

• MATRICES Y DETERMINANTES.

MATRICES.

1. Definiciones.

Matriz: Se llama matriz de orden $m \times n$ a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y n columnas.

$a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n}$

$A = a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n}$

$\dots a_{ij} \dots$

$a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn}$

Matriz fila: Es una matriz de orden $1 \times n$

$A = (a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n})$

Matriz columna: Es una matriz de orden $m \times 1$

b_{11}

$B = b_{21}$

.

.

b_{m1}

Matriz Cuadrada: Es una matriz que cumple que el n° de filas es igual al número de columnas.

Existen dos clases de diagonales: la principal y la secundaria.

$a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n}$

$a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n-1} \ a_{2n}$

$A = \dots$

$a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn}$

$a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ a_{nn} \Rightarrow \text{fila} = \text{columna}$

Diagonal Principal: Aquella formada por los elementos $a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \dots$ (solo en las matrices cuadradas).

Diagonal Secundaria: Aquella formada por los elementos $a_{1n} \ a_{2n-1} \dots a_{nn}$.

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos los elementos que están a un lado de la diagonal principal. Habrá matrices Triangulares Superiores, que son aquellas que tienen nula la parte inferior de la diagonal principal.

3 2 -7 **Triangular Superior**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \text{ si } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Matriz Triangular Inferior: Es una matriz que tiene nula la parte superior de la diagonal principal.

$$-1 \ 0 \ 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$-2 \ -1 \ 3$$

Matriz Diagonal: Es una matriz cuadrada que tiene nulos los elementos de ambos lados de la diagonal principal.

$$-1 \ 0 \ 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 0 \ 3$$

Matriz Unidad o identidad: Es una matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal igual a 1.

$$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 0 \ 1$$

$$1 \text{ si } i = j$$

$$a_{ij} =$$

$$0 \text{ si } i \neq j$$

Matriz Traspuesta: Una matriz traspuesta de una matriz A, es la que se obtiene al convertir ordenadamente las filas a columnas, se representa por A^t .

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A^t = (a_{ji})_{n \times m}$$

$$2 \ -1 \ 3 \ 2 \ 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 1

(2*3)

(3*2)

Matriz Simétrica: Una matriz simétrica de una matriz cuadrada A, es aquella que es igual a su traspuesta, es decir, son iguales todos los elementos que son simétricos respecto de la diagonal principal.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Suma de matrices.

En el conjunto de matrices $m \times n$ se define una ley de composición interna llamada suma de matrices, de forma que si tenemos una matriz $A=(a_{ij})_{m \times n}$ y una matriz $B=(b_{ij})_{m \times n}$ se define matriz suma $A+B=C$

$$C=(c_{ij})_{m \times n}; A, B \in M_{m \times n}$$

De forma que cada (C_{ij}) lo obtenemos de la suma de $a_{ij}+b_{ij}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+B=C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices.

1. Conmutativa: Si yo sumo $A+B$ obtengo el mismo resultado que si sumo $B+A$ y eso se verifica si $A, B \in M_{m \times n}$

2. Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$; $A, B, C \in M_{m \times n}$

3. El elemento neutro: Se llama matriz nula, se denota siempre $O_{m \times n}$, es una matriz que todos sus elementos son 0.

$$A+O_{m \times n}=A, A \in M_{m \times n}$$

4. El elemento opuesto: Que es la matriz opuesta se denota $(-A)$

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{m \times n}; A \text{ } m \times n$$

Producto de una matriz por un número real.

Dado el conjunto de matrices de orden $m \times n$ se define una ley de composición externa, llamada producto de un número real por una matriz de orden $m \times n$ de forma que $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y un número real K (K) se llama $K \cdot A = (K \cdot a_{ij})_{m \times n}$

$$K = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} K \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de una matriz por un número real.

1. Distributiva mixta del producto respecto de la suma de matrices.

$$K \cdot (A + B) = K \cdot A + K \cdot B; A, B \text{ } m \times n; K$$

Ejemplo:

$$1. K \cdot (A + B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot K = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K = 2$$

2.

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} A = B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 6 & 4 & 10 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 & 5 & 7 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

2'.

3 4 1 6 9 12 3 18

3 + 3 = + =

2 5 3 2 6 15 9 6

12 30

=

15 21

2. Distributiva mixta del producto respecto de la suma de números reales.

$(K+r)*A = k*A+r*A$; A $M \times n$; k, r

3. Asociativa mixta:

$(k*r)*A = k*(r*A)$; A $M \times n$; k, r

4. El neutro para la ley externa:

$1*A = A$; A $M \times n$; 1

Producto de dos matrices.

Para que dos matrices A y B puedan multiplicarse en este orden $A*B$ es necesario que el número de columnas de la primera matriz A sea igual al número de filas de la segunda matriz B .

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

$A*B = C = (C_{ik})_{m \times p}$ $A * B$

$B = (b_{jk})_{n \times p}$

=

$C_{ik} = a_{i1} * b_{k1} + a_{i2} * b_{k2} + \dots + a_{in} * b_{nk} = a_{ih} * b_{hk}$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $A * B =$ Si se puede

$B = (b_{jk})_{n \times p}$ $B * A =$ No se puede

$a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \ b_{11} \ b_{12} \dots \mathbf{b_{1k}} \dots b_{1p}$

$a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \ b_{21} \ b_{22} \dots \mathbf{b_{2k}} \dots b_{2p}$

$A*B =$

$\mathbf{a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in} \dots}$

$a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} b_{n1} b_{n2} \dots \mathbf{b_{nk}} \dots b_{np}$

$C_{12} \dots$

$\dots$

$\dots C_{ik} \dots$

$\dots$

$A = (a_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A =$

$B = (b_{jk})_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C_{11} \ C_{12}$

$(-1) \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \quad (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \quad \mathbf{-3 \ 10}$

$= =$

$0 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \quad 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \quad \mathbf{-1 \ -1}$

$C_{21} \ C_{22}$

NO SE VERIFICA LA PROPIEDAD CONMUTATIVA.

SI SE VERIFICA LA PROPIEDAD ASOCIATIVA.

Propiedades:

– **Asociativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad A, B, C \in M_n$

Ejemplo:

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(2 \cdot 1) (1 \cdot 2) (2 \cdot 3) (3 \cdot 2)$

$$(2 \cdot 2) (2 \cdot 2)$$

$$-1$$

$$-1 \ 2 \ 0$$

$$A = ; B = 2 ; C = 5 \ 6$$

$$2 \ 1 \ -1$$

$$5 (1 \cdot 2)$$

$$(2 \cdot 3) (3 \cdot 1)$$

1ª Parte.

$$5 \ 5 \ 25 \ 30$$

$$A \cdot B = ; (A \cdot B) \cdot C = 5 \ 6 = 11 \ 12$$

$$-5 \ -5 \ -25 \ -30$$

$$21 \ 22$$

2ª Parte.

$$-1 \ -5 \ -6$$

$$B \cdot C = 2 (5 \ 6) = 10 \ 12 ;$$

$$5 \ 25 \ 30$$

$$(3 \cdot 2)$$

$$-5 \ -6$$

$$-1 \ 2 \ 0 \ 25 \ 30$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \cdot 10 \ 12 =$$

$$2 \ 1 \ -1 \ -25 \ -30$$

$$25 \ 30$$

$$5+20+0=25$$

$$6+24+0=30$$

$$-10+10-25=-25$$

$$-12+12-30=-30$$

– **Distributiva respecto de la suma de matrices:** $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A, B, C \in M_n$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = B = C =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot + = \cdot + \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 & -7 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= +$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & -2 & -10 & 20 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 14 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

– **Elemento Neutro:**

Matriz Unidad: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$; $A \in M_n$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & \cdot & = & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES.

Determinante: Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama determinante de A al polinomio cuyos términos son todos los posibles productos de n factores tomados entre los n elementos de A de modo que en cada término haya un solo factor de cada fila y un solo factor de cada columna, y afectando a cada término del signo + o del - según que las permutaciones de los índices de las filas y las columnas sean de la misma clase o de distinta clase (par o impar). El número de términos de un determinante de orden n es n factorial.

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$$

$$|A| = a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$a_{11} \ a_{12}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$a_{21} \ a_{22}$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Regla de Sarrus.

Dentro del polinomio los términos positivos serán:

La suma de la diagonal principal mas sus paralelas por la esquina contraria.

Los términos negativos serán.

La diagonal secundaria mas sus paralelas por la esquina contraria

Ejemplos de la regla de Sarrus.

$$a_{11} \ a_{12}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$a_{21} \ a_{22}$$

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$$

$$|A| = a_{21} \ a_{22} \ a_{23}$$

$$a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

$$1 \ 2 \ 3$$

$$4 - 5 \cdot 6 = -5 + 24 - 12 + 30 + 6 - 8 = 60 - 25 = \mathbf{35}$$

$$2 - 1 \cdot 1$$

DEFINICIONES.

Menor Complementario: Dada una matriz cuadrada A de orden n se llama menor complementario i,j de un elemento a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta al suprimir la fila y la columna del elemento a_{ij} .

Ejemplo:

$$5 \cdot 6$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = -5 - 6 = \mathbf{11}$$

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 12 & -4 & -12 & -16 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 6 & 11 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot 1 - 1$$

$$4 \cdot 6$$

$$12 = -4 - 12 = \mathbf{-16}$$

$$2 - 1$$

$$2 \cdot 3$$

$$13 = 12 - 15 = \mathbf{-3}$$

$$5 \cdot 6$$

Adjunto: Dada una matriz cuadrada A de orden n se llama adjunto (A_{ij}) de un elemento a_{ij} al valor de la siguiente expresión:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 11 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 12$$

$$A_{11} = 1 \cdot 5 \cdot 6 = \mathbf{-11} \quad A_{12} = (-1) \cdot (-16) = \mathbf{16}$$

$$1 - 1$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

1. Si cambiamos ordenadamente las filas por columnas el determinante no varia, es decir, el determinante de A es igual al determinante de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

$$\begin{vmatrix} a & b & a & c \\ c & d & b & d \end{vmatrix}$$

$$= ad - bc ; = ad - cb$$

$$c \cdot d \cdot b \cdot d$$

2. Si se intercambian entre si dos líneas paralelas, filas o columnas, el determinante solo cambia de signo pero el valor absoluto se mantiene invariable.

F1 cambio F2

a b c d a b

$$= ad - bc ; = bc - ad = -$$

c d a b c d

1 2 3

$$4 -5 6 = 24 -12 +30 +6 = 60 +12 = \mathbf{48}$$

2 -1 0

F1 cambio F3

2 -1 0

$$4 -5 6 = -30 -6 -24 +12 = \mathbf{-48}$$

1 2 3

3. Multiplicar un número por un determinante equivale a multiplicar dicho número por los elementos de una de sus líneas (una fila o una columna).

a b K.a K.b K.a b

$$K . = =$$

c d c d K.c d

1 2

$$2. = 2 . (4-6) = 2 . (-2) = \mathbf{-4}$$

3 4

K.a b 2 4

$$= 8 -12 = \mathbf{-4}$$

K.c d 3 4

4. Un determinante con dos líneas paralelas iguales o proporcionales vale 0.

a b c

$$d e f = aec + bfa + cdb - cea - afb - bdc = 0$$

a b c

a d k.a a d a

$$b e k.b = k. b e b = k.0 = 0$$

c f k.c c f c

Ejemplo con números:

1 4 2

$$2 \ 5 \ 4 = 30 + 48 + 24 - 30 - 24 - 48 = 0$$

3 6 6

5. Si cada elemento en una línea dada es suma de dos términos, se puede desdoblar en dos determinantes de la siguiente forma:

a b c a b c a b c

$$d+x \ e+y \ f+z = d \ e \ f + x \ y \ z$$

g h i g h i g h i

Ejemplo con números:

