

1. RESUMEN

Con esta práctica se pretende observar el movimiento oscilatorio en distintas condiciones del péndulo de Pohl: cuando se mueve libremente, cuando se le somete a la fuerza de un electroimán con distintos potenciales, 2, 4 y 6V, que lo amortiguan y cuando este freno se contrarresta con un motor forzando la oscilación. Así como la medida de uno de sus parámetros más característicos, como es la frecuencia, a partir de su periodo. Mediante mediciones de la amplitud se estimarán los factores de los que depende el movimiento armónico simple de un péndulo de torsión: la potencia e intensidad del freno y los coeficientes que lo determinan.

2. INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta práctica es observar cómo influyen distintos elementos, como un freno y un motor, en la oscilación de un péndulo. En este caso se estudia un péndulo de torsión como el de Pohl. Las variaciones se observan mediante mediciones de la amplitud.

El fundamento del péndulo de Pohl es un muelle helicoidal unido a un volante unido a una flecha que indica la amplitud sobre un disco fijo graduado a partir de la posición de equilibrio, origen de amplitudes.

Para estudiar el movimiento se establece sistema de referencia considerando el origen en el centro de masas y centro del muelle, al disco en un plano xy y al volante girando entorno al eje z.

El primer caso que se estudia es el de la OSCILACIÓN LIBRE. En este caso la fuerza que provoca el movimiento armónico simple(MAS) es la recuperadora del muelle, directamente proporcional a la elongación de este según la *ley de Hooke*, considerando la elongación por ser éste un péndulo de torsión.

Considerando su momento de inercia,

$$L = \sum_{i=1}^N r_i p_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i v_i$$

el momento de la fuerza recuperadora

$$M = I_z \frac{d\omega}{dt} k$$

y aplicando las leyes de Newton al movimiento del disco se puede concluir que el movimiento angular de un péndulo de torsión está descrito por la ecuación de MAS siguiente:

$$\Phi = \Phi_o \cos(\omega_o t)$$

y suponiendo una velocidad inicial nula la frecuencia natural de oscilación es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k^*}{I_z}}$$

En segundo lugar se estudian las OSCILACIONES AMORTIGUADAS, es decir se tienen en cuenta las pérdidas de energía derivadas del rozamiento. En este péndulo el amortiguamiento se produce con un freno magnético de intensidad variable, así la ecuación de movimiento del péndulo se vera modificada, definiendo

como el coeficiente de amortiguamiento dado por

$$\xi = \frac{C}{2I_z}$$

la nueva ecuación será

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\xi \frac{d\Phi}{dt} + \omega_0^2 \Phi = 0$$

En función de los distintos valores de ξ y comparando su valor con el de ω_0 pueden observarse tres situaciones distintas para el movimiento de un péndulo amortiguado:

- Sobreamortiguamiento: Si $\xi^2 > \omega_0^2$
la amplitud desciende bruscamente sin oscilar en torno al equilibrio.
- Amortiguamiento crítico: Si $\xi^2 = \omega_0^2$
amplitud desciende más rápido que en el caso anterior y más suavemente.
- Subamortiguamiento: Si $\xi^2 < \omega_0^2$
la amplitud va decayendo de forma exponencial mientras que el péndulo oscila en torno a su posición de equilibrio.

El caso que se da en el experimento es del tercer apartado y la variación de la amplitud en función del tiempo viene dada por la expresión

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-\xi t) \cos \omega t$$

con una frecuencia de

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

El tercer caso estudiado es el de las OSCILACIONES FORZADAS, caracterizadas por un decrecimiento de la amplitud y la energía hasta que la oscilación desaparece y la inclusión en el sistema de un motor que proporciona un momento externo proporcional a una constante M_0 y a la frecuencia de forzamiento Ω ,

$$M_f = M_0 \cos \Omega t$$

que contrarresta quedando la ecuación asociada al movimiento de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\xi \frac{d\Phi}{dt} + \omega_0^2 \Phi = f_0 \cos \Omega t$$

siendo f_0

la amplitud de forzamiento. La solución de esta ecuación consta de dos componentes, una transitoria y compleja y otra estacionaria. La segunda esta provocada por la presencia de fuerzas exteriores al sistema y es de tipo MAS siendo la frecuencia del MAS igual a la frecuencia de forzamiento Ω .

