

CAPÍTULO 1

Introducción al Programa DERIVE

EJERCICIO 1 Introducción de matrices. Operaciones básicas.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A + B

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

B - D

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r}
 = \begin{array}{rrr} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{array} \\
 + \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 \end{array}
 \end{array}$$

Este es el resultado que nos da Derive si le pedimos que simplifique la expresión. No nos da ningún resultado, por que no se pueden restar matrices de distinto orden.

AB

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrr} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{array} \\
 \cdot \begin{array}{rrr} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{array} \\
 = \begin{array}{rrr} 17 & -1 & 13 \\ 22 & -10 & 3 \\ -3 & 16 & -2 \end{array}
 \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrr} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{array} \\
 \cdot \begin{array}{rrr} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{array} \\
 = \begin{array}{rrr} 3 & 17 & 16 \\ -4 & 9 & 17 \\ 22 & -10 & 7 \end{array}
 \end{array}$$

Podemos observar el producto de Matrices no es conmutativo AB
BA.

DC

$$\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \cdot \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \\
 = \begin{array}{ccc} -1 & 3 & 24 \\ 0 & 4 & 46 \end{array}
 \end{array}$$

CD

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \\
 \cdot \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array} \\
 = \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \\
 \cdot \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}
 \end{array}$$

Derive no puede dar el resultado porque no se pueden multiplicar estas dos matrices ya que el n° de columnas de C no es igual al n° de filas de C.

CT

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \end{array}^T \\
 \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \\
 = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}
 \end{array}$$

xTx

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} -2 \\ 3 \\ 1 \end{array}^T \\
 \cdot \begin{array}{c} -2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\
 = (-2 \quad 3 \quad 1)
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

xxT

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -6 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

DTx

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

Derive no puede multiplicar estas dos matrices ya que el n° de columnas de DT no es igual al n° de filas de x.

((A-B)x)T

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -20 & -13 & 48 \end{pmatrix}$$

5A - 3B

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & 5 & -3 & 0 \\ 19 & -16 & -4 \\ 8 & -12 & 17 \\ -30 & 44 & 10 \end{pmatrix} =$$

EJERCICIO 2 Matriz hermíticas y antihermíticas.

$$A = \begin{pmatrix} 1-2i & 3i & 2+i \\ 0 & 4-3i & i \\ -5+i & 6-2i & 3-i \end{pmatrix}$$

$$S = A + AH$$

$$\overline{A}^T = A^H$$

$$A^H = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & -5-i \\ -3i & 4+3i & 6+2i \\ 2-i & -i & 3+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 3i & 2+i \\ 0 & 4-3i & i \\ -5+i & 6-2i & 3-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & -5-i \\ -3i & 4+3i & 6+2i \\ 2-i & -i & 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -3 \\ -3i & 8 & 6+3i \\ -3 & 6-3i & 6 \end{pmatrix} = S$$

$$S = SH$$

$$S^H = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -3 \\ -3i & 8 & 6+3i \\ -3 & 6-3i & 6 \end{pmatrix} = \text{conj} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -3 \\ -3i & 8 & 6+3i \\ -3 & 6-3i & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -3 \\ -3i & 8 & 6+3i \\ -3 & 6-3i & 6 \end{pmatrix} = S$$

$$W = A - AH$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 3i & 2+i \\ 0 & 4-3i & i \\ -5+i & 6-2i & 3-i \end{pmatrix} - \text{conj} \begin{pmatrix} 1-2i & 3i & 2+i \\ 0 & 4-3i & i \\ -5+i & 6-2i & 3-i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 3i & 7+2i \\ 3i & -6i & -6-i \\ -7+2i & 6-i & -2i \end{pmatrix} = W$$

$$W = -WH$$

$$-W^H = -\text{conj} \begin{pmatrix} -4i & 3i & 7+2i \\ 3i & -6i & -6-i \\ -7+2i & 6-i & -2i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 3i & 7+2i \\ 3i & -6i & -6-i \\ -7+2i & 6-i & -2i \end{pmatrix} = W$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$(S+W)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -3 \\ -3i & 8 & 6+3i \\ -3 & 6-3i & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4i & 3i & 7+2i \\ 3i & -6i & -6-i \\ -7+2i & 6-i & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3i & 2+i \\ 0 & 4-3i & i \\ -5+i & 6-2i & 3-i \end{pmatrix} = A$$

Repetir el problema para una matriz real cuadrada cualquiera y comprobar que se verifican las propiedades anteriores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$S = A + AH$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \text{conj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} = S$$

$$S = SH$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} = \text{conj} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} = S^H$$

$$W = A - AH$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \text{conj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = W$$

$$W = -WH$$

$$-W^H = \text{conj} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = W$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$(S+W)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

EJERCICIO 3 Calculo de determinantes. Matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Una matriz no tiene inversa si su determinante es igual a 0, por eso calcularemos la inversa de las matrices cuyo determinante sea distinto de 0.

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4 Matrices idempotentes y nilpotentes.

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

, Calcular F²

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F es una matriz idempotente, ya que elevada a 2, 3, 4,... el resultado va a ser la misma matriz F

Calcular la inversa de la matriz G teniendo en cuenta que se puede escribir como la identidad menos una cierta matriz H nilpotente

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que esta matriz se puede escribir como la identidad menos una cierta matriz H nilpotente, por tanto: $G = I - H$. De esta última expresión podemos deducir cual es la matriz J, ya que $H = I - G$.

También sabemos que la matriz $I - A$ es un matiz inversible si A es nilpotente, por tanto si consideramos que $A = H$ resultará que la matriz G es inversible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto G^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcularemos a continuación la matriz nilpotente de H, resultado de restarla a la identidad la matriz G dada, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

El índice de nilpotencia de la matriz H, será la potencia que hará que anule la matriz H:

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el índice de nilpotencia es 5

A continuación comprobaremos que la inversa de la matriz G se puede escribir de la siguiente expresión: $G^{-1} = I + H + H^2 + H^3 + H^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se cumple

EJERCICIO 5 Ecuaciones matriciales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BXC = A$$

$$B^{-1}BXCC^{-1} = B^{-1}AC^{-1} \quad | \quad IXI = B^{-1}XC^{-1} \quad | \quad X = B^{-1}XC^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{16}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{14}{15} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{16}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{14}{15} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$CYDT = 2A - B$$

$$C^{-1}CYDT(DT)^{-1} = C^{-1}(2A - B)(DT)^{-1} \quad | \quad IYI = C^{-1}(2A - B)(DT)^{-1} \quad | \quad Y = C^{-1}(2A - B)(DT)^{-1}$$

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\
 -1 & 1 & -1 & 4 & 5 & 4 & = & 2 & 0 & 1 & 2 & - & 1 & 2 & 3 \\
 2 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
 -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & - & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\
 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & &
 \end{array} = \begin{array}{ccc}
 \frac{39}{8} & -6 & \frac{19}{8} \\
 -\frac{1}{2} & -13 & \frac{11}{2} \\
 \frac{33}{8} & -7 & \frac{29}{8}
 \end{array}$$

$$ZB = 3C + 2Z$$

$$ZB - 2Z = 3C \quad Z(B - 2) = 3C \quad Z(B - 2)(B - 2)^{-1} = 3C(B - 2)^{-1} \quad Z = 3C(B - 2)^{-1}$$

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\
 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & = & -1 & 4 & 7 & = Z \\
 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -13 & -19
 \end{array}$$

CAPÍTULO 2

Espacios Vectoriales

EJERCICIO 6 Dado el vector $x = (2, 1, 5, 5)$, deducir si pertenece o no al subespacio vectorial de R^4 :

$$S = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

Utilizando la instrucción SOLVE

$$a(1, 1, 1, 1) + b(0, 1, 1, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (2, 1, 5, 5) \quad [a = 2, b = -1, c = 4]$$