1 2 3 1 2 3

$$4+2 \ 5-1 \ 6+1 = 6 \ 4 \ 7 = 20+42-72-36+28-60 = -78$$

3 -4 5 3 -4 5

1 2 3

$$4 \ 5 \ 6 = 25+36-48-45+24-40 = -48$$

3 -4 5

$$-48-30 = -78$$

1 2 3

$$2 \ -1 \ 1 = -5+6-24+9+4-20 = -30$$

3 -4 5

6. Si a una línea se le suma otra paralela multiplicada por un número el determinante no varía.

a b c a b c

$$d \ e \ f = d+k.a \ e+k.b \ f+k.c$$

g h i g h i

$$f^2 = f_2 + kf_1$$

Nota: Nunca se puede poner $f^2 = 5f_2 + kf_1$

Ejemplo con números:

$$2 \ 3 \ 5 \ 2 \ 3 \ 5$$

$$-1 \ 2 \ 0 = 5 \ 11 \ 15 = 22 + 45 - 25 - 55 + 30 - 15 = 2$$

$$1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1$$

$$f^2 = f_2 + 3f_1$$

$$k = 3$$

7. Si una línea es una combinación lineal de otras dos o más líneas paralelas el determinante es 0.

$$I_1 = K_2.I_2 + K_3.I_3 ; K_2, K_3$$

2 líneas iguales

$$= 0$$

2 líneas proporcionales

Combinación lineal de las restantes

Ejemplo con números:

$$2 \ 3 \ 5$$

$$5 \ 5 \ 9 = 0 \quad f_2 = 2f_1 + f_3$$

$$1 \ -1 \ -1$$

8. El determinante de una matriz triangular o diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$a \ b \ c$$

$$0 \ d \ e = a.d.f$$

$$0 \ 0 \ f$$

9. El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}$$

$$a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}$$

$$= a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14}$$

$$a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}$$

$$a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}$$

$$= a_{11}. -a_{12}. +a_{13}. -a_{14}.$$

Ejemplo con números

$$-1 \ 2 \ -3 \ 4$$

$$6 \ 7 \ 8 \ 5 \ 7 \ 8$$

$$5 \ 6 \ 7 \ 8$$

$$= (-1) -10 \ 11 \ 12 \ -2 \ 9 \ 11 \ 12$$

$$9 \ -10 \ 11 \ 12$$

$$14 \ -15 \ 16 \ 14 \ -15 \ 16$$

$$13 \ 14 \ -15 \ 16$$

$$5 \ 6 \ 8 \ 5 \ 6 \ 7$$

$$-3 \ 9 \ -10 \ 12 \ -4 \ 9 \ -10 \ 11 = -(4400) - 2(-360) - 3(480) - 4(4344) = -18880$$

$$13 \ 14 \ 15 \ 13 \ 14 \ -15$$

10. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n entonces se verifica que el determinante de su producto es igual al producto de sus determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| ; A, B \in M_n$$

$$2 \ 3 \ 1 \ 2$$

$$A = B =$$

$$0 \ 1 \ 2 \ -1$$

$$2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2$$

$$. = .$$

$$0 \ 1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ -1$$

$$8 \ 1$$

$$= 2 \cdot (-1-4)$$

$$2 -1$$

$$-10 = -10$$

11. Un determinante con una línea de 0 vale 0.

$$a \ b \ c$$

$$d \ e \ f = 0$$

$$0 \ 0 \ 0$$

3. METODOS PARA RESOLVER DETERMINANTES DE CUALQUIER ORDEN.

Existen tres métodos:

1. Por adjuntos.

2. Regla de Chio.

3. Triangulando la matriz.

1. Por adjuntos: Aplicando la propiedad N° 9 de los determinantes se desarrolla por los adjuntos de una línea, convirtiéndose entonces el determinante inicial en varios determinantes de orden $n-1$ y se puede repetir el proceso con los determinantes resultantes hasta llegar a los de orden 3 que podemos calcular directamente a través de la regla de Sarrus.

Ejemplo:

$$1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 3$$

$$2 \ -1 \ 0 \ 3 \ 1 \ -1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 3$$

$$2 \ 3 \ 4 \ 5 \ -1$$

$$3 \ 4 \ 5 \ -1 \ 2 \ 4 \ 5 \ -1 \ 2 \ 3 \ 5 \ -1$$

$$-2 \ 5 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1$$

$$5 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ 5 \ 0 \ -1$$

$$3 \ 4 \ 7 \ 5 \ -4$$

$$4 \ 7 \ 5 \ -4 \ 5 \ 7 \ 5 \ -4 \ 3 \ 4 \ 5 \ -4$$

$$151 \ 152 \ -153 \ 054 \ -255$$

$$1 \ 2 \ -1 \ 0$$

2 3 4 5 Ahora de cada determinante habría que hacer lo mismo hasta

$-2 =$ que nos quedasen solo determinantes de orden 3.

-2 5 1 0

3 4 7 5

4 5 -1 3 5 -1 3 4 5

2 1 0 -1 + 5 0 -1 -3 5 1 0

7 5 -4 4 5 -4 4 7 5

2. Regla de Chio: Se busca una línea que tenga algún elemento de valor 1 que se denomina Elemento Pivote y se le aplica la propiedad N° 6 de los determinantes (Si a una línea se le suma otra línea paralela multiplicada por un número, el determinante no varía) respecto al Pivote para conseguir que el resto de los elementos de esa línea sean nulos.

Aplicando la propiedad N° 9 de los determinantes, el determinante inicial quedará reducido a uno de menor orden, al que hay que anteponer signo + o - correspondiente al signo del adjunto de dicho Pivote.

Ejemplo:

1 0 1 2 1 0 0 0

1 3 1

-1 1 2 -1 -1 1 3 1

= = 3 1 0 = **19**

1 3 2 2 1 3 1 0

-1 -2 -3

2 -1 0 1 2 -1 -2 -3

$C'3 = C3 - C1$

$C'4 = C4 + (-2)C1$

1 -1 0 1 1 -1 0 1

-1 2 1 3 -4 5 1 0

=

2 1 3 0 2 1 3 0

3 2 0 1

$f'2 = f2 - 3f1$

$f'4 = f4 - f1$

Dos casos de esta regla:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$5 \cdot 4 - 3 = 1 \cdot 4 - 3$$

$$2 \cdot 8 - 5 \cdot 6 = 8 - 5$$

$$C'1 = C1 - C2$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & 3/2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 - 3 = 5 \cdot 4 - 3$$

$$2 \cdot 8 - 5 \cdot 2 = 8 - 5$$

3. Triangulación: Consta de $n-1$ etapas, en una etapa i cualquiera tomamos como Pivote el elemento que este en la posición a_{ii} (Diagonal Principal) y a través de la propiedad N° 6 anulamos todos los elementos que queden por debajo de su columna, en la siguiente etapa anulamos los elementos por debajo del siguiente elemento de la Diagonal Principal, y así hasta conseguir triangular la matriz. Aplicando la propiedad N° 8 y obtenemos el valor del determinante como el producto de los elementos de la Diagonal Principal.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 5 & 1 & 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= - - - - =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 10 & 4 & 0 & -5 & 10 & 4 & 0 & 4 & 10 & -5 & 0 & 0 & -10 & -21 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & 9 & -2 & 0 & 13 & 23 & -9 & 0 & -9 & 23 & 13 & 0 & 0 & 68 & 49 \end{vmatrix}$$

$$f'2 = f2 + 2f1 \quad C2 \text{ por } C4 \quad f'3 = f3 - 4f2$$

$$f'4 = f4 + 7f1 \quad f'4 = f4 + 9f2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= - - - (-938) = 938$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 & -21 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -938/10 \end{vmatrix}$$

$$f'4 = f4 + 68/10f3$$

MATRIZ INVERSA.

Dada una matriz cuadrada A se llama matriz inversa, y se representa A^{-1} , a la matriz que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Ejemplo:

$$x + 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & y \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & y \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \det A = 3x + 4z = 0 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3x + 4z = 0 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A^{-1} se puede calcular así:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj} (A)]^t$$

$$|A|$$

$$1^\circ. |A|$$

$$A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$$

$$2^\circ. \text{Adj} (A) =$$

$$A_{n1} A_{n2} \dots A_{nn}$$

$$A_{11} \dots A_{n1} K \cdot A_{11}.$$

$$3^\circ. [\text{Adj} (A)]^t = ; A^{-1} = K \cdot =$$

$$A_{1n} \dots A_{nn}$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA.

1ª) Si la matriz A es singular (cuando su determinante es nulo) en ese caso no existe su matriz inversa.

$$\text{Si } A \text{ es singular } (|A|=0) \quad A^{-1}$$

2ª) Si A es regular (cuando su determinante es $\neq 0$) podemos afirmar que existe su inversa y además esta matriz es única.

$$\text{Si } A \text{ es regular } (|A| \neq 0) \quad A^{-1}, A^{-1} \text{ es única}$$

3ª) La matriz inversa de un producto de matrices es igual al producto de la inversa del segundo factor por la inversa del primer factor.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} ; A, B \text{ } M_n ; A, B \text{ regulares}$$

4ª) La inversa de la inversa de A es A.

$$(A^{-1})^{-1} = A ; A \text{ Mn} ; |A| \neq 0$$

Ejemplos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj} \cdot (A)]^t$$

$$|A| =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ existe}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ existe}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ.

1ª. Definición: Toda matriz A sea o no cuadrada lleva asociado un número natural que se denomina rango de A, y se simboliza $r(A)$, tal número coincide con el máximo número de vectores linealmente independientes de los que forman la matriz.

2ª. Definición: Llamando menores de orden h, a los determinantes de las submatrices formadas por todos los elementos comunes a h filas y h columnas de la matriz A, se define rango de A al número natural que expresa el mayor de los ordenes de los menores no nulos de la matriz A.

Ejemplo:

$$r(A)=3 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$\dots\dots\dots$

PROPIEDADES.

Propiedad 1: El rango de una matriz es como máximo el más pequeño entre m y n.

$$r(A) < \min (m, n)$$

Propiedad 2: El número de filas linealmente independientes que hay en una matriz coinciden con el máximo número de columnas linealmente independientes.

OPERACIONES ELEMENTALES (Que se pueden realizar en una matriz para el calculo de su rango).

1ª) Si se intercambian dos filas o dos columnas entre si el rango no se modifica.

2ª) Si una fila o una columna tiene todos los elementos nulos puede ser suprimida.

3ª) Se puede eliminar una línea que sea combinación lineal de otra u otras.

$$a \ b \ c \ a \ b \ c$$

$$a \ b \ c$$

$$d \ e \ f = 0 \ r \ d \ e \ f = r$$

$$g \ h \ i$$

$$g \ h \ I \ g \ h \ i$$

$$f_2 = 2f_1 \ f_2 = 2f_1$$

$$f_2 = 2f_1 + 3f_3 \ f_2 = 2f_1 + 3f_3$$

4ª) Se puede multiplicar o dividir toda una línea por un número distinto de 0 y el rango no se altera.

$$a/a \quad b/a$$

$$a$$

$$c \quad d$$

$$a \quad b \quad 2a \quad 2b$$

$$r = r$$

$$c \quad d \quad c \quad d$$

5ª) Una línea se puede sustituir por ella misma más un número no nulo por otra línea paralela.

$$a \quad b \quad c$$

$$d \quad e \quad f =$$

$$g \quad h \quad i$$

$$f' = f + k \cdot f_1$$

6ª) Una línea se puede sustituir por el producto de un número no nulo por ella misma más un número no nulo por otra línea paralela.

$$L_i = k_1 \cdot L_i + k_2 \cdot L_j$$

CALCULO DEL RANGO A TRAVES DEL METODO DE MENORES.

Sea una matriz A formada por m vectores. $A=(V_1, V_2, \dots, V_m)$

1º) Seleccionar dos vectores y buscar un menor no nulo, entre todos.

Si lo hay significa que V_1 y V_2 son linealmente

independientes, por lo tanto, como mínimo su rango es 2.

$$= 0$$

Si no lo hay significa que V_1 y V_2 son linealmente

dependientes, por lo tanto, podría probar con V_1 y V_3 .

$$V_1 \text{ y } V_2 \text{ son L.I.} \Rightarrow r(A) \geq 2$$

V_1 y V_2 son L.D. (suprimiríamos V_2)

2º) Partiendo del menor no nulo de orden 2 se selecciona un nuevo vector, por ejemplo V_3 , y se van calculando todos los posibles menores de orden 3 que resulten al orlar el menor no nulo.

x x x

Si lo hay $\Rightarrow V1, V2$ y $V3$ son L.I. $\Rightarrow r(A) \geq 3$

$V3 \times x \times x = 0$

Si no lo hay $\Rightarrow V3$ es C.L. del $V1$ y del $V2$ (suprimir $V3$ y probar $V4$)

x x x

Ejemplo:

1 2 4 7 $V1$

2 1 5 8 $V2$ 1 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ $V1$ y $V2$ son L.I. $r(A) \geq 2$

-1 3 1 3 $V3$ 2 1

0 -1 -1 2 $V4$

1 2 4 1 2 7

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -4 & -26 \end{pmatrix}$ $V3$ es C. L. De $V1$ y $V2$

-1 3 1 -1 3 3

1 2 4 1 2 7

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -4 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & 4/3 & 26/3 \end{pmatrix}$ $V1, V2, V4$ son L.I. $r(A) = 3$

0 -1 -1 0 -1 2

Ejercicio:

2 -1 1 1 2 $V1$

4 5 -2 5 $V2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2 1 0 1 $V3$

1 2 -1 2 $V4$

2 -1

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $V1$ y $V2$ son L.I. $r(A) \geq 2$

4 5

$$2 \ -1 \ 1$$

$$4 \ 5 \ -2 = 0+4+4-10+0+4=2 = 0 \ V1, V2 \ Y \ V3 \text{ son L.I. } r(A) \geq 3$$

$$2 \ 1 \ 0$$

$$2 \ -1 \ 2$$

$$4 \ 5 \ 5 = 20-5+16-10-20+8=9 = 0$$

$$1 \ 2 \ 2$$

$$2 \ -1 \ 1 \ 2 \ 2 \ -1 \ 1 \ 2$$

$$8 \ 3 \ 9$$

$$4 \ 5 \ -2 \ 5 \ 8 \ 3 \ 0 \ 9$$

$$= + \ 2 \ 1 \ 1 = 0 \ V4 \text{ es C.L. de } V1, V2, V3$$

$$2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$3 \ 1 \ 4 \ r(A)=3$$

$$1 \ 2 \ -1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 0 \ 4$$

$$f^{\prime 2} = f_2 + 2f_1$$

$$f^{\prime 4} = f_4 + f_1$$

CALCULO DEL RANGO A TRAVES DEL METODO DE GAUSS.