$$\Phi(t) = A \cos(\Omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede concluir que en las oscilaciones forzadas:

1. El coeficiente de amortiguamiento es directamente proporcional a la amplitud de las oscilaciones.
2. Existe un valor de la frecuencia de forzamiento para el que la amplitud se hace máxima, debido a la resonancia.
3. Un péndulo de torsión sin amortiguamiento forzado a oscilar con la frecuencia de resonancia tendría una amplitud creciente e infinita.
4. Si la frecuencia de excitación Ω es menor que la frecuencia natural del péndulo, la oscilación del péndulo estará en fase con el momento provocado por la fuerza exterior. Si las frecuencias son mucho mayores que, la oscilación estará en oposición de fase con la excitación externa. En el caso de que ambas coincidan el desfase será de 90 grados y estarán en cuadratura.

3. MÉTODOS Y MATERIALES



El péndulo de Pohl es un sistema cuya oscilación propia esta provocada por un muelle espiral. El amortiguamiento (variable con la intensidad) se debe a las corrientes de Foucault que aparecen en el péndulo al moverse el disco metálico en el seno de un campo magnético. Finalmente un motor de corriente continua de velocidad variable provoca oscilaciones en el extremo más estable del muelle, dando lugar así al movimiento forzado.

Con objeto de lograr la mayor estabilidad en el giro del motor, se alimentará directamente con una tensión máxima de 8V. La velocidad, y por tanto la frecuencia impulsora se pueden variar modificando la tensión de la alimentación aplicada; siempre sin exceder los 10V de alterna en la salida de la fuente para no sobrepasar la intensidad máxima que soporta el freno magnético.

Antes de comenzar el experimento se debe colocar la flecha en el origen de la escala del disco.

El movimiento oscilatorio libre se observa cuando la corriente del freno es nula aunque no lo es del todo debido al rozamiento mínimo del propio péndulo.

El amortiguamiento se observa aplicando distintos voltajes, 2, 4 y 6. primero se separa el péndulo de su posición de equilibrio y a continuación se anotan las distintas amplitudes; al tiempo que se miden los periodos con un cronómetro.

El amortiguamiento forzado se consigue conectando la salida de corriente continua con las hembras del motor. La frecuencia se controla con los dos diales superiores del motor, el derecho para el ajuste aproximado y el izquierdo para el fino. La frecuencia del motor se calcula midiendo sus revoluciones.

Los materiales utilizados han sido los siguientes:

- Amperímetro
- Péndulo de Pohl
- Freno magnético
- Motor de oscilaciones forzadas
- Regulador de oscilaciones
- Fuente de voltaje

4. RESULTADOS

- Determinar el período de oscilación y la frecuencia natural $\omega_0 = 2\pi / T_0$ de las oscilaciones libres (tomar, por tanto, $I_B = 0$). Para obtener valores suficientemente precisos, realizar 5 medidas del tiempo correspondiente a veinte oscilaciones, esto es, medir $t_{20} = 20T_0$. Para el cálculo de errores se han utilizado la fórmula de la desviación

medida	1º	2º	3º	4º	5º
t_{20}	36.37 0.01	36.39 0.01	37.00 0.01	36.92 0.01	36.90 0.01

$$t_{20} (E_{t_{20}}) = 36.72 \quad 0.41s$$

$$T_0 (E_{T_0}) = 1.84 \quad 0.03s$$

$$\omega_0 (E_{\omega_0}) = 3.43 \quad 0.04 rad / s$$

- Para los casos de oscilación amortiguada correspondientes alimentar el freno con tensiones de alterna $V_B = 4, 6, 8V$, estudiar el decrecimiento de la amplitud a medida que pasa el tiempo. Consignar los valores de I_B correspondientes a cada valor de V_B , así como sus errores. Estimar visualmente los sucesivos valores de amplitud de oscilación hasta que el

péndulo se pare. Como período aproximado (ver la Cuestión 2) puede adoptarse en todos casos T_0 (medido anteriormente).