Es decir que el vector x pertenece al subespacio vectorial S ya que podemos poner el vector x como producto de los escalares a, b, c por los vectores de S

EJERCICIO 7

Considerar el subespacio vectorial de R^5 :

$$S = \{(a, b, c, b, a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Obtener una base de S y comprobar si los siguientes vectores pertenecen a S :

$$v_1 = (1, 2, 3, 2, 0), v_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$v_3 = (0, 1, 2, 1, 0), v_4 = (1, 2, 3, 2, 1)$$

En los casos afirmativos, hallar las coordenadas del vector en la base considerada.

$$(a, b, c, b, a) = a(1, 0, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1, 0) + c(0, 0, 1, 0, 0)$$

por tanto la base de S: $B = \{(1, 0, 0, 0, 1)(0, 1, 0, 1, 0)(0, 0, 1, 0, 0)\}$

Ahora comprobaremos si v_1, v_2, v_3 y v_4 pertenecen a S, para ellos comprobaremos si son combinación lineal de los vectores de S.

$$a(1, 0, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1, 0) + c(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 2, 3, 2, 0) ![]$$

Derive no nos da ninguna solución, lo que significa que v_1 no pertenece a S

$$a(1, 0, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1, 0) + c(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 1) ![a=1, b=1, c=1]$$

Este vector si que pertenece a S ya que es combinación lineal de los vectores de S

$$a(1, 0, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1, 0) + c(0, 0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2, 1, 0) ![a=0, b=1, c=2]$$

Este vector si que pertenece a S ya que es combinación lineal de los vectores de S

$$a(1, 0, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1, 0) + c(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 2, 3, 2, 1) ![a=1, b=2, c=3]$$

Este vector si que pertenece a S ya que es combinación lineal de los vectores de S

Repetir el apartado anterior para el subespacio vectorial de R^4

$$S = \{(a+b, a-b, c, a+b+c) / a, b, c \in R\}$$

Y los vectores:

$$v_1 = (2, 4, 2, 4), v_2 = (-2, 2, 1, -1)$$

$$v_3 = (2, 0, 0, 3), v_4 = (0, 0, 2, 2)$$

$$(a+b, a-b, c, a+b+c) = a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1)$$

Una base del subespacio seria :

$$B = \{(1,1,0,1)(1,-1,0,1)(0,0,1,1)\}$$

Ahora comprobaremos si v_1, v_2, v_3 y v_4 pertenecen a S, para ellos comprobaremos si son combinación lineal de los vectores de S.

$$a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (2, 4, 2, 4) ![a=3, b=-1, c=2]$$

Este vector si que pertenece a S ya que es combinación lineal de los vectores de S

$$a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (-2, 2, 1, -1) ![a=0, b=-1, c=2]$$

Este vector si que pertenece a S ya que es combinación lineal de los vectores de S

$$a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (2, 0, 0, 3) ![]$$

Derive no nos da ninguna solución, lo que significa que v_1 no pertenece a S

$$a(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 2, 2) \quad ! [a=0, b=0, c=2]$$

Por lo tanto el vector v_4 también pertenece a S

EJERCICIO 8 Utilizando el comando ROW_REDUCE, discutir si los siguientes sistemas de vectores de R_5 son linealmente independientes o dependientes:

$$S_1 = \{U_1=(1,1,1,1,1), U_2=(1,1,-1,0,0), U_3=(0,0,1,2,3), U_4=(2,3,7,9,1), U_5=(1,1,2,1,0)\}$$

Para saber de una manera rápida si un sistema es linealmente independiente, por Gauss, que se consigue con la expresión ROW_REDUCE por tanto se colocan los vectores en forma matricial y se calcula Gauss.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & -3 & 7 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

El resultado, en este caso es la matriz identidad, no se anula ninguna fila, eso significa que todos los vectores son linealmente independientes y podemos decir que el sistema S_1 es un base de R_5 y $\dim S_1=5$

$$S_2 = \{V_1=(0,1,-1,2,2), V_2=(2,1,2,3,-2), V_3=(0,3,-3,0,-2), V_4=(2,2,5,-1,-2)\}.$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & -2 \end{array} \quad \text{ROW_REDUCE} \quad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & -2 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{59}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}$$

En este caso al realizar Gauss de la matriz pedida nos ha dado una matriz triangularizada y donde tampoco se anula ningún vector, por lo tanto los vectores son linealmente independientes y $\dim S_2 = 4$

$$S_3 = \{W_1=(-1,-2,2,3,2), W_2=(0,-1,-2,-2,1), W_3=(3,3,2,1,-2), W_4=(10,11,18,16,-7)\}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 -1 & -2 & 2 & 3 & 2 \\
 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \\
 3 & 3 & 2 & 1 & -2 \\
 10 & 11 & 18 & 16 & -7
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}}
 \begin{array}{ccccc}
 -1 & -2 & 2 & 3 & 2 \\
 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \\
 3 & 3 & 2 & 1 & -2 \\
 10 & 11 & 18 & 16 & -7
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \\
 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{1}{14} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Se puede observar que la ultima fila es 0, es debido a que el ultimo vector era combinación lineal de los otros por lo tanto $\dim S_3 = 3$

$$S_4 = \{Z_1=(-2,2,-1,1,0), Z_2=(3,0,-2,2,1), Z_3=(-11,2,5,-5,-3), Z_4=(-7,4,0,0,-1)\}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
 -11 & 2 & 5 & -5 & -3 \\
 -7 & 4 & 0 & 0 & -1
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}}
 \begin{array}{ccccc}
 -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
 -11 & 2 & 5 & -5 & -3 \\
 -7 & 4 & 0 & 0 & -1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Se han anulado los dos ultimos vectores, los cuales eran linealmente dependientes de los otros dos, por lo que $\dim S_4 = 2$

EJERCICIO 9 Utilizando los comandos de los ejercicios anteriores. Hallar la suma directa de los siguientes subespacios vectoriales:

Indicar los casos en que la suma de los subespacios sea directa y los casos en que los subespacios sean suplementarios.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } S_1 &= \{x \\
 R_4 / x_2 &= x_3\}, S_2 = \{x \\
 R_4 / x_2 &= -x_3, x_1 = x_4 = 0\}.
 \end{aligned}$$

Lo primero que haremos será obtener la forma de los vectores respectivos:

$$S_1 = [a, b, b, c] \quad S_2 = [0, d, -d, 0]$$

$$S_1 + S_2: [a, b, b, c] + [0, d, -d, 0] = [a, b+d, b-d, c]$$

Los vectores correspondientes a esta suma son:

$$[1, 0+0, 0-0, 0] = [1, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1+0, 1-0, 0] = [0, 1, 1, 0]$$

$$[0, 0+0, 0-0, 1] = [0, 0, 0, 1]$$

$$[0, 0+1, 0-1, 0] = [0, 1, -1, 0]$$

Los tres primeros vectores pertenecen a S_1 , el cuarto a S_2 .