Por filas:

Este método constará de $m-1$ etapas. En una etapa i cualquiera se deja fija la fila i , tomando como referencia el elemento a_{ii} por medio de operaciones elementales se hacen 0 todos los elementos de su columna que estén por debajo de él.

Si el elemento a_{ii} es igual a 0 es preciso intercambiar previamente esa fila con alguna otra inferior o la columna con alguna otra posterior hasta conseguir que el elemento a_{ii} sea distinto de 0.

Finalmente el rango es el número de filas distintas de 0 que obtengamos.

$$x \ x \ x \ x \ x \ x$$

$$0 \ x \ x \ x \ x \ x$$

$$0 \ 0 \ x \ x \ x \ x$$

$$0 \ 0 \ 0 \ x \ x \ x$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ x \ x \ x$$

Ejemplo:

$$1 \ -4 \ 2 \ -1 \ 1 \ -4 \ 2 \ -1$$

$$1 \ -4 \ 2 \ -1 \ 1 \ -4 \ 2 \ -1$$

$$2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 7 \ -4 \ 3$$

$$A = ; r(A) = r = r \ 0 \ 7 \ -4 \ 3 = r \ 0 \ 7 \ -4 \ 3$$

$$3 \ -12 \ 6 \ -3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 1 \ 3 \ -1 \ 0 \ 0 \ 25 \ -10$$

$$0 \ 1 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 3 \ -1$$

$$f^{\prime 2} = f_2 - 2f_1 \quad f^{\prime 3} = 7f_3 - f_2$$

$$f^{\prime 3} = f_3 - 3f_1$$

$$r(A) = 3$$

$$2 \ -1 \ 3 \ 5 \ 2 \ -1 \ 3 \ 5 \ 2 \ -1 \ 3 \ 5$$

$$2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \ -2 \ -2 \ 0 \ -1 \ -2 \ -2$$

$$r = r = r \quad r(A) = 4$$

$$1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 0 \ 4 \ -3 \ -3 \ 0 \ 0 \ -11 \ -11$$

$$1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 6 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -11 \ -11$$

$$f^{\prime 2} = f_2 - f_1 \quad f^{\prime 3} = 4f_2 + f_3$$

$$f^{\prime 3} = 2f_3 - f_2 \quad f^{\prime 4} = 6f_2 + f_3$$

$$f^{\prime 4} = 2f_4 - f_2$$

Ejercicio:

$$2 \ -1 \ 3 \ 5 \ -1 \ 2 \ 3 \ 5$$

$$2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1 \ 3$$

$$r = r =$$

$$1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 0$$

$$1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2$$

C1 por C2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = 5f^4 - 13f^3$$

EJERCICIOS:

1º.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X$$

$$X$$

2º.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A + XB = C \quad A = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3A + XB = C$$

$$XB = C - 3A$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = [C - 3A] \cdot B^{-1}$$

3º.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{¿m? } A^{-1} A = 0 \text{ m } 3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

TEMA2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

DEFINICIONES.

Sistema de Ecuaciones Lineales: Se llama Sistema de Ecuaciones Lineales a todo junto de ecuaciones que presente la siguiente forma.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

a_{ij} : Coeficientes.

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

x_j : Incógnitas

.....

b_i : Términos independientes

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

m : Ecuaciones. n : Incógnitas.

$$a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \ x_1 \ b_1$$

$$a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \ x_2 \ b_2$$

..

$$a_{31} \ a_{32} \dots \ a_{3n} \ x_3 \ b_3$$

..

.....

..

$$a_{m1} \ a_{m2} \dots \ a_{mn} \ x_n \ b_m$$

Discutir un Sistema: Es averiguar si tiene soluciones y en ese caso cuantas hay.

Una vez discutido se pasa a resolver

Resolver un Sistema: Es hallar todas sus soluciones, es decir, los valores que sustituidos en las x_i (incógnitas) hacen que se verifiquen todas las ecuaciones.

Sistemas Equivalentes: Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

En función de la discusión podemos obtener una clasificación de los sistemas:

S. Incompatibles: No poseen solución.

S.C. Determinados: Son los que poseen

solución única

Clasificación **S. Compatibles:** Poseen solución.

S.C. Indeterminados: Son los que poseen infinitas soluciones.

Otra clasificación:

S. Homogéneos: Son aquellos en los que todos los términos independientes son nulos, $B=0$.

S. No Homogéneos: Son aquellos en los que no todos los términos independientes son nulos, $B \neq 0$.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

Este teorema es aplicable en sistemas no homogéneos en principio.

La condición necesaria y suficiente para que un Sistema de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

$$m = 4$$

$$n = 3$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

$$a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 = b_4$$

Matrices Asociadas:

Matriz Coeficientes Matriz Ampliada

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ b_1$$

$$a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ b_2$$

$$a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ b_3$$

$$a_{41} \ a_{42} \ a_{44} \ a_{41} \ a_{42} \ a_{44} \ b_4$$

$$A$$

$$A'$$

$$r = n \text{ S.C. Determinado}$$

$r(A) = r(A') = r \Rightarrow$ S. Compatible (tiene solución) $r < n$ S.C. Indeterminado

$r(A) = r(A') \Rightarrow$ S. Incompatible (no tiene solución)

METODOS PARA RESOLVER LOS SISTEMAS.

1. Resolución por inversión de la matriz.

Para poder resolverlo por este método se tienen que cumplir dos cosas:

1º. El número de ecuaciones tiene que ser igual que el número de incógnitas. ($m=n$).

2º. El determinante de A debe ser distinto de 0. ($|A| \neq 0$).

Ejemplo:

$$A \cdot X = B \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$3X - Y = 2 \quad 3 \quad -1 \quad 0$$

$$2X + Y + Z = 0 \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$3Y + 2Z = -1 \quad 0 \quad 3 \quad 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/1 [\text{Adj}(A)]^t = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} X = -1$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = -5 \quad Y = -5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -9 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} Z = 7$$

2. Regla de CRAMER.

Cualquier incógnita X_i es igual a un cociente cuyo denominador es el determinante de la matriz de coeficientes ($|A|$) y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al cambiar la columna i del determinante anterior por la columna de los términos independientes.

$$X_i =$$

Ejemplo

C1 B C3

X2=

C1 C2 C3

Ejemplo con números:

$$3X - Y = 2 \quad 3 \quad -1 \quad 0$$

$$2X + Y + Z = 0 \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 = 0$$

$$3Y + 2Z = -1 \quad 0 \quad 3 \quad 2$$

$$2 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad 1$$

$$-1 \quad 3 \quad 2 \quad -1$$

$$X = = = -1$$

$$1 \quad 1$$

$$3 \quad 2 \quad 0$$

$$2 \quad 0 \quad 1$$

$$0 \quad -1 \quad 2 \quad -5$$

$$Y = = = -5$$

$$1 \quad 1$$

$$\mathbf{X} = -\mathbf{1}$$

$$3 \quad -1 \quad 2 \quad \mathbf{Y} = -5$$

$$2 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \quad 3 \quad -1 \quad 7 \quad \mathbf{Z} = 7$$

$$Z = = = 7$$

$$1 \quad 1$$

3. Método de GAUSS.

La utilización de operaciones elementales en el método de GAUSS garantiza dos cosas:

1º. El Rango de la matriz primitiva coincide con el rango de la matriz transformada.

2º. El sistema de ecuaciones asociado a la matriz transformada es **equivalente** al sistema de ecuaciones asociado a la matriz primitiva.

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ b_1 \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ b_1$$

$$a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ b_2 \ 0 \ a_{22}' \ a_{23}' \ b_2'$$

$$r = \dots = r =$$

$$a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ b_3 \ 0 \ 0 \ a_{33}' \ b_3'$$

$$a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ b_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ b_4'$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 = b_2'$$

$$a_{33}' x_3 = b_3'$$

Ejercicio:

$$x + y = 1$$

$$x - y = 5$$

$$2x - y = 8$$

$$3x + 4y = 1$$

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$1 \ -1 \ 5 \ 0 \ -2 \ 4 \ 0 \ 1 \ -2$$

$$2 \ -1 \ 8 \ 0 \ -3 \ 6 \ 0 \ -3 \ 6$$

$$3 \ 4 \ 1 \ 0 \ 1 \ -2 \ 0 \ -2 \ 4$$

$$A \ f'2 = f_2 - f_1 \ f_2 \text{ por } f_4$$

$$f'3 = f_3 - 2f_1$$

$$A' \ f'4 = f_4 - 3f_1$$

*

$$1 \ 1 \ 1 \ r(A)=2$$

S.C. Determinado

$$0 \ 1 \ -2 \ r(A')=2$$

$$0 \ 0 \ 0 \ r = n$$

S.C. Determinado

$$0 \ 0 \ 0 \ 2 = 2$$

$$f'3 = f3 + 3f2 \quad r(A)=2$$

$$f'4 = f4 + 2f2 \quad r(A')=2$$

*

$$x + y = 1 \quad x - 2 = 1 \quad \text{SOLUCIONES.}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

$$y = -2 \quad \mathbf{x = 3}$$

$$\mathbf{y = -2}$$

Ejercicio: Discutir por Rouché y resolver por Gauss.

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + 2z = 5$$

$$x + y - z = 0$$

$$1 \ 1 \ 1 \ 6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 6$$

$$1 \ -1 \ 2 \ 5 \ 0 \ -2 \ 1 \ -1$$

$$1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 \ -6$$

$$r(A)=3$$

$$f'2 = f2 - f1 \quad r(A')=3$$

$$f'3 = f3 - f1$$

$$r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow \text{S.C. } r = n \Rightarrow \text{S.C. Determinado}$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2y + z = -1$$

$$-2z = -6$$

$$\mathbf{z = 3}$$

$$-2y + 3 = -1 \quad x + 2 + 3 = 6$$

$$-2y = -1 - 3 \quad \mathbf{x = 1}$$

$$y = -4/-2$$

$$y = 2$$

SOLUCIONES.

x = 1 Nota: Los cambios de filas no importa, pero

y = 2 cambios de columna si afectan.

$$z = 3$$

Ejercicio:

$$x - y - 2z = -1$$

$$2x - 3y + 4z = 4$$

$$5x - y + 3z = 16$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & 2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 16 & 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A f^2 = f2 - 2f1$$

$$A' f^3 = f3 - 5f1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r & 0 & -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} r(A) = r(A') = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = f3 - 4f2$$

$$x - y - 2z = -1 \quad 45z = 45 \quad -y + 8 = 6 \quad x - 2 - 3 = -1$$

$$-y + 8z = 6 \quad z = 1 \quad -y = 6 - 8 \quad x = -1 + 2 + 2$$

$$45z = 45 \quad y = 2 \quad x = 3$$

SOLUCIONES.

$$x = 3$$

$$y = 2$$

$$z = 1$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

$$r(A) = r(A') = r$$

$$r < n$$

nº de ecuaciones < nº de incógnitas

$n - r =$ nº de parámetros en función de los que queda la solución. Ejemplo:

$$4 - 3 = 1$$

Sobre el sistema de ecuaciones asociado a la matriz de rangos, resolvemos por alguno de los siguientes procedimientos:

1º. Despejando desde la última ecuación a la primera y por sustitución en las anteriores (Gauss).

2º. Pasando al término independiente $n-r$ incógnitas y resolviendo por Cramer, considerando las incógnitas del lado derecho y los términos independientes como un solo término.

Ejercicio:

$$x - 2 - u = 1$$

$$2x - 8y - z + u = 2$$

$$y + 3z - 2u = -2$$

$$1 - 2 \ 0 - 1 \ 1 \ 1 - 2 \ 0 - 1 \ 1$$

$$r \ 2 - 8 - 1 \ 1 \ 2 = r \ 0 - 4 - 1 \ 3 \ 0 =$$

$$0 \ 1 \ 3 - 2 - 2 \ 0 \ 1 \ 3 - 2 - 2$$

$$f'2 = f2 - 2f1$$

$$1 - 2 \ 0 - 1 \ 1$$

$$r(A)=3$$

$$= r \ 0 - 4 - 1 \ 3 \ 0 \ r(A)=r(A') \text{ S.C.}$$

$$r(A')=3 \ r < n \text{ S.C Indeterminado}$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 - 5 - 8$$

$$r-n = 4-3 = 1 \text{ uniparamétrico.}$$

$$f'3=4f3 - f2 \ A$$

$$A'$$

SOLUCIONES.

$$x - 2y - u = 1 \quad 5u - 8 = 15 + 25\zeta$$

$$-4y - z + 3u = 0 \quad z = x =$$

$$11z - 5u = -8 \quad 11 \quad 11$$

$$8 - 5u = 4 + 14u \quad 2 + 7u = 2 + 7\zeta$$

$$y = 1/4 [-z + 3u] = 1/4 [+3u] = y =$$

$$11 \quad 22 \quad 11 \quad 11$$

$$5\zeta - 8$$

$$z =$$

$$4 + 14u = 15 + 25u \quad 11$$

$$x = 1 + 2y + u = 1 + + u =$$

$$11 \quad 11$$

$$u = \zeta$$

Ejercicio:

$$x - 2y - u = 1 \quad x - 2y = 1 + u$$

$$-4y - z + 3u = 0 \quad -4y - z = -3u$$

$$11z - 5u = -8 \quad 11z = -8 + 5u$$

$$1 + u = 1 - 2 \quad 0$$

$$B - 3u \quad |A| = 0 \quad -4 \quad -1 = -44$$

$$-8 + 5u = 0 \quad 0 \quad 11$$

$$1 + u = -2 \quad 0$$

$$-3u = -4 \quad -1$$

$$dx = -8 + 5u = 0 \quad 11 \quad -100u - 60 = 25u + 15$$

$$x = = =$$

$$d = -44 \quad -44 \quad 11$$

$$1 \quad 1 + u = 0$$

$$0 - 3u - 1$$

$$0 - 8 + 5u - 11 - 28u - 8 - 7u - 2$$

$$y = = =$$

$$-44 - 44 - 11$$

$$1 - 2 - 1 + u$$

$$0 - 4 - 3u$$

$$0 - 8 + 5u - 20u - 8 - 5u - 8$$

$$z = = =$$

$$-44 - 44 - 11$$

SOLUCIONES.

$$25u + 15 - 7u - 2 - 5u - 8$$

$$x = y = z =$$

$$11 - 11 - 11$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS.

Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo cuando sus términos independientes son todos nulos.

Incompatible

1ª Clasificación

Determinado

Compatible

Indeterminado

Sistemas no Homogéneos ($B \neq 0$)

2ª Clasificación

Sistemas Homogéneos

Sistemas Homogéneos::»

Debido a esto siempre existirá al menos una solución, que es la que se conoce como solución trivial, que es aquella que asigna 0 a todas las incógnitas del sistema.

Solución Trivial::» ($X_i = 0$)

Ejemplo de Sistema Homogéneo:

$r = n \Rightarrow$ S. C. Determinado (Sol. Trivial)

$$r(A) = r(A^*) = r$$

$r < n \Rightarrow$ S. C. Indeterminado (Infinitas soluciones)

$$n - r = p$$

Ejercicios:

$$x + 4z = 0$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$2x + 2y - 7z = 0$$

$$1 \ 0 \ 4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 4 \ 0$$

$$1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 0 \ 2 \ -5 \ 0$$

$$r = r =$$

$$1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -3 \ 0$$

$$2 \ 2 \ -7 \ 0 \ 0 \ 2 \ -15 \ 0$$

$$f_2' = f_2 - f_1$$

$$f_3' = f_3 - f_1$$

$$f_4' = f_4 - 2f_1$$

$$1 \ 0 \ 4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 4 \ 0$$

$$0 \ 2 \ -5 \ 0 \ 0 \ 2 \ -5 \ 0$$

$$= r = r$$

$$0 \ 0 \ -11 \ 0 \ 0 \ 0 \ -11 \ 0$$

$$0 \ 0 \ -10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$f_3' = 2f_3 + f_2 \quad f_4' = -11f_4 - 10f_3$$

$$f_4' = f_4 - f_2$$

$$r(A) = r(A^*) = 3$$

$r = n :: \gg$ S.C.Determinado (Sol. Trivial)

$$3 = 3$$

Ejercicio:

$$x - y + z + t = 0$$

$$2x - 3y + 3t = 0$$

$$y + 2z - t = 0$$

$$1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$r \ 2 \ -3 \ 0 \ 3 \ 0 = r \ 0 \ -1 \ -2 \ 1 \ 0 =$$

$$0 \ 1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ -1 \ 0$$

$$f_2' = f_2 - 2f_1$$

$$1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$= r \ 0 \ -1 \ -2 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$f_3' = f_3 + f_2$$

$$r(A) = r(A^*) = 2$$

$r < n :: \gg$ S.C. Indeterminado

$$n - r = 4 - 2 = 2 \text{ Biparamétrico}$$

Hay otras dos maneras de resolver el ejemplo de la hoja anterior:

1ª)

$$1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$r = 0 \ -1 \ -2 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$x - y + z + t = 0$$

$$-y - 2z + t = 0 :: \gg y = -2z + t$$

$$x = y - z - t = -2z + t - z - t = -3z$$

$$x = -3z \ y = -2z + z = t =$$

2ª)

$$x + y + t = 0 \quad x - y = -z - t$$

$$-y - 2z + t = 0 \quad -y = 2z - t$$

$$1 \quad -1 \quad -z \quad -t$$

$$|A| = -1 \quad B =$$

$$0 \quad 1 \quad 2z \quad -t$$

$$-z - t \quad -1$$

$$2z - t \quad -1 \quad z + t + 2z - t$$

$$x = -3z$$

$$-1 \quad -1$$

$$1 \quad -z - t$$

$$0 \quad 2z - t$$

$$y = -2z + t$$

$$-1$$

$$x = -3$$

$$y = -2 +$$

$$t =$$

Resolver:

$$2x + y + 3z - t = 0$$

$$x - y + z - 2t = 0$$

$$3x + y - 2z + 4t = 0$$

$$x - y - 2z + t = 0$$

Discutir y resolver según los valores de a:

$$-2x - 4y + 7z = 0$$

$$9x - ay + 3z = 0$$

$$-5x + 3y - 2z = 0$$

TEMA3. PROGRAMACIÓN LINEAL.

Concepto de Programación Lineal: Un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una determinada función, llamada función objetivo, que depende de una serie de variables. Estas variables suelen estar relacionadas entre si por una o varias restricciones.

En concreto la Programación Lineal consiste en la resolución de un problema de optimización con ecuaciones lineales, de la forma:

$$\text{Optimizar } F = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n$$

Restricciones:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \geq b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2$$

.

.

.

.

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Ejercicio: Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B, para lo que dispone de una persona que trabaja 8 horas y de un total de 9 kg de material prima para fabricarlos. Se desea averiguar el número de productos a fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio por cada producto es de 2 y 3 respectivamente (medido en miles de pesetas). Además se conocen los datos referidos a las horas empleadas para cada producto y a la materia prima necesaria para cada uno de ellos.

	PRODUCTO A	PRODUCTO B
	X1	X2
Horas de trabajo	1	2
Materia Prima (Kg)	3	1

X1 = N° de unidades de producto A

X2 = N° de unidades de producto B

$$\text{Max B} = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2$$

$$\text{Max B} = 2x_1 + 3x_2$$

Restricciones:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Método Gráfico (Máximo 2 variables)

Ejemplo del Método Gráfico con el ejercicio anterior.

$$\text{Max } B = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.A: } 1x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad 3x_1 + x_2 = 9 \quad B = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9 \quad \text{Pte} = -3/2$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad \text{Pto recta } (-3, 2)$$

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad x_1 = 2$$

$$\text{Max } B = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13.000 \text{ pts}$$

$$3x_1 + x_2 = 9 \quad x_2 = 3$$

10

8

6

Pto. Optimo.

4

2

-6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

Dos unidades del producto A y 3 unidades del producto B y su beneficio será de 13.000 pts.

Ejercicio: Un agricultor desea abonar su campo y sabe que precisa como mínimo 17 Kg de fósforo y 8 Kg de Nitrógeno. En la tienda donde va a comprar estas sustancias, disponen de dos productos, el producto A contiene un 20% de fósforo y un 30% de nitrógeno y cuesta 300 pts el Kg, y el producto B contiene un 30% de fósforo y 10% de nitrógeno y cuesta 300 pts.

¿Qué cantidad ha de comprar de cada producto para que su gasto sea mínimo?. Planteamiento y resolución.

$$\text{Min } G = 300x_1 + 300x_2 \quad x_1 = \text{Kg de producto A}$$

$x_2 = \text{Kg de producto B}$

	PRODUCTO A	PRODUCTO B
FÓSFORO	0'2	0'3
NITRÓGENO	0'3	0'1

$$\text{S.A: } 0'2x_1 + 0'3x_2 \geq 17$$

$$0'3x_1 + 0'1x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$0'2x_1 + 0'3x_2 = 17 \quad 0'3x_1 + 0'1x_2 = 8 \quad G = 300x_1 + 300x_2$$

$$x_1 = 0:: \gg x_2 = 17/0'3 = 56'6 \quad x_1 = 0:: \gg x_2 = 8/0'1 = 80 \quad \text{Pte} = -1$$

$$x_2 = 0:: \gg x_1 = 17/0'2 = 85 \quad x_2 = 0:: \gg x_1 = 8/0'3 = 26'6$$

$$100 \quad 0'2x_1 + 0'3x_2 = 17$$

$$\text{Pto. M\u00ednimo } 0'3x_1 + 0'1x_2 = 8$$

80

$$x_1 = 10$$

$$60 \quad x_2 = 50$$

40

20

-20 0 20 40 60 80 100

Debe comprar 10 uni. de A y 50 de B, y el gasto ser\u00e1 de 18.000 pts

Ejercicio: Minimizar $Z = 5x_1 + 10x_2$, sujeto a las siguientes restricciones.

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$3x_1 \geq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 5 \quad 2x_1 + 4x_2 = 8 \quad 3x_1 = 9$$

$$x_1 = 0:: \gg x_2 = 5 \quad x_1 = 0:: \gg x_2 = 2 \quad x_1 = 9/3 = 3$$

$$x_2 = 0:: \gg x_1 = 5 \quad x_2 = 0:: \gg x_1 = 4$$

$$Z = 5x_1 + 10x_2$$

$$Pte = -10/2 = -2$$

$$10$$

$$8$$

$$6$$

$$4$$

$$2 \text{ Pto. M\u00ednimo}$$

$$-6 \ -4 \ -2 \ 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$\text{Min Pto } (5,0)$$

$$x_2 = 0$$

2. Algoritmo de Simplex.

Es un m\u00e9todo matricial que permite resolver problemas de programaci\u00f3n lineal con cualquier n\u00famero de variables.

$$\text{Max } Z \text{ Min } Z$$

$$\text{Max } Z = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n$$

S.A:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2$$

.

.

.

.

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n \leq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$X_1$$

$$(C_1 \ C_2 \dots C_n) \cdot X_2 \text{ Max } Z = C \cdot X$$

.

.

Xn

a11 a12.....a1n x1 b1

a21 a22.....a2n x2 b2

· · <= · **A**·**X**<=**B**

· · ·

· · ·

an1 an2.....ann xn bn

Algoritmo.

Antes de aplicar el algoritmo, hay que transformar todas aquellas restricciones que tengan forma de desigualdad en igualdades, añadiendo las denominadas variables de holgura.

a11·x1 + a12·x2 +..+ a1n·xn + **u1** = b1

a21·x1 + a22·x2 +..+ a2n·xn + **u2** = b2

.

.

.

.

an1·x1 + an2·x2 +...+ ann·xn + **un** = bn

Tabla Inicial del Simplex:

Se escriben todas las variables y a continuación las de holgura:

X1	X2		Xn	U1	U2		Um	
a11	a12		a1n	1	0		0	b1
a21	a22		a2n	0	1		0	b2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
an1	an2		ann	0	0		1	bn
C1	C2		Cn	0	0		0	

SUPUESTO DE PARTIDA.

Se parte desde el punto (0,0)

Variables básicas (antes eran las de holgura).

$$b1 = U1$$

$$b2 = U2$$

$$b_n = U_n$$

Pasos para llegar al Óptimo:

1º. Localizar el elemento positivo mayor de la última fila. Este nos indicará cual será la variable entrante en la base (se marca con un triángulo).

X2

.

.

.

C2

2º. Se obtiene todos los cocientes resultantes de dividir el valor de la última columna entre el elemento de su misma fila correspondiente a la columna marcada en el paso 1. De entre estos valores se elige el menor de todos que sea positivo y nos indicará cual es la Variable Saliente de la base. El elemento en que se corten la Variable Entrante con la Variable Saliente, será el elemento pivote de la tabla.

$$b1 / a_{12} = 5$$

$$b2 / a_{22} = 2 \text{ Se elige el menor de los positivos.}$$

.

.

$$b_n / a_{n1} = 8$$

$$b2 = v2 ::> \text{Variable Saliente}$$

a₂₂

3º. Conseguir un pivote unidad. Para ello dividiré entre el pivote a toda la fila.

4º. Mediante operaciones elementales con las restantes filas, tomando fija la fila del elemento pivote, conseguir que en su columna los restantes elementos sean nulos.

$$F1' = F1 - a_{12} F2$$

Cambio de variables se introduce en el lugar de la Variable Entrante la Variable Saliente y viceversa.

5°. Comprobar si quedan elementos positivos en la fila inferior, tendríamos que iterar todo el proceso. en caso contrario significará que hemos llegado al óptimo, la solución se encontrará en:

$$b1 = U1$$

$$b2 = U2$$

Ejercicio'(Por el metodo del algoritmo de simples): Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B, para lo que dispone de una persona que trabaja 8 horas y de un total de 9 kg de material prima para fabricarlos. Se desea averiguar el número de productos a fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio por cada producto es de 2 y 3 respectivamente (medido en miles de pesetas). Además se conocen los datos referidos a las horas empleadas para cada producto y a la materia prima necesaria para cada uno de ellos.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 \text{ V. Saliente: } \mathbf{ROJO}$$

$$\text{V. Entrante: } \mathbf{AZUL}$$

$$\text{S.A.: } x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1°

$$x_1 + 2x_2 + U1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 + U2 = 9$$

X1	X2	U1	U2	
1	2	1	0	8=U1
3	1	0	1	9=U2
2	3	0	0	0=Z

$8/2 = 4$ Se coge este, por que es el menor positivo.

$$9/1 = 9$$

X1	X2	U1	U2	
1	1	1/2	0	4=U1
3	1	0	1	9=U2
2	3	0	0	0=Z

$$f1' = \frac{1}{2} \cdot f2$$

X1	X2	U1	U2	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	4=X2
$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	5=U2
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	-12=Z

$$f_2' = f_2 - f_1$$

$$f_3' = f_3 - 3f_1$$

X1	X2	U1	U2	
1/2	1	1/2	0	4=X2
5/2	0	-1/2	1	5=U2
1/2	0	-3/2	0	-12=Z

$$4/1/2 = 8$$

$$5/5/2 = 2$$

X1	X2	U1	U2	
1/2	1	1/2	0	4=X2
1	0	-1/5	2/5	2=U2
1/2	0	-3/2	0	-12=Z

$$f_2' = 2/5 \cdot f_2$$

X1	X2	U1	U2	
0	1	3/5	-1/5	3=X2
1	0	-1/5	2/5	2=X1
0	0	-7/5	-1/5	-13=Z

$$f_1' = f_1 - 1/2 \cdot f_2$$

$$f_3' = f_3 - 1/2 \cdot f_2$$

No debe producir A y debe producir 4 unidades de producto B y le sobrarán 5 Kg de recursos ociosos.