	4 V	6 V	8 V
t	Φ (t)	Φ (t)	Φ (t)
Φ	10	15	20
T_0	9.6	12.6	13.2
$T_0/2$	9	10.4	8.8
$3T_0/2$	8.8	9	6.2
$2T_0$	8.4	7.2	4
$5T_0/2$	8.2	6.6	2.8
$3T_0$	7.6	5.2	1.8
$7T_0/2$	7.4	4.8	1.2
$4T_0$	6.8	3.6	0.8
$9T_0/2$	6.6	3.4	0.6
$5T_0$	6.2	2.6	0.3
$11T_0/2$	5.8	2.4	0.2
$6T_0$	5.6	2	0.1
$13T_0/2$	5.2	1.8	0

Los datos anteriores quedan representados en la siguiente gráfica:

A continuación, para el caso de 8V, se hará la representación lineal de la amplitud, mediante un ajuste por mínimos cuadrados $\ln \Phi(t) = at + b$

. Obteniendo los siguientes valores de la recta y
, del coeficiente de correlación lineal r
y de la pendiente m

.

$$y = -0.8497x + 3.9806$$

$$r = 0.9973$$

$$m = -0.8497$$

t	Φ (t)(8V)	$\ln \Phi$
0	20	2,99573227
T_0 /2	13.2	2,58021683
T_0	8.8	2,17475172
$3T_0$ /2	6.2	1,82454929
$2T_0$	4	1,38629436
$5T_0$ /2	2.8	1,02961942
$3T_0$	1.8	0,58778666
$7T_0$ /2	1.2	0,18232156
$4T_0$	0.8	-0,22314355
$9T_0$ /2	0.6	-0,51082562
$5T_0$	0.3	-1,2039728
$11T_0$ /2	0.2	-1,60943791
$6T_0$	0.1	-2,30258509
$13T_0$ /2	0	$-\infty$
$7T_0$	0	$-\infty$

$$y = -0.8497x + 3.9806$$

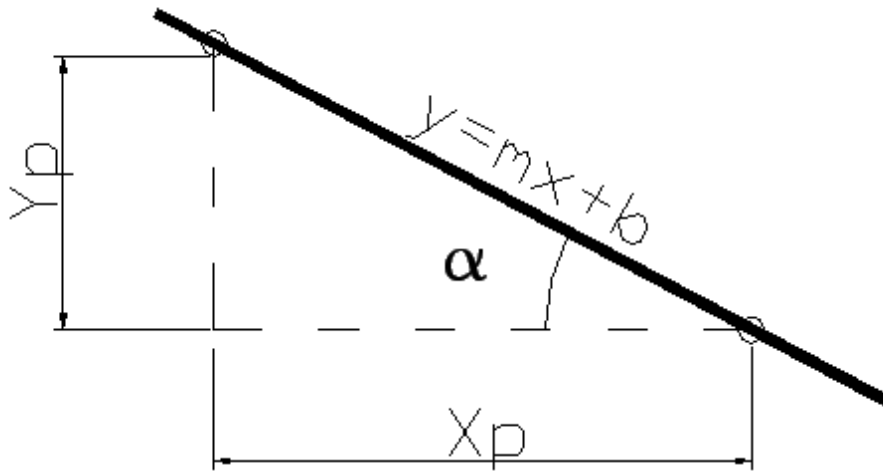
$$a = -0.8497$$

$$b = 3.9806$$

La deducción de la razón de amortiguamiento, K , el coeficiente de amortiguamiento, ξ , y el decaimiento logarítmico, $\ln K$ partir de la ecuación

$$\ln K = \xi T = \ln \frac{\Phi(nT)}{\Phi((n+1)T)} = \ln \Phi(nT) - \ln \Phi((n+1)T)$$

de la definición de pendiente y de la gráfica



$$m = \tan \alpha = \frac{y_p}{x_p} = -0.8497$$

es la siguiente

$$x_p = \frac{T}{2} \quad y_p = x_p m = -\frac{T}{2} 0.8497$$

$$\xi T = -y_p = \frac{T}{2} 0.8497 \quad \xi F = \frac{F}{2} 0.8497$$

$$\xi = 0.4248$$

$$\ln K = \xi T = 0.4248 \cdot 1.84 = 0.78$$

$$K = 2.18$$

- En el último de los casos, para estudiar las oscilaciones forzadas se fija un potencial de 8V y se varía lentamente la frecuencia del motor. Después se elaborará una tabla donde se recogen las amplitudes de las oscilaciones, Φ , a distintos períodos del motor, T_i , que son necesarios para medir la frecuencia de oscilación, Ω . Con los datos obtenidos se representará gráficamente la curva de resonancia, además en esta misma gráfica se representará la frecuencia de resonancia experimental, Ω_r^e , la frecuencia de resonancia teórica, Ω_r^t , y a la frecuencia natural, Ω_0 .