Para calcular La suma de estos subespacios, sabemos que en el caso de haber solo dos subespacios, la suma será directa si la intersección entre ellos es nula. Uno de los métodos para ver si la suma es directa, será realizando lo mismo que antes Gauss, en el conjunto de vectores de cada sistema, si no se anula ningún vector es por que no hay intersección entre los sistemas, si por el contrario si que hay algún vector que se anula será porque entre ellos existe intersección y la suma no será directa

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0
 \end{array}
 \quad \text{ROW_REDUCE} \quad
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Se observa que no se anula ningún vector por lo que podemos decir que la SUMA ES DIRECTA

Como la suma es directa y tenemos cuatro vectores de R^4 que ya hemos comprobado que son independientes entre ellos podemos decir que los subespacios son SUPLEMENTARIOS ya que $S_1 + S_2 = E$! (espacio total) y $\dim S_1 + S_2 = \dim E = 4$

$$S_1 + S_2 = \langle (1, 0, 0, 0)(0, 1, 1, 0)(0, 0, 0, 1)(0, 1, -1, 0) \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{b) } S_1 &= \{x \\ R^4 / x_2 &= x_4 = 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \{x \\ R^4 / x_3 &= x_4 = 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \{x \\ R^4 / x_2 &= x_3, x_4 = 0 \} \end{aligned}$$

Los vectores que pertenecen a cada subespacio son:

$$S_1 = \langle (1, 0, 0, 0)(0, 0, 1, 0) \rangle$$

$$S_2 = \langle (1, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0) \rangle$$

$$S_3 = \langle (1, 0, 0, 0)(0, 1, 1, 0) \rangle$$

Para comprobar si la suma es o no directa, hemos de tener en cuenta:

– si S_1

$$S_2 = \{0\}$$

– si $(S_1 + S_2)$

$$S_3 = \{0\}$$

S_1

S_2

S_3

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \quad \text{ROW_REDUCE} \quad
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Se anulan tres de los vectores, por tanto la intersección no es nula por lo tanto la suma de estos tres subespacios NO ES SUMA DIRECTA y por no ser suma directa NO SON SUPLEMENTARIOS.

EJERCICIO 10

- Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^4$

$$b_1 = (2, 1, 1, 1), b_2 = (-1, 3, 2, 0)$$

$$b_3 = (0, 1, 0, 0), b_4 = (2, 0, 0, 0).$$

Comprobar que el sistema de vectores $B = \{b_i\}_{i=1}^4$ es una base de $\mathbb{R}^4$

Diremos que B es una BASE de E si es un sistema de vectores linealmente independiente y además es un sistema generador de E .

En este caso el espacio es $\mathbb{R}^4$ y como tenemos 4 vectores a estudiar, si esos 4 vectores son independientes de entre sí, diremos que forman una base y además si $\dim B = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ diremos que son una base generadora de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{cccc}
 2 & 1 & 1 & 1 \\
 -1 & 3 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \quad \text{ROW_REDUCE} \quad
 \begin{array}{cccc}
 2 & 1 & 1 & 1 \\
 -1 & 3 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Hemos comprobado que el sistema es linealmente independientes y que los vectores generan $\mathbb{R}^4$ por tanto ES BASE. A partir de estos cuatro vectores podremos generar cualquier vector como combinación lineal de estos vectores.

b) Expresar los vectores en la Base B

$$V_1 = (2, -3, 1, 0), V_2 = (5, 4, -3, 1)$$

Para expresar estos vectores en la base B , tenemos que escribir los vectores como una combinación lineal de los vectores de la base, pero también podemos calcularlo mediante un cambio de Base.

$$V_1 = (2, -3, 1, 0)$$

Cuando a nosotros nos dan una expresión, nos están dando una expresión respecto de la base canónica, mientras no nos digan lo contrario, por tanto lo que tenemos es V_c , como conocemos la base de B respecto de la cual queremos expresar el vector, en realidad lo que conocemos es, B_c .

Entonces si queremos $(2, -3, 1, 0)_B$, lo que queremos es V_B , por tanto el cambio de base será:

$$V_B = (BC)^{-1} V_C \quad (1)$$

Por tanto, necesitamos calcular la inversa de la matriz que nosotros tenemos en un principio, es decir, necesitamos CB , cuando tenemos BC

La matriz B_C es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La inversa, CB será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Por tanto la expresión (1) quedará:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} [2, -3, 1, 0] = 0, \frac{1}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{5}{4}$$

Donde el resultado es el que nos piden, es a decir el vector v expresado en la base B .

$$V_B: 0, \frac{1}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{5}{4}$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$(e_3)_B = CB (e_3)_C \quad (2)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{array} [0, 0, 0, 1] \rightsquigarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{4}$$

$$(e_3)_B: 0, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{4}$$

$$V_2 = (5, 4, -3, 1)$$

$$(V_2)_B = CB (V_2)_c \quad (3)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{array} [5, 4, -3, 1] \rightsquigarrow 1, -2, 9, \frac{1}{2}$$

$$\text{donde } (V_2)_B: 1, -2, 9, \frac{1}{2}$$

c) Dados los vectores:

$$z_1 = (1, 1, 1, 1)_B \quad z_2 = (0, 0, 1, 0)_B$$

Dar su expresión en la base canónica

Ahora tenemos que hacer lo contrario de antes, aunque también tenemos la posibilidad de hacerlo, escribiendo el vector como una combinación lineal de la base B

$$z_1 = (1, 1, 1, 1)_B$$

La expresión de cambio de base hemos de tener en cuenta que ahora que lo que queremos es el vector $(z_1)_c$, y que por tanto el que tenemos es $(z_1)_B$:

$$(z_1)_c = BC (z_1)_B \quad (1)$$

Por tanto ahora no necesitamos la inversa de la matriz BC sino directamente la matriz BC.

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} [1 \ 1 \ 1 \ 1] \rightsquigarrow [3 \ 5 \ 3 \ 1]$$

$$(z1)_c: \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z2=(0, 0, 1, 0)$$

Ahora conocemos $(z2)_B$, y lo queremos en la base B. La expresión será:

$$(z2)_c = BC (z1)_B \quad (2)$$

Que quedará:

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad [0 \ 0 \ 1 \ 0] \rightsquigarrow [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{Donde } (z2)_c: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3

Aplicaciones Lineales

EJERCICIO 11 Hallar la matriz asociada en la base canónica y clasificar, hallando $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$, para cada uno de los siguientes endomorfismos de R^3

- $f(x1, x2, x3) = (x1, x2, x3)$

El endomorfismo seria:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Para encontrar el núcleo se tiene que multiplicar el vector genérico e igualarlo a cero, por el hecho de que las imágenes de los vectores que estén en el núcleo son iguales a cero. (en derive no hace falta igualar a cero)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & = & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z & 0 \end{array} \quad [x=0 \quad y=0 \quad z=0]$$

De esta manera obtenemos las ecuaciones paramétricas del núcleo:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x, y, z) \\ R^3 / x = y = z = 0 \} &= \langle (0, 0, 0) \rangle \end{aligned}$$

Por tanto las tres componentes del vector serán 0 y la aplicación será INYECTIVA.

Para calcular la imagen de f , con el comando ROW_REDUCE, obtendremos el rango de la matriz asociada a la aplicación. Este será la dimensión del subespacio vectorial $\text{Im } f$, por lo que una base de este subespacio estará formado por las columnas de la matriz, tantas como sea su rango, que sean linealmente independientes.

$$\begin{array}{rcccl} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{ROW_REDUCE} & 0 & 1 & 0 & = & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{Im } f = \{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} = \langle (1,0,0)(0,1,0)(0,0,1) \rangle$$

Como estos tres vectores son libres componen base de $\text{Im } f$

Se tiene que cumplir que $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$, lo demostramos calculando la dimensión de cada uno de ellos, como coinciden en este caso, llegamos a la conclusión de que $\text{Im } f = \mathbb{R}^3 = 3$, por lo que la aplicación será SOBREYECTIVA.