Ejercicio 1 (hoja): Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B. Las cajas de tipo A contienen 1 kg. de chocolate y 2 de cacao; las de tipo B contienen 2 kg. de chocolate, 1 kg. de cacao y 1 kg. de almendras. Disponemos de 500 kg. de chocolate, 400 de cacao y 225 de almendras. Por cada caja de tipo A se ganan 200 pts. y por cada caja de tipo B 300 pts. ¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?. Se pide resolver el problema a través del algoritmo de Simplex.

X1 ::» Número de cajas de bombones de tipo A.

X2 ::» Número de cajas de bombones de tipo B.

$$\text{MAX } Z = 200x_1 + 300x_2$$

$$\text{S.A: } x_1 + 2x_2 \leq 500 \text{ (chocolate)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 400 \text{ (cacao)}$$

$$x_2 \leq 225 \text{ (almendras)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + U_1 = 500$$

$$2x_1 + x_2 + U_2 = 400$$

$$x_2 + U_3 = 225$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

X1	X2	U1	U2	U3	
1	2	1	0	0	500
2	1	0	1	0	400
0	1	0	0	1	225
200	300	0	0	0	0

X1	X2	U1	U2	U3	
1	2	1	0	0	500=U1
2	1	0	1	0	400=U2
0	1	0	0	1	225= U3
200	300	0	0	0	0

V. Saliente: **ROJO** V. Entrante: **AZUL** Elemento Pivote: **VERDE**

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	1	0	-2	50=U1
2	0	0	1	-1	175=U2
0	1	0	0	1	225= X2
200	0	0	0	-300	-67500=Z

$$f_1' = f_1 - 2f_3$$

$$f_2' = f_2 - f_3$$

$$f_4' = f_4 - 300f_3$$

Como no he llegado al óptimo continuo.

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	1	0	-2	50= U1
2	0	0	1	-1	175=U2
0	1	0	0	1	225= X2
200	0	0	0	-300	-67500=Z

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	1	0	-2	50= X1
0	0	-2	1	3	75=U2
0	1	0	0	1	225= X2
0	0	-200	0	100	-77500=Z

$$f_2' = f_2 - 2f_1$$

$$f_4' = f_4 - 200f_1$$

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	1	0	-2	50=X1
0	0	-2	1	3	75=U2
0	1	0	0	1	225=X2
0	0	-200	0	100	-77500=Z

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	1	0	-2	50=X1
0	0	-2/3	1/3	1	75=U2
0	1	0	0	1	225=X2
0	0	-200	0	100	-77500=Z

$$f_2' = 1/3 \cdot f_2$$

X1	X2	U1	U2	U3	
1	0	-1/3	2/3	0	100=X1
0	0	-2/3	1/3	1	25=U3
0	0	2/3	-1/3	0	200=X2
0	0	-400/3	-100/3	0	-80000=Z

$$f_1' = f_1 + 2f_2$$

$$f_3' = f_3 - f_2$$

$$f_4' = f_4 - 100f_2$$

Solución: Se deben fabricar 100 cajas de tipo A y 200 cajas de tipo B, para que así el beneficio sea de 80.000 pts. Además tenemos un excedente de 25 kilogramos de almendras.

PROBLEMA DUAL.

Todo problema de maximización lleva asociado uno de minimización ,y viceversa, se dice que uno es el problema DUAL del otro.

PRIMAL DUAL

$$\text{MIN } Z = C \cdot X \quad \text{MAX } Z' = B_t \cdot Y$$

$$\text{S.A: } A \cdot X \geq B \quad \text{S.A: } A_t \cdot Y \leq C_t$$

$$X \geq 0 \quad Y \geq 0$$

Ejemplo:

Y1	Y2	U1	U2	
----	----	----	----	--

				50=Y1
				200=Y2
0	0	-10	-50	-300000=Z'

X1 X2

Las soluciones del PRIMAL se encuentran en la tabla final del DUAL debajo de las variables de holgura con el signo cambiado.

Hay un teorema que dice que la función objetivo es la misma para el PRIMAL que para el DUAL.

Zmin = Z'max

Ejercicio (Resuelto por DUAL): Un agricultor desea abonar su campo y sabe que precisa como mínimo 17 Kg de fósforo y 8 Kg de Nitrógeno. En la tienda donde va a comprar estas sustancias, disponen de dos productos, el producto A contiene un 20% de fósforo y un 30% de nitrógeno y cuesta 300 pts el Kg, y el producto B contiene un 30% de fósforo y 10% de nitrógeno y cuesta 300 pts.

¿Qué cantidad ha de comprar de cada producto para que su gasto sea mínimo?. Planteamiento y resolución.

Min C = 300x1 + 300x2 X1 = Kg de producto A

X2 = Kg de producto B

	PRODUCTO A	PRODUCTO B
FÓSFORO	0'2	0'3
NITRÓGENO	0'3	0'1

Min C = 300x1 + 300x2

S.A: 0'2x1 + 0'3x2 >= 17

0'3x1 + 0'1x2 >= 8

x1, x2 >= 0

DUAL

Max C' = 17y1 + 8y2

S.A: 0'2y1 + 0'3y2 <= 300

0'3y1 + 0'1y2 <= 300

y1, y2 >= 0

0'2y1 + 0'3y2 + U1 = 300 300/0'2 = 1500

0'3y1 + 0'1y2 + U2 = 300 300/0'3 = 100

y1, y2 >=0

Y1	Y2	U1	U2	
0'2	0'3	1	0	300=U1
0'3	0'1	0	1	300=U2
17	8	0	0	0=C'

V. Saliente: **ROJO** V. Entrante: **AZUL** Elemento Pivote: **VERDE**

Y1	Y2	U1	U2	
0'2	0'3	1	0	300=U1
1	1/3	0	10/3	1000=U2
17	8	0	0	0=C'

$$f2'=f1-10/3 \cdot f2$$

Y1	Y2	U1	U2	
0	7/30	1	-2/3	100=U1
1	1/3	0	10/3	1000=Y2
0	7/3	0	-170/3	-17000=C'

$$f1'=f1-2/10 \cdot f2$$

$$f3'=f3-17 \cdot f2$$

2ª Iteración.

Y1	Y2	U1	U2	
0	7/30	1	-2/3	100=U1
1	1/3	0	10/3	1000=Y2
0	7/3	0	-170/3	-17000=C'

Y1	Y2	U1	U2	
0	1	30/7	-20/7	3000/7=U1
1	1/3	0	10/3	1000=Y2
0	7/3	0	-170/3	-17000=C'

$$f1'=30/7 \cdot f1$$

Y1	Y2	U1	U2	
0	1	30/7	-20/7	3000/7=Y1
1	0	-10/7	90/21	6000/7=Y2
0	0	-10	-50	-18000=C'

$$f2'=f2-1/3 \cdot f1$$

$$f3'=f3-7/3 \cdot f1$$

X1 = 10 Kg. de producto A

X2 = 50 Kg. de producto B

Coste Mínimo = 18.000 u.m.

Ejercicio 2 (hoja): Una fabrica de neumáticos especiales decide estudiar cómo reducir sus costes de aprovisionamiento de materias primas para optimizar sus resultados. El departamento de fabricación estipuló que, en principio, necesitaba al menos una hora de trabajo-máquina y 5 kg. de materia prima para mantener el ritmo de la cadena de producción de acuerdo al ritmo de demanda previsto. El precio de la hora-máquina es de 3 u.m., y de 1 u.m. el kg. de materia prima, siendo los neumáticos fabricados de dos clases: de lluvia y para hielo.

Se pide: Averiguar qué cantidad de neumáticos de cada clase hay que producir para minimizar los costes de fabricación de acuerdo con la siguiente tabla:

	Hrs.-Máq	Kg.
HIELO	1	2
LLUVIA	1	1

X1 = Número de neumáticos de HIELO.

X2 = Número de neumáticos de LLUVIA.

Coste Neum. de HIELO = 1 Hrs-Máq · 3 u. m. + 2 kg. · 1 u.m. = 5

Coste Neum. de LLUVIA= 1 Hrs-Máq · 3 u. m. + 1 kg. · 1 u.m. = 4

MIN C = 5x1 + 4x2

S.A.: $x_1 + x_2 \geq 1$ Hor-Máq

$2x_1 + x_2 \geq 5$ kg

$x_1, x_2 \geq 0$

DUAL

MAX C' = $y_1 + 5y_2$

S.A.: $y_1 + 2y_2 \leq 5$

$y_1 + y_2 \leq 4$

$y_1, y_2 \geq 0$

$y_1 + 2y_2 + U_1 = 5$

$y_1 + y_2 + U_2 = 4$

$y_1, y_2 \geq 0$

Y1	Y2	U1	U2	
-----------	-----------	-----------	-----------	--

1	2	1	0	5=U1
1	1	0	1	4=U2
1	5	0	0	0=C'

V. Saliente: **ROJO** V. Entrante: **AZUL** Elemento Pivote: **VERDE**

Y1	Y2	U1	U2	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}=U1$
1	1	0	1	$4=U2$
1	5	0	0	$0=C'$

$$f1' = \frac{1}{2} \cdot f1$$

Y1	Y2	U1	U2	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}=Y1$
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}=U2$
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{25}{2}=C'$

$$f2' = f2 - f1$$

$$f3' = f3 - 5f1$$

X1 = 2'5 Neumáticos de HIELO

X2 = 0 Neumáticos de LLUVIA

2º. CUATRIMESTRE.

TEMA1. EL PROCESO ESTADÍSTICO.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

Es la parte de la estadística que a través de la acumulación de información, su análisis y síntesis permite describir el comportamiento de un fenómeno.

El objetivo formal de la descripción estadística es la masa estadística o población.

Sobre esa población que tenemos que definir es preciso elegir la característica desde la cual se quiere estudiar la población. De esta forma, la característica divide o clasifica a la población original en masas parciales o subpoblaciones estadísticas.

No siempre se puede hacer una investigación exhaustiva de la población y en ese caso tendremos que recurrir al sondeo o al estudio de la misma a través de una muestra que es un subconjunto del total de casos de la población, pero es imprescindible que la muestra sea representativa del total de casos de la población. Para el proceso de muestreo se suele hacer mediante tablas de números aleatorios, de forma que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de pertenecer a la muestra. Este proceso se conoce como MUESTREO ALEATORIO SIMPLE (M.A.S.).

Se denominan individuos o elementos poblacionales a todos los elementos que constituyen la población.

Los caracteres de un individuo pueden presentar dos o más modalidades que son las diferentes situaciones posibles de un carácter. Una propiedad de las modalidades de una misma característica es que deben ser incompatibles y exhaustivas, es decir, cada individuo presenta una y sólo una de las modalidades del carácter.

Tipos de Caracteres o Características.

Se distinguen entre características cualitativas y cuantitativas.

a) Características Cualitativas: Son las que expresan una cualidad que generalmente no tiene representación numérica.

También se las denomina Atributos, y clasifican a la población en categorías. Ejemplo:

MORENO

Color RUBIO

de CASTAÑO

Pelo PELIRROJO

b) Características Cuantitativas: Son las que permiten asignar a cada elemento de la población un número real.

Se las denomina también Variables Estadísticas, pueden ser de tipo Discreto o de tipo Continuo.

Variables Estadísticas Discretas: Aquellas que solo pueden tomar valores numéricos enteros. Ejemplo:

1

2

Nº de hijos 3

4

5

Variables Estadísticas Continuas: Son aquellas en las que la variable tiene la posibilidad de adoptar cualquier número real. En general son continuas todas las variables relacionadas con tiempo, longitudes, volúmenes, etc... .

Ejemplo:

LONGITUD DE SALTO	
Menos de 5	Se denominan Limite Inferior y Limite Superior a sus extremos.
5 – 5'5	
[5'5 – 6'0)*	*Si se diera el caso de que una longitud fuese 5'5 se colocaría aquí.
6'0 – 6'5	
6'5 – 7'0	
7'0 – 7'5	

7'5 – 8'0
8'5 – 9'0
Mas de 9'0

Cuando estamos trabajando con variables de naturaleza continua es preciso agrupar los infinitos valores que pueden tomar la variable mediante intervalos de clase. Estos intervalos pueden ser, o tener, de amplitud constante o variable.