T_i	Ω	Φ^t	Φ^e	Φ
8,768	0,717	0,4	0,6	0,5
7,22	0,870	0,4	0,7	0,55
4,01	1,567	0,6	0,7	0,65

2,54	2,474	0,9	1	0,95
2,295	2,738	1,1	1,2	1,15
2,11	2,978	1,2	1,6	1,4
2,06	3,050	1,4	1,6	1,5
1,885	3,333	1,8	2	1,9
1,64	3,831	1,2	1,3	1,25
1,52	4,133	0,9	1	0,95
1,415	4,440	0,6	0,7	0,65
1,275	4,928	0,4	0,5	0,45
1,235	5,088	0,3	0,4	0,35
1,095	5,738	0,2	0,3	0,25
1,03	6,100	0,1	0,2	0,15
1,02	6,16	0,1	0,2	0,15
0,985	6,379	0	0,3	0,15

$$\Omega_r' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2} = 3.37 \text{ rad / s}$$

$$\Omega_r^{ex} = 3.333 \text{ rad / s}$$

$$\omega_0 = 3.43 \text{ rad / s}$$

Cuestiones

- Tal como se ha dicho anteriormente, el freno no debe ser alimentado a través de una corriente que sea mayor de 1A. Pero, ¿cuál sería el comportamiento del péndulo si, por ejemplo, tomásemos una corriente $I_B = 2A$?

La influencia de la intensidad se ve reflejada en las siguientes ecuaciones

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{I_z}}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}$$

$$A_{r0} = \frac{f_0}{2\xi\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}}$$

y comparando el caso inicial, $I_0 = 1$

, con el hipotético, $I_B = 2$

, los principales parámetros del péndulo variarían así:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{I_z}} \quad \omega_B = \sqrt{\frac{k^*}{2I_z}}$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_B} = \frac{\sqrt{\frac{k^*}{I_z}}}{\sqrt{\frac{k^*}{2I_z}}} = \sqrt{2} \quad \omega_0 = \sqrt{2} \omega_B$$

$$\omega_0 > \omega_B$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2} \quad \Omega_B = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} - 2\xi^2}$$

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_B} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} - 2\xi^2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 2\xi^2}{\omega_0^2 - 4\xi^2}} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 2\xi^2}{\omega_0^2 - 4\xi^2}} \Omega_B$$

$$\Omega_0 < \Omega_B$$

$$A_{r0} = \frac{f_0}{2\xi\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \quad A_{rB} = \frac{f_0}{2\xi\sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} - \xi^2}}$$

$$\frac{A_{r0}}{A_{rB}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 4\xi^2}{\omega_0^2 - 2\xi^2}} \quad A_{r0} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 4\xi^2}{\omega_0^2 - 2\xi^2}} A_{rB}$$

$$A_{r0} > A_{rB}$$

- Al estudiar, en el apartado 2 de los Resultados, las oscilaciones amortiguadas, se sugiere adoptar T_0 (que corresponde a $I_B = 0$) como período aproximado en todos los casos. En realidad, de la ecuación

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

se deduce el periodo como,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3.43^2 - 0.4248^2}} = 1.85s$$

Se observa que el período estimado en este apartado es mayor que el período calculado como promedio:

$$T_0 = 1.84s$$

- Demostrar las ecuaciones de la frecuencia y amplitud de resonancia a partir de la condición de máximo de la función amplitud dada.