También podíamos haber comprobado:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f \quad 3=3+0$$

$$\bullet f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$$

El endomorfismo seria:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y & = & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 \end{array} \quad [x=0 \quad y=0 \quad z=0]$$

$$\begin{array}{l} \text{Ker } f = \{(x, y, z) \\ \mathbb{R}^3 / x = y = z = 0 \} \end{array}$$

En este caso vuelve a ser cero y la aplicación es INYECTIVA.

$$\text{Im } f = \{(0,1,0)(0,0,1)(1,0,0)\}$$

La $\dim \text{Im } f = 3$ que coincide con la del espacio lo que la aplicación es SOBREYECTIVA y BIYECTIVA.

$$c) f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{El endomorfismo es:} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Calculamos el núcleo de esta matriz:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & = & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z & 0 \end{array} \quad [x=x \quad y=0 \quad z=0]$$

Por tanto, sabiendo que el valor de x era desde un principio igual a 0, los vectores del núcleo serán de la forma:

$$\text{Ker } f = \{(0, y, z)\}$$

$$\mathbb{R}^3 / x = y = 0 = \{0\}$$

Sabemos que la aplicación es INYECTIVA, dimensión del núcleo será igual a 0, por tanto la dimensión de la imagen de f será igual a 3, que es pueda comprobar por el teorema de las dimensiones.

Para calcular la imagen:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{ROW_REDUCE} & 0 & 1 & 0 & = & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$\text{Im } f = \langle (0, 1, 0)(0, 0, 1) \rangle$$

Es de dimensión 2 porque evidentemente el último vector no lo contamos ya que es el nulo. Por tanto la aplicación NO ES SOBREYECTIVA ya que la dimensión de los subespacios imagen no coincide con la de todo el espacio y por tanto el subespacio Im f, no genera el espacio de llegada, no es sistema generador de F.

Esta aplicación NO ES BIYECTIVA. (al no ser sobreyectiva).

$$a) f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{El endomorfismo será:} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

El núcleo sería:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & = & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z & 0 \end{array} \quad [x=0 \quad y=0 \quad z=0]$$

El núcleo de esta aplicación es:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z)\}$$

$$\mathbb{R}^3 / x = y = z = 0 = \{0\}$$

Por tanto el núcleo es el cero y la aplicación es INYECTIVA.

Comprobaremos que la imagen tiene que ser de dimensión 3 para que la aplicación pueda ser sobreyectiva i por tanto biyectiva:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{ROW_REDUCE} & 0 & 1 & 0 & = & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 0)(0, 1, 0)(0, 0, 1) \rangle$$

Este sistema de vectores es sistema generador de F y que por tanto es base de Im f. La aplicación es SOBREYECTIVA y por tanto BIYECTIVA.

$$e) f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_3)$$

$$\text{El endomorfismo es: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el núcleo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -2 & 0 & x & 0 \\ 1 & -2 & 0 & y & = & 0 & x = a \quad y = \frac{a}{2} \quad z = 2a \\ 2 & 0 & 1 & z & 0 \end{array}$$

Lo que significa que los vectores del núcleo son de la forma:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = a ; y = a/2 ; z = 2a\} = \langle (1, \frac{1}{2}, 2) \rangle$$

Como la aplicación no es directamente INYECTIVA, por lo que no es necesario calcular la imagen de f por que ya se puede decir que no va a ser BIYECTIVA.

También podemos deducir que para que f sea sobreyectiva la dimensión del subespacio imagen debe de ser igual al espacio (=3), y por la ecuación de las dimensiones vemos que esto no ocurre, por lo que no sobreyectiva.

EJERCICIO 12

a) Dada la aplicación lineal:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (15x_1 - 11x_2 + 5x_3, 20x_1 - 15x_2 + 8x_3, 8x_1 - 7x_2 + 6x_3),$$

Encontrar su matriz asociada en la base:

$$W = \{w_1 = (2, 3, 1), w_2 = (3, 4, 1), w_3 = (1, 2, 2)\}.$$

Dada la aplicación f podemos conseguir la matriz asociada respecto de la base canónica, es decir tomando los vectores de la base de R^3 , obteniendo así f_{cxc} .

Por tanto si $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$:

$$f_{cxc}: \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Para conseguir la matriz que se nos pide, tenemos que hacer un cambio de base:

$$F_{wxw} = C_w f_{cxc} W_c$$

Donde W_c son los vectores de la base W expresados en la base canónica y C_w es su inversa, es decir que $C_w = (W_c)^{-1}$.

$$W_c: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_w = (W_c)^{-1}: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos el producto de las dos matrices y obtendremos la matriz buscada:

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} : f_{cxc}$$

b) Repetir el apartado anterior en el caso de la aplicación lineal:

$$f: R^3 \rightarrow R^3 / f(x_1, x_2, x_3)B = (x_1 - 18x_2 + 15x_3, -x_1 - 22x_2 + 20x_3, x_1 - 25x_2 + 22x_3)B$$

donde la base B sería:

$$B = \{b_1 = (8, -6, 7), b_2 = (-16, 7, -13), b_3 = (9, -3, 7)\},$$

$$\text{y la } W = \{w'_1 = (1, -2, 1), w'_2 = (3, -1, 2), w'_3 = (2, 1, 2)\}$$

Ahora la matriz asociada no está representada en la base canónica, sino que esta representada en la base, que ya la conocemos:

La matriz asociada a esta aplicación lineal en la base B :

$$f_{B \times B}: \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Mediante cambios de base queremos llegar a la matriz $f_{w' \times w'}$. De momento tenemos $f_{B \times B}$ y podemos obtener B_c , ya que tenemos la base B , y también podemos calcular su inversa y obtener $C_b = (B_c)^{-1}$.

También conocemos la base W' y por tanto tendremos que calcular el siguiente cambio de base:

$$f_{w' \times w'} = B_{w'} f_{B \times B} W'^B$$

Para resolver esto, tendremos que conocer las matrices $B_{w'}$ y W'^B .—*

$$W'^B = C_b W'^c$$

Donde W'^c son los vectores del base W' expresados en la base canónica:

$$W'^c: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación calcularemos la matriz C_b , que será la inversa de la B_c , por tanto si la matriz B_c es:

$$B_c: \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz C_b :

$$\begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -3 \\ \frac{21}{5} & -\frac{7}{5} & -6 \\ \frac{29}{5} & -\frac{8}{5} & -8 \end{pmatrix}$$

Por lo que $W'^B = C_b W'^c$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -3 \\ \frac{21}{5} & -\frac{7}{5} & -6 \\ \frac{29}{5} & -\frac{8}{5} & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$W'B: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Calcularemos ara la inversa de esta última matriz, es decir $(W'B)^{-1} = Bw'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

! Bw

Por tanto ya tenemos las matrices necesarias para calcular la matriz nos piden:

$$f w' \times w' = Bw' fBxB W'B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

!f w' x w'

EJERCICIO 13: Dadas las bases

$$B = \{b_1 = (-3, 7), b_2 = (1, -2)\}$$

$$B' = \{b'_1 = (6, -7), b'_2 = (-5, 6)\}$$

Y las aplicaciones lineales:

$$F: R^2 \rightarrow R^2 / f(x_1, x_2)B = (2x_1 - x_2, 5x_1 - 3x_2)B,$$

$$G: R^2 \rightarrow R^2 / g(x_1, x_2)B' = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 7x_2)B'$$

Hallar y clasificar las aplicaciones lineales:

$$a) 3f - 2g$$

$$b) g \circ f$$

Para poder sumar aplicaciones lineales (o lo que es lo mismo sus matrices asociadas) es necesario que las dos estén en la misma base. Por lo que tendremos que realizar cambios de base de algunas de ellas porque una está respecto de la base B y la otra respecto de la base B'.