TEMA2. SERIES Y ESTADISTICAS.

1. Tablas de Distribución de Frecuencias.

a) Datos sin agrupar.

El examen de los elementos de una muestra, o toma de datos, da lugar a una serie de valores adoptados por la variable, en el orden en el que se van obteniendo. Seguidamente si el rango o recorrido de la variable no es excesivamente grande, los valores se colocan por orden de magnitud creciente, en forma de Tabla de Distribución de Frecuencias.

VALORES DE LA VARIABLE	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS	FRECUENCIA PORCENTUAL	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
X_i	n_i	$f_i = n_i / N$	$P_i = f_i * 100$	N_i	F_i
X_1	n_1	$f_1 = n_1 / N$	P_1	$N_1 = n_1$	$F_1 = f_1$
X_2	n_2	$f_2 = n_2 / N$	P_2	$N_2 = n_1 + n_2$	$F_2 = f_1 + f_2$
X_3	n_3	$f_3 = n_3 / N$	P_3	$N_3 = n_1 + n_2 + n_3$	$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
X_n	n_n	$f_n = n_n / N$	P_n	$N_n = n_i = N$	$F_n = f_i = 1$

b) Datos Agrupados.

Si el tamaño de la muestra es grande o si L_i , variable definida, es de tipo continuo, los datos suelen agruparse mediante intervalos de clase y será necesario crear una columna en la que aparezcan las marcas de clase que son la semisuma de los límites del intervalo.

INTERVALOS DE CLASE	MARCAS DE CLASE X_i
$l_1 - L_1$	$l_1 - L_1 / 2$
$l_2 - L_2$	$l_2 - L_2 / 2$
$l_3 - L_3$	$l_3 - L_3 / 2$
.	.
.	.
.	.

$\ln - L_n$	$\ln - L_n / 2$
-------------	-----------------

Ejercicio 1: En una clase de 20 alumnos el número de asignaturas aprobadas por cada uno de ellos fue: 3, 6, 7, 7, 3, 7, 5, 5, 4, 5, 7, 5, 7, 7, 3, 4, 2, 7, 6, 1.

Xi	ni	fi	pi	Ni	Pi
1	1	0'05	5	1	5
2	1	0'05	5	2	10
3	3	0'15	15	5	25
4	2	0'10	10	7	35
5	4	0'20	20	11	55
6	2	0'10	10	13	65
7	7	0'35	35	20	100
ni = 20		fi = 1	pi = 100		

Ejercicio 2: Para estudiar el peso de los estudiantes de una Universidad, se ha elegido una muestra de tamaño 30 cuyos pesos en Kg son: 72, 64, 53, 58, 66, 70, 78, 54, 63, 56, 58, 64, 72, 64, 68, 55, 67, 57, 61, 67, 61, 58, 69, 54, 62, 56, 62, 57, 51, 73.

Construir una tabla de distribución de frecuencias con intervalos de amplitud 5.

Intervalos	Xi	ni	fi	pi	Ni
50-55	52'5	4	0'13	13'3	4
55-60	57'5	8	0'26	26'6	12
60-65	62'5	8	0'26	26'6	20
65-70	67'5	5	4'16	41'6	25
70-75	72'5	4	0'13	13'3	29
75-80	77'5	1	0'03	3'3	30
		ni = 30	fi = 1	pi = 100	

REPRESENTACIONES GRAFICAS.

A) Para Datos sin agrupar:

1. Diagrama de barras: En el eje de abscisas se señalan los valores de la variable, construyendo sobre estos unos segmentos verticales de longitud igual a cada una de sus frecuencias.

ni

n3

n2

n4

n1

n5

X1 X2 X3 X4 X5 Xi

2. Diagrama de Líneas: Se realiza uniendo mediante segmentos los puntos: (X1 , n1) (X2 , n2) (X3 , n3).

ni

n3

n2

n4

n1

n5

X1 X2 X3 X4 X5 Xi

B) Para Datos Agrupados:

1. Histogramas: Se marcan en el eje de abcisas los extremos de los intervalos de clase y sobre cada intervalo se construye un rectángulo cuya base coincide con la amplitud del intervalo y cuya altura es igual a la frecuencia de dicho intervalo.

Si la amplitud de los intervalos no fuera la misma en todos los intervalos, la altura de clase la tendríamos que calcular.

$$hi = ni / ai$$

ni

n3

n2

n4

n1

n5

[l0) l1 l2 l3 l4 l5 Xi

2. Polígonos de Frecuencias: Se obtiene al unir por segmentos los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del Histograma. Se debe prolongar la línea poligonal hasta las marcas de clase, inferior y superior, a los que figuran en el Histograma, para cerrar el polígono con el eje de abcisas.

ni

n3

n2

n4

n1

n5

10 11 12 13 14 15 X_i

C) Otras Representaciones Gráficas:

1. Pictogramas: Se utilizan dibujos para representar la variable, no son precisos.

2. Cartogramas: Lo mismo que el anterior pero en vez de con dibujos con colores, se utilizan cuando se está estudiando sobre mapas.

3. Diagrama de Vectores: Es aquel que asigna a un sector de un círculo proporcional a la frecuencia del dato, se utiliza en pocas categorías.

Ejercicio 3: En las elecciones de un país han sido elegidos 200 candidatos de los partidos A, B, C y D.

PARTIDOS	VOTOS
A	90
B	65
C	30
D	15

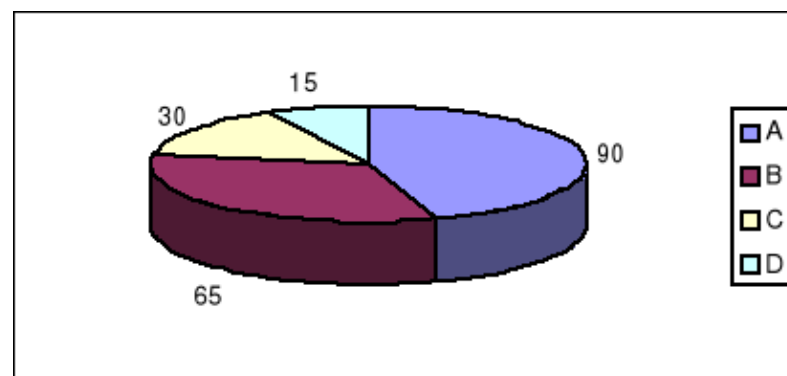
200-----360° 200-----360° $X=162^\circ$ A $X=117^\circ$ B

90-----X 65-----X

200-----360° 200-----360°

$X=54^\circ$ C $X=27^\circ$ D

30-----X 15-----X



4. Polígonos Acumulativos (Ojivas): Se utilizan para representar frecuencias acumuladas, es una línea poligonal creciente.

Datos sin agrupar:

n_i

n_4

n_3

n_2

n_1

$X_1 X_2 X_3 X_4 X_i$

Datos agrupados:

n_i

n_3

n_2

n_1

$X_1 X_2 X_3 X_i$

n_i

n_5

n_4

n_3

n_2

n_1

$l_0 l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 X_i$

TEMA3. MEDIDAS DE POSICIÓN O DE TENDENCIA CENTRAL.

Son valores alrededor de los cuales se agrupan los valores de la variable y que en muchos casos se toman como representantes de la distribución.

A) Datos sin Agrupar:

1. Media Aritmética Simple: Es la suma de los valores adoptados por la variable dividida por el número de ellos.

x_i

$\bar{x} =$

N

Ejercicio 1: En un curso hay 8 chicos y 6 chicas, la nota final de curso fue:

Chicos: 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7.

Chicas: 3, 4, 5, 6, 7, 8.

$2+3+4+5+6+6+7+7$

Media de los chicos $x = 5$

8

$3+4+5+6+7+8$

Media de las chicas $x = 5.5$

6

2. Media de Medias: Si n_1 datos tiene por media el valor x_1 media, n_2 tienen por media x_2 y n_n tiene por media x_n .

$n_1 \dots \dots \dots x_1$

$\cdot x_i \cdot n_i$

$n_2 \dots \dots \dots x_2 \quad x =$

$\cdot n_1 + n_2 + n_3 \dots \dots n_n$

$\cdot$

$\cdot$

$n_n \dots \dots \dots x_n$

N

Ejercicio 2: En 4 institutos se ha calculado el peso medio de los estudiantes, en el instituto A, que tiene 120 alumnos, el peso medio es 62'4 Kg; en el B, con 140 alumnos, el peso medio es 59'5 Kg; en el C, con 90 alumnos, el peso medio es 64'2 Kg y en el D, con 130 alumnos el peso medio es 56 Kg.

120 62'4

140 59'5 $x =$

90 64'2

130 56

480

$$(62'4 \cdot 120) + (59'5 \cdot 140) + (64'2 \cdot 90) + (56 \cdot 130)$$

$$x = = \mathbf{60'2 \text{ Kg.}}$$

780

*****FALTA ALGO*****

3. Media Aritmética Ponderada:

Ejercicio 3: Al principio de un curso se especifica a los alumnos que realizaran 3 exámenes parciales y un final. El segundo parcial tendrá una importancia doble que el primero, el tercero doble que el segundo y el final triple que el tercero. Un alumno obtiene un 10 en el primer parcial, 7 en el segundo, 5 en el tercero y un 4'25 en el final. ¿Cuál será su nota final de curso?.

X1	X2	X3	X4
10	7	5	4'25
P1	P2	P3	P4
p	2p	4p	12p

$$(10 \cdot p) + (7 \cdot 2p) + (5 \cdot 4p) + (4'25 \cdot 12p) \quad 95p$$

$$x = = = \mathbf{5}$$

$$p + 2p + 4p + 12p \quad 19p$$

B) Datos Agrupados en Intervalos:

1.- La suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de números respecto de su media aritmética es 0.

3 6 8 10 18

$$x_i \quad 3+6+8+10+18 \quad 45$$

$$x = = = \mathbf{9}$$

n 5 5

$$(3-9) + (6-9) + (8-9) + (10-9) + (18-9) = -6-3-1+1+9 = -10+10 = \mathbf{0}$$

2. Si suponemos, antes de calcularla que la media de un conjunto de números es cualquier valor A resulta que la verdadera media aritmética sería:

d

$$x = A +$$

N

Desviaciones de cada observación respecto de la media, partido por el número de observaciones.

$$(3-7)+(6-7)+(8-7)+(10-7)+(18-7) -4-1+1+3+11 \quad 10$$

$$x = 7+ = 7+ = 7+ = 7+2 = 9$$

5 5 5

METODOS PARA CALCULAR LA MEDIA.

1.- Método Directo: Consiste en aplicar la formula de la media ponderada con la única salvedad de que se toman como valores representativos de la variable, las marcas de clase de cada intervalo.

$$X_m \cdot n_i$$

$$x =$$

$$N = n_i$$

X_m : Marcas de clase. n_i : Frecuencia de cada intervalo.

Ejemplo:

Intervalos	n_i	X_m	$X_m \cdot n_i$
10-14	1	12	12
14-18	7	16	112
18-22	10	20	200
22-26	16	24	384
26-30	9	28	252
30-34	6	32	192
34-38	1	36	36
	50		1188

Ejercicio 4: En el ayuntamiento de cierto pueblo, se han obtenido los siguientes datos sobre el número de fincas agrícolas en relación con la superficie explotada. Se pide hallar la superficie media de explotación.

SUPERFICIE	Nº DE FINCAS
0-5	2
5-10	10
10-15	3
15-20	4
20-25	1

2.- Método Abreviado: Se basa en la segunda propiedad de la media aritmética. Consiste en elegir un intervalo en el que supuestamente está la media y tomar como valor de la media aproximada (A) la marca de clase de dicho intervalo.

$$d \cdot n_i$$

$$x = A +$$

N

Ejemplo:

Intervalos	ni	Xm	Xm·ni	d	d·ni
10-14	1	12	12	-12	-12
14-18	7	16	112	-8	-56
18-22	10	20	200	-4	-40
22-26	16	24	384	0	0
26-30	9	28	252	4	36
30-34	6	32	192	8	48
34-38	1	36	36	12	12
	50		1188		-12

$$d \cdot ni - 12$$

$$x = A + \frac{\sum d \cdot ni}{N} = 24 + \frac{-12}{50} = 23.76$$

N 50

3.- Método Clave: Es un método basado en el abreviado, y se utiliza solo cuando la amplitud es constante, se diferencia del método abreviado en que las 'd' en vez de representar desviaciones, son unos números enteros que expresan, el número de clases o intervalos, que hay desde la marca, considerada, a la marca que coincide con la media supuesta. A estos números se les asigna signo '-', si están por debajo de la media aproximada, y signo '+' si están por encima de ésta.

$$d \cdot ni$$

$$x = A + \frac{\sum d \cdot ni}{N}$$

N

Ejemplo:

Intervalos	ni	Xm	d	d·ni
10-14	1	12	-3	-3
14-18	7	16	-2	-14
18-22	10	20	-1	-10
22-26	16	24	0	0
26-30	9	28	1	9
30-34	6	32	2	12
34-38	1	36	3	3
	50			-3

d: Números enteros que me indican cuantas clases hay desde un intervalo hasta la media que yo he considerado como media supuesta.

$$d \cdot ni - 3$$

$$x = A + \cdot I = 24 + \cdot 4 = 24 - (0'24) = \mathbf{23'76}$$

N 50

Mediana: Ordena los datos en una distribución de menor a mayor, la mediana es el valor central de esa serie, es decir, el valor de la variable que deja 50% de la distribución a la izquierda y el otro 50% a la derecha.

a) Datos sin agrupar:

Serie: 5, 6, 9, 11, **15**, 19, 23, 26, 27 El 15 sería la mediana

m+1 10

Posición: = = 5

2 2

Serie: 5, 7, 10, **15, 20**, 21, 24, 27 El 15 y el 20 serían la mediana

15+20

Me = = **17'5**

2

m+1

Posición: = **4'5**

2

Serie: 3, 4, **4, 4**, 6, 8 El 4 y el 4 serían la mediana

m+1 7

Posición: = = **3'5**

2 2

4 4 4

3'5 3'83 4'16 4'5

1/3 = 0'33 Me= **4'16**

Serie: 5, 6, 8, **8, 8, 8**, 10, 12, 13 El 8 el 8 y el 8 serían la mediana

m+1

Posición: = 5

2

8 8 8 8

7'5 7'75 8 8'25 8'5

8+8'25

$1/4 = 0'25$ Me = **8'125**

2

Ejemplo:

Xi	ni	Ni
1	5	5
2	7	12
3	6	18
4	12	30
5	20	50
6	15	65
7	11	76
8	6	82
9	5	87
10	2	89
	89=N	

I N 89

Me = $l + \frac{-f_i}{-f_i} = 44'5$

fMe 2 2

5

4'5 5'5

Me = $4'5 + \frac{1}{20}(44'5 - 30) = 5'225$

Moda: Valor de la variable que se presenta con mayor frecuencia. El calculo de la moda, para datos sin agrupar, es directo.