Primero derivamos la amplitud:

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}} &= f_0 (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2^{-1/2} = \\ &= f_0 \cdot \frac{1}{2} (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2^{-3/2} (2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2)\Omega + 8\xi^2 \Omega) = \\ &= \frac{-4f_0 \Omega - (\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\xi^2}{2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}} \end{aligned}$$

Igualando a cero la derivada se obtendrá la frecuencia máxima:

$$-4f_0 \Omega - (\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\xi^2 = 0$$

$$-(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\xi^2 = 0$$

$$-\omega_0^2 + \Omega^2 + 2\xi^2 = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia de resonancia, que acabamos de obtener, en la ecuación de partida de la amplitud, se obtiene la amplitud de resonancia:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 (\omega_0^2 - 2\xi^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(-2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 - 8\xi^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\xi^2 \omega_0^2 - 4\xi^4}} \\ A_r &= \frac{f_0}{2\xi \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \end{aligned}$$

5. DISCUSIÓN

De los resultados obtenidos en el apartado anterior podemos deducir los siguiente:

–El amortiguamiento se ve favorecido por el incremento del potencial que se suministre al electroimán, así se ve en la gráfica que enfrenta las amplitudes de los distintos voltajes con el tiempo: el decrecimiento a 8V es mucho más brusco que a 6 y 4V como puede observarse a simple vista por las pendientes de las hipotéticas líneas que describiría el amortiguamiento. Así cabría afirmar que el amortiguamiento con un potencial de 8V es más cercano a el amortiguamiento crítico porque la amplitud decae rápidamente pero no lo hace de manera brusca.

La variación que describe la amplitud con la amortiguación decrece exponencialmente en función del tiempo y del potencial, este decaimiento es más evidente en las amplitudes asociadas a 8V por lo que la potencia incrementa el decaimiento.

–Observando los valores de las distintas frecuencias, experimental, teórica y natural; se puede comprobar que el oscilador está amortiguado ya que la mayor de las frecuencias es la natural, y las frecuencias menores se deben a coeficientes de amortiguamiento o a la presencia de fuerzas externas como la ejercida por el motor.

–El oscilador forzado cumple con lo esperado, debido al rozamiento la frecuencia a la que la amplitud es máxima es ligeramente inferior a la frecuencia natural, si no existiera tal rozamiento (provocado por el freno) la amplitud continuaría aumentado de la misma forma hasta el infinito.

–El experimento se ha realizado con una intensidad de 1A o menos para poder apreciar las variaciones en el período, ya que si la intensidad fuera mayor el decaimiento de las amplitudes sería tal que no se apreciaría, por ejemplo, la influencia que, en este fenómeno, tiene la variación de potencial.

–De la segunda cuestión podemos deducir que la influencia del coeficiente de amortiguamiento es mínima ya que la diferencia entre el periodo teniéndolo o no en cuenta es sólo de una milésima.

En las gráficas se han representado los errores en la amplitud porque su determinación es imprecisa. Estos errores implican a su vez otros dos tipos de errores, por una parte esta el error del aparato que sí sería estimable y valdría 0.1, pero por otra parte estaría el error cometido a la hora de tomar la medida por el observador. Teniendo en cuenta que en esta practica las medidas han sido tomadas simultáneamente por dos personas situadas en sitios diferentes y, por lo tanto, con puntos de vista diferentes, y que es difícil de estimar un valor preciso debido al propio funcionamiento del péndulo, el error no es calculable.

6. CONCLUSIÓN

Recapitulando, el objetivo de esta practica era observar la influencia de un freno y un motor en la oscilación del péndulo de Pohl mediante la observación de las variaciones de su amplitud.

Llegado este punto cabe decir que la aplicación de un freno al sistema provoca un decaimiento exponencial de la amplitud proporcional a la potencia suministrada y a la intensidad de la corriente.

También se pudo concluir que mediante un motor se puede hallar la máxima amplitud del sistema oscilatorio forzado.

Para comprobar que el objetivo de la práctica ha sido realizado se han contrastado los resultados obtenidos en el desarrollo de la misma con los obtenidos por otros alumnos. La semejanza de estos en los distintos apartados permiten decir que los objetivos se han alcanzado, o los errores cometidos son comunes.

La aproximación de valores como r , coeficiente de ajuste de una recta, a su valor ideal indican que los resultados no se alejan de los esperados.

6. BIBLIOGRAFÍA

–Tipler, Física, Ed. Reverté, Barcelona 1993

–Guión de Prácticas de Laboratorio de Física 2003/2004

Para la realización de esta práctica se han utilizado AutoCad 2002, Excel 2000, Math Type 5.2, PhotoDraw 2002 y Word 2002.

$$M_f = M_0 \cos \Omega t$$