El que tenemos es:

$$Bc: \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B'^c: \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, vamos a pasar la aplicación g a la base B (y no respecto de la B' como está ahora). Sabemos cual es la matriz asociada de la aplicación f respecto de la base B :

$$fB \times B: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Sabemos también cual es la matriz asociada a la aplicación g , pero respecto de la base B :

$$gB' \times B': \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Lo que queremos es la matriz $gB \times B$, por tanto tendremos que realizar el siguiente cambio de base:

$$gB \times B = B'B \ gB \times B' \ BB'$$

Por tanto nos faltará escribir las coordenadas de B' respecto de la base B ($B'B$) y después calcular la matriz BB' , para calcular $B'B$ necesitaremos la expresión:

$$B'B = CB \ B'^c$$

Donde CB es la inversa de la matriz BC que ya conocemos:

$$CB: \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos cual es la matriz B'^c , podemos calcular $B'B$ como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 21 & -17 \end{pmatrix} = B'^c$$

Calculando la inversa obtenemos la matriz también buscada BB' :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 21 & -17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -5 \end{pmatrix} = B_{B'}$$

Por tanto, volviendo a la expresión inicial, la matriz $gB \times B$ será:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 21 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -324 & 77 \\ -1397 & 332 \end{pmatrix}$$

Donde la matriz central es la que corresponde a la expresión $gB' \times B'$

Por tanto al apartado A del ejercicio, se nos pide que calculemos $2f-3g$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -324 & 77 \\ -1397 & 332 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 654 & -157 \\ 2809 & -673 \end{pmatrix}$$

Tenemos que clasificar esta matriz, por lo que calcularemos el núcleo de esta

$$\text{Ker}(3f-2g): \begin{pmatrix} 654 & -157 \\ 2809 & -673 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [x=0 \quad y=0]$$

Lo que significa que la dimensión del núcleo es igual a cero, $\dim \text{Ker}(3f-2g)=0$, por tanto la aplicación es INYECTIVA. Según la formula de las dimensiones y que el espacio en el que estamos es $\mathbb{R}^2$:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker}(3f-2g) + \dim \text{Im}(3f-2g)$$

$\dim \text{Im}(3f-2g)$ tiene que ser igual a dos, sabiendo que $\dim \text{Im}(3f-2g)$ equivale al rango $(3f-2g)$:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{pmatrix} -263 & 93 \\ -1134 & 401 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto el Rango $(3f-2g) = 2$ y por tanto $\dim \text{Im}(3f-2g)=2$, lo que quiere decir que la aplicación es SOBREYECTIVA, ya que coincide con la dimensión del espacio de llegada, que también es $\mathbb{R}^2$ por tratarse de un endomorfismo.

Al ser INYECTIVA y SOBREYECTIVA, es BIYECTIVA.

En el apartado B del ejercicio, pide la COMPOSICIÓN de dos matrices, por lo que hay que recordar que La COMPOSICIÓN de aplicaciones lineales se escriben matricialmente como el producto usual de matrices.

Por tanto tendremos:

$$(g \circ f)_{B \times B} = g_{B \times B} f_{B \times B}$$

$$(g \circ f)_{B \times B} = \begin{pmatrix} -324 & 77 \\ -1397 & 332 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -263 & 93 \\ -1134 & 401 \end{pmatrix}$$

Y el núcleo:

$$\begin{pmatrix} -263 & 93 \\ -1134 & 401 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [x=0 \quad y=0]$$

Con lo que deducimos será INYECTIVA, y $\text{Ker}(g \circ f) = 0$ que implica que la dimensión de esta es cero, $\dim \text{Ker}(g \circ f) = 0$.

Según la ecuación de las dimensiones y que el espacio sigue siendo $\mathbb{R}^2$, la $\dim \text{Im}(g \circ f)$ tiene que ser igual a dos:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{pmatrix} -263 & 93 \\ -1143 & 401 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de $\text{Im}(g \circ f) = 2$, es decir $\dim \text{Im}(g \circ f) = 2$ y por tanto la aplicación es SOBREYECTIVA.

Como es INYECTIVA y SOBREYECTIVA, la aplicación es BIYECTIVA.

EXERCICI 14: Considerar la aplicación lineal:

$$f: R_5[x] \rightarrow R_4[x] / f(P(x)) = P'(x)$$

Clasificarla, dando bases del núcleo y la imagen.

Esta es una aplicación sobre los polinomios de grado 5 y por tanto de dimensión 6, hasta los polinomios de grado 4, y por tanto de dimensión 5.

Lo que es lo mismo en el subespacio de llegada encontraremos las derivadas de los polinomios del espacio de salida. Las imágenes de los elementos del subespacio de salida son las derivadas en el espacio de llegada.

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4)$$

La base canónica de R_5 : $C = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$

La base canónica del espacio de llegada, R_4 : $C' = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

Para calcular $f(C)$:

$$f(1)C' = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$f(x)C' = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$f(x^2)C' = (0, 2, 0, 0, 0)$$

$$f(x^3)C' = (0, 0, 3, 0, 0)$$

$$f(x^4)C' = (0, 0, 0, 4, 0)$$

$$f(x^5)C' = (0, 0, 0, 0, 5)$$

Por tanto la matriz $f_{C'C}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Cuando calculemos el núcleo de la matriz, comprobaremos que el núcleo no es cero, ya que como a elemento del núcleo encontraremos a_0 , que es el término independiente, por tanto es NO INYECTIVA.

$$\text{Ker } f = \{a_0\} = \langle 1 \rangle$$

Si calculamos el rango de la matriz, se puede ver que es 5, por lo que $\dim \text{Im } f_{C'C} = 5$, que coincide con la dimensión del espacio de llegada que es $R_4[x]$, de dimensión igual a 5, que es SOBREYECTIVA.

$$\dim \text{Im } f = 5 = \dim R_4[x] \text{ SOBREYECTIVA}$$

NO BIYECTIVA, por no ser inyectiva.

- Utilizando el cálculo matricial, realizar las siguientes derivadas e integrales:

b.1) $[x^4 - 3x^2 + 2]'$

Hemos de expresar este vector v en la base canónica C , ya que lo que nos piden es la derivada, por tanto este vector está en el espacio de salida.

Cogiendo un vector $v = (2, 0, -3, 1, 0)$

Utilizando la expresión:

$$(f_{CXC'})(v): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde el resultado es un vector columna expresado en la base canónica del espacio de llegada, es decir en C' , esto significa que la expresión anterior, tiene como resultado el vector $(0, -6, 0, 4, 0)_{C'}$ el que equivale al polinomio:

$$(f_{CXC'})(v) = -6x + 4x^3$$

b.2) $[3x^3(2x^2 - x + 1)]'$

Hacemos el producto: $(6x^5 - 3x^4 + 3x^3)$

Hacemos lo mismo de antes, cogiendo, un vector w :

$$w = (0, 0, 0, 3, -3, 6)$$

Quedará como:

$$(F_{CXC'})(w): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

El resultado será

$$(f_{CXC'})(w) = 9x^3 - 12x^4 + 30x^5$$

b.3) $(3x^4 - 3x^2 - x + 2)dx$

En este caso tenemos que hacer lo contrario, por tanto tenemos el resultado de en el espacio de llegada, es decir, que teniendo la imagen, tenemos que calcular la antimagen es decir la integral

Per tanto:

$$(fxc')(Vector\ genérico) = P$$

$$donde\ p = (2, -1, -3, 0, 3)c$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} = \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} b = 2 \\ 2c = -1 \\ 3d = -3 \\ 4e = 0 \\ 5f = 3 \end{array}$$

Donde a, b, c, d, e, f, equivale a: a0, a1, a2, a3, a4, a5

Los coeficientes de la $b = 2$; $c = -1/2$; $d = -1$; $e = 0$; $f = 3/5$

El resultado es el polinomio:

$$a_0 + 2x - 1/2x^2 - x^3 + 3/5x^5$$

b.4)

$$2x^2(x^2 - 5x + 1)dx$$

Tenemos $2x^4 - 10x^3 + 2x^2$

Ahora el vector al que hemos de igualar es $q = (0, 0, 2, -10, 2)$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} b = 0 \\ 2c = 0 \\ 3d = 2 \\ 4e = -10 \\ 5f = 2 \end{array}$$

Ahora los coeficientes son: $b = 0$; $c = 0$; $d = 2/3$; $e = -10/4$; $f = 2/5$.