Ejemplo:

Serie: 2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8 Mo = 6

Bimodal: Tiene dos modas.

Trimodal: Tiene 3 modas.

Ejemplos gráficos:

ni ni

Mo Xi Mo1 Mo2 Xi

Datos Agrupados:

1

$$Mo = l + \cdot I$$

1 + 2

I: Límite inferior del intervalo modal.

1: Diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de la clase contigua inferior

2: Diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de la clase contigua superior.

I: Amplitud del intervalo modal.

Ejemplo:

CLASES	ni	
10-20	11	
20-30	14	
30-40	21	1= 30-21 = 9
40-50	30	
50-60	18	2= 30-18 = 12
60-70	10	
70-80	7	
80-90	3	

1 9

$$Mo = l + \cdot I = 40 + \cdot 10 = \mathbf{44'28}$$

1 + 2 9+12

RELACION EMPÍRICA ENTRE X, Me Y Mo.

Existe una relación empírica o de tipo experimental, entre las tres medidas de tendencia central más importantes. Esta relación viene expresada por la siguiente igualdad:

$$X - Mo = 3(X - Me)$$

Esta relación se verifica con tanta mayor exactitud cuanto más simétrica sea la distribución.

Cuando una distribución es asimétrica se verifica que:

$$\mathbf{X = Me = Mo}$$

Asimetría Positiva:

Mo Me X

$$\mathbf{Mo < Me < X}$$

Asimetría Negativa:

X Me Mo

$$\mathbf{Mo > Me > X}$$

Ejemplo:

CLASES	ni	d	d·ni	Ni
10-20	11	-3	-33	11
20-30	14	-2	-28	25
30-40	21	-1	-21	46
40-50	30	0	0	76
50-60	18	1	18	94
60-70	15	2	30	101
70-80	7	3	21	116
80-90	3	4	12	119
	119		-1	

$$d \cdot ni - 1$$

$$x = A + \cdot I = 45 + \cdot 10 = \mathbf{44'91}$$

N 119

I N 10

$$Me = l + -fi = 40 + (59'5 - 46) = \mathbf{44'5}$$

fMe 2 30

1 9

$$Mo = l + \cdot I = 40 + \cdot 10 = \mathbf{44'28}$$

1 + 2 9+12

$$\mathbf{X - Mo = 3(X - Me)}$$

$$3Me - Mo (3 \cdot 44'5) - 44'28$$

$$x = = = \mathbf{44'61}$$

2 2

$$2X - Mo = (2 \cdot 44'91) - 44'28$$

$$Me = = = 44'7$$

$$3 \cdot 3$$

$$Mo = 3Me - 2X = 3 \cdot (44'5) - 2 \cdot (44'91) = 43'68$$

REALES	EMPIRICOS
$X = 44'91$	$X = 44'61$
$Me = 44'5$	$Me = 44'7$
$Mo = 44'28$	$Mo = 43'68$

$$Mo < Me < X$$

La distribución es ligeramente asimétrica positiva.

OTRAS MEDIDAS DE POSICIÓN: CUANTILES.

Son una generalización del concepto de mediana, pero así como la mediana divide a la serie estudiada en dos partes iguales, con el mismo número de elementos cada una, si la distribución se divide en cuatro partes, o en diez partes, o en cien partes tendríamos:

– Cuartiles (4)

– Deciles (10)

– Percentiles (100)

CUARTILES.

I N

$$Q1 = l + \frac{-f_i}{f_{Q1} - f_i}$$

$$f_{Q1} = 4$$

$$Q2 = Me$$

I 3N

$$Q3 = l + \frac{-f_i}{f_{Q3} - f_i}$$

$$f_{Q3} = 4$$

DECILES

I N

$$D1 = l + \frac{-f_i}{f_{D1} - f_i}$$

$$f_{D1} = 10$$

$$D5 = Q2 = Me$$

I 10N

$$D9 = l + -fi$$

fD9 10

PERCENTIL.

I N

$$P1 = l + -fi$$

fP1 100

$$P25 = Q1$$

$$P50 = D5 = Q2 = Me$$

$$P75 = Q3$$

I 99N

$$P99 = l + -fi$$

fP99 100

Ejercicio 5: Hallar Q1, Q3, D2, D7, P8, P62.

	CLASES	ni	Ni
	20-25	5	5
P8	25-30	9	14
D2 Q1	30-35	14	28
	35-40	20	48
D7 Q3	40-45	26	74
	45-50	18	92
	50-55	7	99
	55-60	11	110
		110=N	

I N

$$Q1 = l + -fi = 30 + 5/14 (27'5-14) = \mathbf{34'82} \text{ fQ1 4}$$

I 3N

$$Q3 = l + -fi = 45 + 5/18 (82'5-74) = \mathbf{47'36}$$

fQ3 4

I 2N

$$D2 = l + -fi = 30 + 5/14 (22-14) = \mathbf{32'85}$$

fD2 10

I 7N

$$D7 = l + -fi = 45 + 5/18 (77-74) = \mathbf{45'83}$$

fD7 10

I 8N

$$P8 = l + -fi = 25 + 5/9 (8'8-5) = \mathbf{27'14}$$

fP8 100

I 62N

$$P62 = l + -fi =$$

fP62 100

MEDIA GEOMETRICA.

Es otra medida de tendencia central. Se utiliza en vez de la Media Aritmética para evitar la distorsión que puede darse en la media cuando la frecuencia de los valores extremos es alta. También se utiliza cuando es conveniente trabajar con escalas logarítmicas.

Ejemplo Calificar de 0 a 10. El 0 y el 10 serían los valores extremos.

A) Datos sin Agrupar:

$$X_6 = X_1, X_2, \dots, X_n$$

Ejemplo:

$$\text{Serie } 5, 6, 8, 10 \quad X = 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = \mathbf{6'99}$$

$$\log X_i$$

$$\log X_G =$$

$$n$$

$$\text{Ejemplo } \log X_G = 1'55 \quad X_G = \text{antilog } 1'55$$

B) Datos Agrupados:

$$\log X_m \cdot n_i$$

$$\log XG =$$

n

Ejemplo:

CLASES	ni	Xm	log Xm	log Xm·ni
20-25	5	22'5	1'35	6'75
25-30	9	27'5	1'44	12'96
30-35	14	32'5	1'51	21'14
35-40	20	37'5	1'57	31'4
40-45	12	42'5	1'63	19'56
	60			91'81

$$\log X_m \cdot n_i \ 91'81$$

$$\log XG = = = 1'53$$

$$n \ 60$$

$$\log XG = 1'53$$

$$XG = \text{antilog } 1'53$$

$$XG = 33'9$$

MEDIA CUADRÁTICA.

A) Datos sin Agrupar:

$$X_i^2$$

$$XC = X^2 =$$

n

La raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores de la serie.

B) Datos Agrupados:

$$X_m^2 \cdot n_i$$

$$XC =$$

N

MEDIA ARMONICA.

A) Datos sin Agrupar:

La inversa de la media aritmética de los inversos de los valores de la variable.

N

XH =

$1/X_i$

B) Datos Agrupados:

N

XH =

$1/X_m \cdot n_i$

Siempre se verifica que la $X_H \leq X_G \leq X$

TEMA4. MEDIDAS DE DISPERSION.

1ª SEMANA	2ª SEMANA
10	30
20	40
30	50
50	50
60	60
80	60
100	60
350	350

La dispersión mide cuanto se dispersan, en media, los datos de una distribución respecto una media de tendencia central.

X X

Dispersión muy alta Dispersión baja

Además la dispersión sirve para explicarnos como se comportan los datos respecto de la media de tendencia central

MEDIDAS DE DISPERSIÓN MAS UTILIZADAS.

Rango Semiintercuartílico: Es la semidiferencia entre el tercer y el primer cuartil.

$Q_3 - Q_1$

Q =

2

Esta medida tiene el inconveniente de que sólo se fija en el 50% de las observaciones y además desprecia los valores extremos, por lo que su uso debe ir acompañado de la medida del rango o recorrido de la variable.

Se suele recomendar su uso cuando la medida de posición más representativa sea la mediana; también cuando trabajemos con una distribución que presente concentración de valores alrededor de algún valor central.

Q1 Me Q3 X1

Ejercicio 1: Calcular el rango semiintercuartílico.

	CLASES	Ni	Ni
	20-25	3	3
	25-30	5	8
Q1	30-35	10	18
	35-40	18	36
	40-45	24	60
Q3	45-50	20	80
	50-55	13	93
	55-60	7	100
		100	

I

$$Q1 = l + (N/4 - fi) = 35 + 5/18 (25-18) = \mathbf{36'9} \text{ fQ1}$$

I

$$Q3 = l + (3N/4 - fi) = 45 + 5/20 (75-60) = \mathbf{48'75} \text{ fQ3}$$

$$Q3 - Q1 \text{ } 48'75 - 36'9$$

$$Q = = = \mathbf{5'92}$$

2 2

$$Rg = 60-20 = 40$$

Desviación Media: Es la media aritmética de las desviaciones de cada uno de los valores de los valores de la variable con respecto a una media de tendencia central de la distribución.

A) Datos sin Agrupar:

Xi

X =

N

|Xi - X|

DM =

N

B) Datos Agrupados:

$$|X_m - X| \cdot n_i$$

$$DM =$$

$$N$$

Ejemplo con Datos sin Agrupar:

X_i	$ X_i - X $
2	3
2	3
4	1
4	1
4	1
5	0
6	1
7	2
8	3
8	3
	18

$$|X_i - X| \cdot 18$$

$$DM = = = 1'8$$

$$N \cdot 10$$

$$X_i \cdot 50$$

$$X = = = 5$$

$$N \cdot 10$$

Ejemplo con Datos Agrupados:

CLASES	n_i	X_m	$X_m \cdot n_i$	$ X_m - X $	$d \cdot n_i$
16-20	2	18	36	16'72	33'44
20-24	8	22	176	12'72	101'76
24-28	8	26	208	8'72	69'76
28-32	18	30	540	4'72	84'96
32-36	20	34	680	0'72	14'40
36-40	18	38	684	3'28	59'04
40-44	15	42	630	7'28	109'20
44-48	8	46	368	11'28	90'24
48-52	3	50	150	15'28	45'84

	100		3472		608'64
--	-----	--	------	--	--------

$$X_m \cdot n_i \quad 3472$$

$$X = = = 34'72$$

$$N \quad 100$$

$$|X_m - X| \cdot n_i \quad 608'64$$

$$DM = = = \mathbf{6'086}$$

$$N \quad 100$$

Desviación Típica y Varianza.

Desviación Típica: Es la medida de dispersión más importante, por que en ella se basan muchos cálculos estadísticos.

Es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución.

A) Datos sin Agrupar:

$$(X_i - X)^2$$

$$S =$$

$$N$$

B) Datos Agrupados:

$$(X_m - X)^2 \cdot n_i$$

$$S =$$

$$N$$

Ejemplo para Datos sin Agrupar:

X_i	X_i - X	(X_i - X)²
5	-5'2	27'04
8	-2	4'84
10	-0'2	0'04
12	1'8	3'24
16	5'8	33'64
		68'8

$$X_i$$

$$X = = 10'2$$

N

$$(X_i - \bar{X})^2$$

$$S = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N} = \frac{13'76}{5} = 3'71$$

N

Para los Datos Agrupados hay otros métodos más rápidos, por ejemplo, el Método Clave de la media aritmética. Para poder aplicar el Método Clave de la desviación típica, los intervalos tienen que tener amplitud constante.

$$d^2 \cdot n_i$$

$$S = \frac{\sum d^2 \cdot n_i}{N} - \left(\frac{\sum d \cdot n_i}{N}\right)^2$$

N

Ejemplo para Datos Agrupados:

CLASES	ni	d	d ²	d ² · ni	d · ni
150-155	3	-4	16	48	-12
155-160	6	-3	9	54	-18
160-165	12	-2	4	48	-24
165-170	18	-1	1	18	-18
170-175	25	0	0	0	0
175-180	17	1	1	17	17
180-185	10	2	4	40	20
185-190	7	3	9	63	21
190-195	4	4	16	64	16
195-200	1	5	25	25	5
	103			377	7

$$S = \frac{377}{103} - \left(\frac{7}{103}\right)^2$$

$$S = 3'66 - 0'005 = 3'66$$

$$S = 3'66$$

Varianza: Es el cuadrado de la desviación típica de la distribución.

