIERTO A IZQUIERDA Y CERRADO A DERECHA

(a b] = (x c. R / a < x ≤ b}

Representación gráfica del intervalo (a, b]:

a b

( ]

Función Cuadrática

Una función cuadrática o polinómica de segundo grado es de la forma:

$y = f(x) = ax2 + bx + c$ con $a == 0$

a, b, c (− R

Dominio de la función: Es el conjunto de los números reales

Dominio de f = R

Gráfica de la función: Una parábola.

Realicemos los sgtes. Casos:

- $y = ax2$ Si $a = 1$; $y = x2$

Partimos de esta parábola y estudiamos la variación de las demás con relación a ella, para valores positivos o negativos de a.

(Fig1)

Observamos que si a es positivo (a>b) las ramas de la parábola se extienden en el sentido positivo del eje y. (Fig1)

Si a>1 la parábola se cierra y sus ramas se aproximan al semieje positivo de las y, a medida que a aumenta.

Si 0<a<1 la parábola se abre y sus ramas se aproximan al eje x a medida que a disminuye.

Si la ecuación de la parábola es de la forma:

$Y = ax2 + n$.

La parábola se desplaza n unidades hacia arriba o abajo según sea n>0 o n<0 respectivamente.

Ejemplos

Si la ecuación de la parábola es de la forma:

$Y = a (x − m)2$

La parábola se desplaza a la derecha o izquierda según sea m positivo o negativo.

Ejemplos

$Y = (x − 2)2$

$Y = (x − 2)2$

El procedimiento de llevar la ecuación de la forma y = ax2 + bx + c a la forma y = a(x − m)2 + n se llama completamiento de cuadrados. Lo útil en este procedimiento es que nos permite graficar con suma facilidad la parábola.

En el punto de coordenadas (m, n) se llama vértice de la parábola y observando los gráficos vemos que allí cambia su crecimiento, es decir pasa de decreciente a creciente si a es positivo y creciente a decreciente si a es negativo.

Trigonometría

Funciones circulares. Medidas de ángulos.

Sean r y s dos semirrectas con origen 0 que están superpuestas tal como lo inidica la figura:

r = s

Supongamos que s gira en torno a 0. Obviamente puede hacerlo en cualquiera de los dos sentidos: en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido opuesto.

1 2

Por convención diremos que un ángulo es positivo si el sentido de giro es antihorario y negativo si es horario. En el gráfico el 1 es positivo y el 2 negativo.

Sistemas de medidas de ángulos

Para medir un ángulo pueden adoptarse distintas unidades. Uno de los seis temas de medición de ángulos más usado es el sexagesimal cuya unidad de medida angulas es el ángulo igual a la novena parte del ángulo recto; que se llama grado sexagesimal y se lo abrevia 1º.

1 ángulo recto = 1

90

Los submúltiplos del grado son el minuto y el segundo

1º = 1´ (un minuto) 1 ´ = 1´´ (un segundo)

- 60

Otro sistema muy usado es el circular o el radial: la unidad es el radian que es el arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a que pertenece.

Correspondencia entre los sistemas Sexagesimal y Circular

1º = Pi Radianes 1 radian = 180

- Pi

Ejemplo 1

Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2.5 radianes.

375,000 2,618

113.20

08.480 143º 14´ 20´´

0,626

x 60 Como este resto es en milésimos de grado, multiplicamos por 60 para

37,560 tenerlo en minutos, después dividimos y obtenemos los 14´.

11,380

- como este resto es en milésimos de minuto, multiplicamos por 60 para

tenerlo en segundos, después dividimos y obtenemos los 20´´.

Ejemplo 2

Expresar en el sistema circular un ángulo de 35º 40´

(Notar que 40´ = (0.666...)º . . 35º 40´ ~ 35.66...º)

Observación: A partir de ahora tendremos en cuenta para dibujar los ángulos, las siguientes consideraciones:

Trabajaremos con un sistema de coordenadas rectangulares.

El origen de coordenadas coincide con el vértice del ángulo.

El lado que permanece fijo coincide con el semieje positivo x.

El lado que rota podrá pertenecer al 1º, 2º, 3º o 4º cuadrante respectivamente.

Función valor absoluto

F: R R + U {o} ImF(x) = R + U {o}

Y = X

Y = X = X si X $\geq$ 0 Y = X

−X si X < 0 Y = X

Ej: Y =3 X

3x si X $\geq$ 0 Y = 3x

−3x si X < 0 Y = −3x

Ej: Y = − X

$-X$ si $X \geq 0$

$-(-X)$ si $X<0$

$ImF(x) = R - U \{0\}$.

$Y = x - m$ m c R

$Y = x - 2$

$X - 2$ si $x - 2 \geq 0$ $X - 2$ si $X \geq 2$

$-(X-2)$ si $x - 2 < 0$ $-X + 2$ si $X < 2$

$Y = - X + 1$

$- X + 1$ $-X + 1$ si $x+1 \geq 0$ $-x+1$ si $x \geq -1$ $-(-x+1)$ si $x+1 > 0$ $x - 1$ si $x < -1$