$$a_0 + 2/3 x^3 - 10/4 x^4 + 2/5 x^5$$

EJERCICIO 15 Discutir y resolver, cuando exista solución, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\
x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\
2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\
3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12 \\
5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20
\end{aligned}$$

Para resolver los sistemas, en derive, pasaremos los términos independientes a la izquierda del igual y con el comando SOLVE, y tomando como incógnitas tantas como hayan (en nuestro caso 4) se obtendrán las soluciones.

$$\begin{aligned}
&a + 2b + 3c + d - 3 \\
&a + 4b + 5c + 2d - 2 \\
&2a + 9b + 8c + 3d - 7 \\
&3a + 7b + 7c + 2d - 12 \\
&5a + 7b + 9c + 2d - 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a + 2b + 3c + d - 3 \\
&a + 4b + 5c + 2d - 2 \\
\text{SOLVE } &2a + 9b + 8c + 3d - 7 \quad , (a \quad b \quad c \quad d) \quad a = \lambda \quad b = \frac{2}{3} \quad c = 4 - \lambda \quad d = \frac{6\lambda - 31}{3} \\
&3a + 7b + 7c + 2d - 12 \\
&5a + 7b + 9c + 2d - 20
\end{aligned}$$

La solución del sistema está en función de un parámetro como podemos ver, ya que para la variable $a = x_1$, nos da como solución precisamente el parámetro, por tanto esta podrá tomar infinitos valores, b está determinado, y por tanto, sólo puede tomar este valor, mientras que c y d están también en función del valor de a .

Por tanto un sistema compatible con un parámetro: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, más de una solución.

b)

$$\begin{aligned}
10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25 \\
15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 &= 40 \\
25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 &= 65 \\
30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 &= 95
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&10a + 23b + 17c + 44d - 25 \\
&15a + 35b + 26c + 69d - 40 \\
&25a + 57b + 42c + 108d - 65 \\
&30a + 69b + 51c + 133d - 95
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 10a + 23b + 17c + 44d - 25 \\
 SOLVE \quad 15a + 35b + 26c + 69d - 40 \\
 25a + 57b + 42c + 108d - 65 \\
 30a + 69b + 51c + 133d - 95
 \end{array} , (a \ b \ c \ d) \quad \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Lo que significa que DERIVE no ha encontrado ninguna solución, por lo que se deduce que el sistema es: SISTEMA INCOMPATIBLE.

c)

$$\begin{array}{l}
 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5 \\
 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\
 18x_1 + 20x_2 + 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\
 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 12a + 14b - 15c + 23d + 27e - 5 \\
 16a + 18b - 22c + 29d + 37e - 8 \\
 18a + 20b - 21c + 32d + 41e - 9 \\
 10a + 12b - 16c + 20d + 23e - 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5 + 27e + 23d - 15c + 14b + 12a \\
 SOLVE \quad -8 + 37e + 29d - 22c + 18b + 16a \\
 -9 + 41e + 32d - 21c + 20b + 18a \\
 -4 + 23e + 20d - 16c + 12b + 10a
 \end{array} , [a \ b \ c \ d] \quad a = \lambda \quad b = -\frac{5(18\lambda + 47e - 28)}{36} \quad c = \frac{2e - 18\lambda - 23}{9}$$

Podemos comprobar que no aparece el valor de la incógnita e, y que si que aparece como parámetro, y además que no es el único, sino que hay otro parámetro, lo que nos indica que hay, más de una solución y el sistema es SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO con dos parámetros.

EJERCICIO 16: Discutir y resolver, cuando exista solución, los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)

$$\begin{array}{l}
 ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\
 x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\
 x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a \\
 ax_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a
 \end{array}$$

Declaramos la matriz de coeficientes A:

$$\begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array}$$

Y calculamos el determinante:

$$\begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array} \quad \text{DET} \quad = a^4 - 6a^2 + 8a - 3 \quad \text{FATOR} (a^4 - 6a^2 + 8a - 3, \text{Rational}, a) \quad (a+3)(a-1)^3$$

Donde deducimos que las soluciones son $a = -3$; $a = 1$; y por lo que tendremos que estudiar estos casos más un tercer caso: $a \neq -3, 1$

Si $a = 1$

En la matriz incluida la columna de los términos independientes (lo que llamaremos matriz ampliada A'), sustituimos el parámetro a por 1:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} a & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad a=1$$

Y realizamos Gauss:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{ROW_REDUCE} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

No será necesario calcular el rango de A por que es obvio que va a ser igual que A'

$\text{Rg } A = \text{Rg } A' = 1 < 4 = n^\circ \text{ incógnitas ! SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}$

En nuestro caso el resultado es:

$$X = x_1, Y = x_2, Z = x_3, T = -x_1 - x_3 - x_4 + 1$$

Si $a = -3$

En la matriz de coeficientes A , sustituimos el parámetro a por -3 y realizamos Gauss:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 a & 1 & 1 & 1 & & -3 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & a & 1 & 1 & a=-3 & 1 & -3 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & a & 1 & & 1 & 1 & -3 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & a & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
 \\
 & & & & & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 \text{ROW_REDUCE} & & & & & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Rang A = 3

En la matriz ampliada A', sustituimos a por -3:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 a & 1 & 1 & 1 & a & & -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\
 1 & a & 1 & 1 & a & a=-3 & 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\
 1 & 1 & a & 1 & a & & 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\
 1 & 1 & 1 & a & a & & 1 & 1 & 1 & -3 & -3
 \end{array}$$

Y realizamos Gauss:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & -3 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 \text{ROW_REDUCE} & & & & 1 & -3 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & 1 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Rang A' = 4

Si analizamos el resultado, en la ultima fila, nos dice: $0x + 0y + 0z = 1$, que es imposible

Rg A = 3 " Rg A' = 4 ! SISTEMA INCOMPATIBLE

No hay solución.

Si a " 1, a " -3

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+3} \\
 & & & & a & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a+3} \\
 \text{ROW_REDUCE} & & & & 1 & a & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+3} \\
 & & & & 1 & 1 & a & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+3} \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & a & a & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+3}
 \end{array}$$

La solución del sistema para valores de a diferentes de 1 i de 3:

$$X = \frac{a}{a+3}$$

$$, Y = \frac{a}{a+3}$$

$$, Z = \frac{a}{a+3}$$

$$, T = \frac{a}{a+3}$$

Rg A = Rg A' = 4 = n° incógnitas ! SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

b)

$$9x_1 + ax_2 - x_3 = 4$$

$$4ax_1 - 2x_2 + (a-1)x_3 = a$$

$$5x_1 + (2a-1)x_2 - 3x_3 = 3(a+2)$$

Escribiendo en una matriz los coeficientes y calculándole el núcleo

$$\begin{array}{ccc} 9 & a & -1 \\ 4a & -2 & a-1 \\ 5 & 2a-1 & -3 \end{array}$$

$$DET \begin{array}{ccc} 9 & a & -1 \\ 4a & -2 & a-1 \\ 5 & 2a-1 & -3 \end{array} = -9a^2 + 26a + 35 \quad \text{FACTOR } (-9a^2 + 26a + 35, \text{Rational}, a) \quad (a+1)(35-9a)$$

Por tanto tenemos que estudiar, $a = -1$; $a = 35/9$; y $a \neq -1, 35/9$

Si $a = -1$

Sustituyendo en la matriz original, tenemos que A es:

$$\begin{array}{ccc} 9 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \end{array}$$

Haciendo Gauss:

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ ROW_REDUCE & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 5 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Lo que nos da que el Rang A = 2

Ahora construiremos la matriz ampliada, y sustituiremos a por -1:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 9 & a & -1 & 4 & 9 & -1 & -1 & 4 \\ 4a & -2 & a-1 & a & -4 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 2a-1 & -3 & 3(a+2) & 5 & -3 & -3 & 3 \end{array}$$