A) Datos sin Agrupar:

$$(X_i - \bar{X})^2$$

$$V = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N}$$

N

B) Datos Agrupados:

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot n_i \cdot d \cdot n_i^2$$

$$V = \frac{I_2}{I_1} \cdot \dots$$

$$\frac{N}{N} \cdot \frac{N}{N}$$

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN, MOMENTOS.

Se define Momento de orden r con respecto a un punto A , a la media de las desviaciones de los valores de la variable con respecto a ese punto A , elevadas a la potencia r .

Dependiendo de cual sea el punto A que tomemos como referencia para el calculo de las desviaciones, podemos distinguir entre:

1. Momentos con respecto al origen: ($A = 0$)

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$$

2. Momentos con respecto a la media: ($A = \bar{X}$)

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m_r$$

3. Momentos con respecto a cualquier punto A

$$m'_0, m'_1, m'_2, \dots, m'_r$$

A) Datos sin Agrupar:

$$\sum (X_i - 0)^r \cdot X_i \cdot r$$

$$1. a_r = \frac{1}{N} \sum X_i^r$$

$$\frac{N}{N}$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^r$$

$$2. m_r = \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^r$$

$$\frac{N}{N}$$

$$\sum (X_i - A)^r$$

$$3. m'_r = \frac{1}{N} \sum (X_i - A)^r$$

$$\frac{N}{N}$$

B) Datos Agrupados:

$$\sum X_{mr} \cdot n_i$$

$$1. a_r = \frac{1}{N} \sum X_{mr}^r \cdot n_i$$

N

$$(X_m - X)r \cdot n_i$$

$$2. m_r =$$

N

$$(X_m - A)r \cdot n_i$$

$$3. m'_r =$$

N

$$X_i^0 N$$

$a_0 = 1$ El momento de orden 0 respecto del origen

N siempre es 1.

$$X_i$$

$a_1 = X$ El momento de orden 1 con respecto al origen siempre es

$$N X.$$

$$X_i^2$$

$a_2 =$ El momento de orden 2 con respecto al origen siempre es X^2 .

N

$$X_i^3$$

$$a_3 =$$

N

.

.

.

$$(X_i - X)^0 N$$

$$m_0 = 1$$

N N

$$(X_i - X)^1 0$$

$$m_1 = 0$$

$$\frac{1}{N}$$

$$(X_i - \bar{X})^2$$

$$m_2 = V = S^2$$

$$\frac{1}{N}$$

$$(X_i - \bar{X})^3$$

$$m_3 =$$

$$\frac{1}{N}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$(X_i - A)^0$$

$$m'_0 = 1$$

$$\frac{1}{N}$$

$$(X_i - A)^1$$

$$m'_1 =$$

$$\frac{1}{N}$$

Formula de los Momentos por el Método Clave.

$$d \cdot n_i$$

$$m'_r = I_r \cdot d = I_r \cdot$$

$$\frac{1}{N}$$

Relación entre Momentos.

$$m_2 = m'^2_2 - m'^2_1$$

$$m_3 = m'^3_3 - 3m'_1 \cdot m'^2_2 + 2m'^3_1$$

Ejercicio 2: Calcular los Momentos con respecto de la media hasta orden 3.

CLASES	n_i	d	$d \cdot n_i$	$d^2 \cdot n_i$	$d^3 \cdot n_i$
12-16	1	-3	-3	9	-27
16-20	4	-2	-8	16	-32
20-24	7	-1	-7	7	-7

24-28	14	0	0	0	0
28-32	8	1	8	8	8
32-36	5	2	10	20	40
36-40	4	3	12	36	108
40-44	2	4	8	32	128
	45		20	128	218

$d \cdot n_i$

$$m'1 = I \cdot = 4 \cdot 20/45 = \mathbf{1'77}$$

N

$d2 \cdot n_i$

$$m'2 = I2 \cdot = 16 \cdot 128/45 = \mathbf{45'51}$$

N

$d3 \cdot n_i$

$$m'3 = I3 \cdot = 64 \cdot 218/45 = \mathbf{4'84}$$

N

$$m2 = m'2 - m'1^2 = 45'51 - (1'77)^2 = \mathbf{42'35 = V}$$

$$m3 = m'3 - 3m'1 \cdot m'2 + 2m'1^3 = 4'84 - (3 \cdot 1'77 \cdot 45'51) + 2(1'77)^3 = \mathbf{79'43}$$

MEDIDAS DE ASIMETRIA Y APUNTAMIENTO.

Asimetría de la distribución:

La medida de la asimetría de una distribución se denomina SESGO.

Si la curva de frecuencias de una distribución es más larga a la derecha del máximo de la curva, que a la izquierda, se dice, que la distribución está sesgada a la derecha, o que tiene SESGO positivo. En caso contrario se dice que tiene SESGO negativo.

Ejemplo de SESGO positivo:

n_i

MAX

Mo

Ejemplo de SESGO negativo:

n_i

MAX

Mo

Para medir el SESGO.

Coefficiente de Pearson:

$\sum (X - Mo)$

$P1 =$

S

$3(\sum (X - Me))$

$P2 =$

S

SESGO en función de los momentos.

m_3

$Sm =$

S_3

Ejercicio 3: Calcular los coeficientes de asimetría P1, P2, Sm.

CLASES	ni	Xm	Xm · ni	Ni	(Xm-X) ²	(Xm-X) ² · ni
100-110	4	105	4120	4	1622'96	6491'84
110-120	7	115	805	11	917'24	6420'69
120-130	18	125	2250	29	411'52	7407'39
130-140	32	135	4320	61	105'802	3385'65
140-150	26	145	3770	87	0'082	2127
150-160	21	155	3255	108	94'36	1981'59
160-170	16	165	2640	124	388'64	6218'26
170-180	10	175	1750	134	882'92	8829'21
180-190	4	185	740	138	1577'202	6308'808
190-200	2	195	390	140	2471'48	4942'96
	140		20340			51988'571

METODO DIRECTO:

$\sum (X - Mo)$

$P1 =$

S

$$3(X - Me)$$

$$P2 =$$

$$S$$

$$X_m \cdot n_i 20340$$

$$X = = = 145'286$$

$$N 140$$

$$I$$

$$Me = l + \cdot (N/2 - fi) = 140 + 10/26 \cdot (70-61) = 143'46$$

$$fMe$$

$$1 14$$

$$Mo = l + \cdot I = 130 + \cdot 10 = 137$$

$$1 + 2 14+6$$

$$(X_m - X)^2 \cdot n_i 51988'571$$

$$S = = = 19'27 \text{ Desviación Típica.}$$

$$N 140$$

$$145'28 - 137$$

$$P1 = = 0'43$$

$$19'27$$

$$P = P1 - P2 = \mathbf{0'15}$$

$$3(145'286-143'46) \text{ Asimetría Positiva.}$$

$$P2 = = 0'28$$

$$19'27$$

$$X - Mo = 3(X - Me)$$

$$m3 1852'79$$

$$S_m = = = \mathbf{0'25}$$

$$S3 7155'585$$

$$(X_m - X)^3 \cdot n_i$$

$$m_3 = = 1852'79$$

N

METODO CLAVE.

CLASES	ni	d	d · ni	d ² · ni	d ³ · ni
100-110	4	-4	-16	64	-256
110-120	7	-3	-21	63	-189
120-130	18	-2	-36	72	-144
130-140	32	-1	-32	32	-32
140-150	26	0	0	0	0
150-160	21	1	21	21	21
160-170	16	2	32	64	128
170-180	10	3	30	90	270
180-190	4	4	16	64	256
190-200	2	5	10	50	250
	140		4	520	304

$$d \cdot n_i \quad 4$$

$$X = A + \cdot I = 145 + = \mathbf{145'28}$$

N 140

La Media y la Moda son igual que en el Método Directo.

$$d^2 \cdot n_i \quad d \cdot n_i \quad 2 \quad 520 \quad 4 \quad 2$$

$$S = I - = 10 \cdot - = \mathbf{19'27}$$

N N 140 140

$$d \cdot n_i$$

$$m'_1 = I \cdot d = I \cdot = 10 \cdot 4/140 = 0'28$$

N

$$d^2 \cdot n_i$$

$$m'_2 = I^2 \cdot d^2 = I \cdot = 100 \cdot 520/140 = 371'42$$

N

$$d^3 \cdot n_i$$

$$m'_3 = I^3 \cdot d^3 = I \cdot = 1000 \cdot 304/140 = 2171'42$$

N

$$m_3 = m'_3 - 3m'_1 \cdot m'_2 + 2m'_1{}^3 = 2171'42 - 3(0'28 \cdot 371'42) + 2(0'28)^3 = \mathbf{1852'79}$$

Sustituir en el SESGO.

Medidas de Apuntamiento.

El Apuntamiento de una distribución de frecuencias indica la mayor o menor altura del máximo central con respecto a la altura de la curva normal.

Para medir el apuntamiento se emplea la CURTOSIS. Según el grado de Apuntamiento las distribuciones se clasifican en:

LEPTOCURTICA: Tiene mayor Apuntamiento que la curva normal:

MESOCURTICA: Tiene Apuntamiento normal:

PLATOCURTICA: Tiene menor Apuntamiento que la curva normal.

Formas de medir la Curtosis.

Hay dos formas:

A) Curtosis en función de los cuantiles: Se utiliza el Coeficiente de Curtosis Percentílico.

Q

Se le denomina K1 =

$$P_{90} - P_{10}$$

B) Curtosis en función de los momentos: Se utiliza el Coeficiente de FISHER.

m4

Se le denomina K2 =

$$\frac{m_4}{s^4}$$

K2 > 0 Distribución LEPTOCURTICA.

K2 = 0 Distribución MESOCURTICA.

K2 < 0 Distribución PLATOCURTICA.

Ejercicio 4.

CLASES	ni	Ni	
100-110	4	4	
110-120	7	11	
120-130	18	29	P10

130-140	32	61	Q1
140-150	26	87	
150-160	21	108	Q3
160-170	16	124	
170-180	10	134	P90
180-190	4	138	
190-200	2	140	
	140		

I

$$Q1 = l + (N/4 - fi) = 130 + 10/32 (35-29) = 131'87$$

fQ1

I

$$Q3 = l + (3N/4 - fi) = 150 + 10/21 (105-87) = 131'87$$

fQ3

$$Q3 - Q1 \ 158'57 - 131'87$$

$$Q = = = 13'35$$

2 2

I

$$P10 = l + (10N/100 - fi) = 120 + 10/18 (14-11) = 121'66$$

fP10

I

$$P90 = l + (90N/100 - fi) = 170 + 10/10 (126-124) = 172$$

fP90

$$Q \ 13'35$$

$$K1 = = = \mathbf{0'265}$$

$$P90 - P10 \ 172-121'66$$

Teniendo en cuenta KNORMAL = 0'263 MESOCURTICA.

Ejercicio 4 Por FISHER.

m4

$$K2 =$$

$$S4$$

Directo:

$$(X_m - X)^4 \cdot n_i$$

$$m^4 =$$

$$N$$

Clave:

$$m^4 = m'^4 - 4m'1 \cdot m'3 + 6m'2 \cdot m2 - 3m'14$$

$$d4 \cdot n_i$$

$$m^4 = I4 \cdot d4 = I4 = 10000.5272/140 = \mathbf{376571'42}$$

$$N$$

$$m^4 = 376571'42 - 4(0'28 \cdot 2171'42) + 6(0'28 \cdot 371'42) - 3(0'28)^4 = \mathbf{374314'12}$$

$$m^4 \ 374314'12$$

$$K2 = = -3 = \mathbf{-0'28}$$

$$S4 \ 19'274$$

PLATOCURTICA.

$$-1 \ \mathbf{0'28} \ 0 \ 1$$

$$-6 -$$

Rojo: Diagonal principal

Azul: Diagonal secundaria

Nº de columnas

Nº de filas

$$=$$

$$*$$

$$=$$

$$\mathbf{A_{ij} = (-1)^{1+j} * i_j}$$

1

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{C} - 3\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

Operaciones

Elementales

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{r}$$

Sale U1 y entra X2

Sale U2 y entra X1

Las demás columnas son iguales que en la tabla anterior.

$\mathbf{X}_m \cdot \mathbf{n}_i$

$\mathbf{x} =$

N

1188

$$\mathbf{x} = = \mathbf{23'76}$$

50

$$\mathbf{V} = \mathbf{S2}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{a0} = \mathbf{m0} = \mathbf{m'0} = 1 \quad \mathbf{m1} = 0$$

$$\mathbf{a1} = \mathbf{X} \quad \mathbf{m2} = \mathbf{S2} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{a2} = \mathbf{X2}$$