Y por Gauss:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{22} \\ & 9 & -1 & -1 & 4 & & & \\ \text{ROW_REDUCE} & -4 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{7}{22} \\ & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

El Rang A' = Rang A = 2

Rg A = Rg A' = 2 < 3 = n° incógnitas ! SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

$$X = \frac{9}{22}$$

$$, + Y = , Z = \frac{-22\lambda + 7}{22}$$

Si a = 35/9

La matriz de coeficientes A:

$$\begin{array}{ccc} 9 & \frac{35}{9} & -1 \\ \frac{140}{9} & -2 & \frac{26}{9} \\ 5 & \frac{61}{9} & -3 \end{array}$$

Hacemos Gauss

$$\begin{array}{ccc|ccc} & 9 & \frac{35}{9} & -1 & 1 & 0 & \frac{2}{17} \\ \text{ROW_REDUCE} & \frac{140}{9} & -2 & \frac{26}{9} & 0 & 1 & -\frac{9}{17} \\ & 5 & \frac{61}{9} & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Rang A = 2

Tomamos la matriz ampliada A':

$$\begin{array}{cccc} 9 & \frac{35}{9} & -1 & 4 \\ \frac{140}{9} & -2 & \frac{26}{9} & \frac{35}{9} \\ 5 & \frac{61}{9} & -3 & \frac{53}{3} \end{array}$$

Hacemos Gauss:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{array}{cccc|cccc} 9 & \frac{35}{9} & -1 & 4 & 1 & 0 & \frac{2}{17} & 0 \\ \frac{140}{9} & -2 & \frac{26}{9} & \frac{35}{9} & 0 & 1 & -\frac{9}{17} & 0 \\ 5 & \frac{61}{9} & -3 & \frac{53}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Rang $A' = 3$, el que pasa es que la última fila de la última matriz denota que hay una incompatibilidad, $0x + 0y + 0z = 1$, por tanto sistema incompatible.

Rang $A=2$ " Rang $A'=3$! SISTEMA INCOMPATIBLE

Si $a = -1$, $a = 35/9$

$$\begin{array}{cccc} 9 & a & -1 & 4 \\ 4a & -2 & a-1 & a \\ 5 & 2a-1 & -3 & 3(a+2) \end{array}$$

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{array}{cccc|cccc} 9 & a & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & -\frac{706}{27(9a-35)} - \frac{9a+14}{27} \\ 4a & -2 & a-1 & a & 0 & 1 & 0 & \frac{39a-34}{9a-35} \\ 5 & 2a-1 & -3 & 3(a+2) & 0 & 0 & 1 & \frac{12a^2-7a+68}{9a-35} \end{array}$$

El Rang $A' = 3$

Teniendo en cuenta el Rang $A = 3$

Rang $A=3 =$ Rang $A'=3 = n^\circ$ incógnitas ! SISTEMA COMPATIBLE

$$X = \frac{3a^2 - 7a + 8}{35 - 9a}, \quad Y = \frac{39a - 34}{9a - 35}, \quad Z = \frac{12a^2 - 7a + 68}{9a - 35}$$

CAPÍTULO 4

Forma Canónica de Jordan

No vamos a poder calcular directamente las formas canónicas, pero el programa si las herramientas necesarias para calcularlas, y también para poder comprobar los resultados

EJERCICIO 17: Calcular la forma reducida de Jordan i la base de Jordan de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Lo primero que se tiene que calcular es el polinomio característico que tiene la forma $P(x) = |A - xI|$ en el caso de ser una matriz cuadrada, aunque esta expresión también se puede expresar como $P(x) = |f(x) - xI_n|$ (donde se trata del endomorfismo f). En DERIVE, se puede calcular el polinomio característico de dos maneras distintas, mediante la función CHARPOLY, o a través de la definición ya descrita. (NOTA: en este caso el polinomio obtenido es un polinomio de variable x)

FORMA I

$$\begin{array}{l} \text{CHARPOLY} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (w-1)(w^3 - 3w^2 + 3w - 1) \quad (w-1)^4 \quad w=1$$

FORMA II

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} - x \text{ IDENTITY_MATRIX}(4) \quad (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \quad (x-1)^4 \quad x=1$$

Donde la n indica el tamaño de la matriz, este caso, de tamaño 4×4 , por tanto $n = 4$. En el caso de no estar factorizado, puede obtenerse mediante la función FACTOR_RATIONAL.

Para calcular los valores propios lo que tenemos que hacer es igualar el polinomio a 0, ecuación que recibe el nombre de ECUACIÓN CARACTERÍSTICA del endomorfismo f , (de la matriz A), $P(w = 0)$. Con esto se obtienen los valores propios que ya hemos calculado.

Aunque el polinomio este elevado a 4, solo tenemos que tener en cuenta un único valor. En realidad hay 4 soluciones pero son la misma $W = 1$. Por tanto el espectro estará formado por el valor propio 1: $f = \{1\}$

Valor propio $w = 1$

Se calcula el subespacio:

$$E_{w=0} = \text{Ker}(A - 1I)$$

Donde resulta que $(A - 1I)$ es igual a:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{array} - \text{IDENTITY_MATRIX}(4) = \begin{array}{cccc} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{array}$$

Ahora calcularemos el núcleo (que sabemos ya muy bien como se calcula):

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -3 & 0 & 3 & a & 0 & 3d - 3b \\ -2 & -7 & 0 & 13 & b & 0 & -2a - 7b + 13d \\ 0 & -3 & 0 & 3 & c & 0 & 3d - 3b \\ -1 & -4 & 0 & 7 & d & 0 & -a - 4b + 7d \end{array} = \begin{array}{l} a = \lambda \\ b = \frac{\lambda}{3} \\ d = \frac{\lambda}{3} \end{array}$$

Lo que quiere decir esta última expresión es que los vectores tienen un valor en el primer componente, mientras que la segunda y la cuarta tienen el valor $\lambda/3$. Por el hecho de no darnos información sobre el valor de la tercera componente, es decir, esto significa que puede tener cualquier valor, la causa de esto es porque tenemos una columna de ceros que significa que c puede tener cualquier valor.

$$E_w=0=\text{Ker}(A-I)=\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / a=x, b=d=x/3, c=y\} = \langle (1, 1/3, 0, 1/3), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

Por tanto la dimensión de $\text{Ker}(A-I) = 2$, hecho que también se podría comprobar mediante la expresión:

$$\text{Dimensión } C_4 = \text{dimensión } \text{Ker}(A-I) + \text{dimensión Imagen}(A-I)$$

Donde la dimensión de la imagen de $(A-I)$ representa el rango de la matriz $(A-I)$, y en este caso el rango de la matriz es:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{array}{cccc} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Efectivamente el rango de la matriz es 2.

$$\text{Dim } C_4 = \text{dim } \text{Ker}(A-I) + \text{dim Im}(A-I)$$

$$4 = \text{?} + 2$$

$$\text{?} = 4 - 2$$

$$\text{dim } \text{Ker}(A-I) = 2$$

Por tanto todavía tenemos de continuar calculando núcleos hasta que encontremos uno en el cual se establezca la cadena de núcleos, es decir, un núcleo a partir del cual las dimensiones de los núcleos que los siguen ya no aumente más. En este caso el primer núcleo es de dimensión 2, por tanto, el siguiente podrá ser 2 o 4, no podrá ser mayor que 4, por que 4 es la multiplicidad algebraica del valor propio $w = 0$, por otra parte, al no coincidir la multiplicidad geométrica de este valor, que es 2 con la algebraica, resultará que la matriz no es diagonalizable. Una de estas razones es que para serlo, la matriz de Jordan ha de estar formada solo por valores propios y por tanto los esquemas de puntos solo han de tener una altura, y en este caso tienen más:

Calcularemos $\text{Ker}(A-I)^2$, por tanto:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & 3 & 9 & 0 & -18 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & -2 & -7 & 0 & 13 & 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1 & 9 & 0 & -18 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & -1 & -4 & 0 & 7 & 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & 3 & 9 & 0 & -18 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & -2 & -7 & 0 & 13 & 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1 & 9 & 0 & -18 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & -1 & -4 & 0 & 7 & 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Volvamos a realizar el proceso para calcular el núcleo, pero en este caso para $(A-I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 & a & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -6 & b & 0 \\ 1 & 9 & 0 & -18 & c & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -6 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a = \lambda \\ b = \gamma \\ d = \frac{3\gamma + \lambda}{6} \end{matrix}$$

$$\text{Ker}(A-I) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = x, b = y, c = z, d = (3y+x)/6\} = \langle (6, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

La dimensión de este núcleo es 3, por tanto el rango de la matriz será 1.

Ahora calcularemos $(A-I)^3$, porque aun no se ha llegado a la dimensión 4 que es la que tenemos que llegar

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que quiere decir este resultado es que la dimensión del tercer núcleo, es igual a cuatro y que por tanto resultara que dimensión de $\text{Ker}(A-I)^3 = 4$.

$$\text{Dimensión Ker}(A-I)^3 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Al dar la matriz nula, podemos llegar a la conclusión que el polinomio minimal, es:

$$M(w) = (w-1)^3$$

La cadena de núcleos es:

$$\begin{aligned} &\text{Ker}(A-I) \\ &\text{Ker}(A-I)^2 \\ &\text{Ker}(A-I)^3 = \text{Ker}(A-I)^4 = \dots \end{aligned}$$

$$2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4$$

El esquema de puntos es:

La reducida de JORDAN es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La siguiente operación que se tiene que hacer es averiguar los vectores que van a formar la base de Jordan. Según lo que podemos observar en el esquema de puntos tenemos que empezar V3, vector situado al piso superior.

$$V3 \in \text{Ker}(A-I)^3 \setminus \text{Ker}(A-I)^2$$

Es decir que, V3 es un vector que pertenece al núcleo de $\text{Ker}(A-I)^3$ pero no está en $\text{Ker}(A-I)^2$, por tanto podemos coger como V3 el vector (1, 0, 0, 0), pero antes de hacer cualquier operación con el, tenemos que comprobar si podemos formar base o no, es decir, si es o no linealmente independiente de los vectores del $\text{Ker}(A-I)^2$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ROW_REDUCE} & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectivamente si son independientes y por tanto podemos coger como V3 el (1, 0, 0, 0).

Para calcular V2, utilizamos la relación $(A-I)V3 = V2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto $V2 = (0, -2, 0, -1)$. Es fácil comprobar que V2, así calculado verifica las ecuaciones implícitas del $\text{Ker}(A-I)^2$.

Ahora se calcula V1:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde entonces $V1 = (3, 1, 3, 1)$

Para V4 escogemos el vector (0, 0, 1, 0) el cual pertenece al $\text{Ker}(A-I)$ y que es L.I de los otros tres escogidos. Por tanto la base de JORDAN es:

$$B_J = \{(3, 1, 3, 1), (0, -2, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

EJERCICIO 18: Calcular la forma reducida de Jordan y la base de Jordan de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{CHARPOLY} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} = -w^3 + 6w^2 - 12w + 8 = (2-w)^3 \quad w=2$$

El valor propio es 2, y por tanto el espectro es: $f = \{2\}$

$$P(w) = (w-2)^3$$

Calculemos el núcleo de $(A-2I)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} - 2 \text{IDENTITY_MATRIX}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Matriz de la cual calcularemos el núcleo, $\text{KER}(A-2I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b-3c \\ 4a+8b-12c \\ 3a+6b-9c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a=\lambda \quad b=\gamma \quad c=\frac{\lambda+2\gamma}{3}$$

Los vectores de este núcleo tienen, en la primera componente un valor λ , en la segunda el valor γ , y en la tercera $(\lambda+2\gamma)/3$

$$\text{Ker}(A-2I) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = \lambda, b = \gamma, c = (\lambda+2\gamma)/3\} = \langle (1, 0, 1/3), (0, 1, 2/3) \rangle$$

$$\text{Ker}(A-2I)^2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Significa esto que la dimensión del segundo núcleo, es igual a tres, ya que el rango de la matriz es igual a 0.

$$\text{Dimensión } C_3 = \text{dimensión Ker}(A-2I)^2 + \text{dimensión Im}(A-2I)^2$$

$$3 \ 3 \ 0$$

$$\text{Ker}(A-2I)^2 = C_3 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Esquema de puntos:

La REDUCIDA DE JORDAN es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Empecemos por el $V2 \text{ Ker } (A-2I)$; Pudiendo coger como $V2$ el vector $(1, 0, 0)$ hemos de comprobar si es o no lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como si que son independientes, si podemos considerar que el $V2 = (1, 0, 0)$, por calcular $V1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & -12 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto el $V1 = (1, 4, 3)$

El $V3$ sabiendo que pertenece al $\text{Ker } (A-2I)$, podemos coger el $(1, 0, 1/3)$, el cual sabemos que si es independiente, quedando así el $V1 = (1, 4, 3)$

El $V3$, sabemos que pertenece al $\text{Ker } (A-2I)$, podemos coger el $(1, 0, 1/3)$, el cual sabemos que si es independiente, quedando $V3 = (1, 0, 1/3)$

Estos tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto si que son base, precisamente la BASE DE JORDAN :

$$BJ = \{(1, 4, 3)(1, 0, 0)(1, 0, 1/3)\}$$

EJERCICIO 19 Calcular la forma reducida de Jordan y la base de Jordan de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{CHARPOLY} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} w^4 + 7w^3 + 18w^2 - 20w + 8$$

$$\text{FACTOR} (w^4 + 7w^3 + 18w^2 - 20w + 8, \text{Rational}, w) \quad (w - 1)(w - 2)^3$$

$$\text{SOLVE} ((w - 1)(w - 2)^3, w) \quad (w = 1, w = 2)$$

En este caso como el polinomio no estaba factorizado, hemos utilizado la función FACTOR.

Los valores propios en este caso son $w = 1$ y $w = 2$.

$$W = 1$$

Calculemos $(A - 1I)$

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \text{IDENTITY_MATRIX}(4) = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 10 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación calcularemos $\text{Ker}(A - 1I)$

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 10 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 5a - 9b + 5c + 4d \\ 7a - 14b + 8c + 7d \\ 8a - 17b + 18c + 8d \\ a - 2b + c + 2d \end{matrix} \quad a = \lambda \quad b = 2\lambda \quad c = \frac{7\lambda}{3} \quad d = \frac{\lambda}{3}$$

Los vectores de este núcleo tienen un cierto valor (x) en la primera componente, en la segunda componente tienen dos veces la primera ($2x$), en la tercera ($7x/3$), y en la cuarta ($x/3$).

$$\text{Ker}(A - 1I) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / a = x ; b = 2x ; c = 7x/3 ; d = x/3\} = \langle (1, 2, 7/3, 1/3) \rangle$$

Es decir que si la dimensión del núcleo es 1, es por que el rango de la matriz $(A - 1I)$ ha de ser 3:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & -14 & 8 & 7 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 8 & -17 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente el rango es 3.

La cadena de núcleos:

$$\text{Ker}(A - 1I) = \dots\dots\dots$$

Esquema de puntos:

W=2

Calcularemos ahora (A-2I):

$$\begin{array}{cccc} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} - 2\text{IDENTITY_MATRIX}(4) \quad \begin{array}{cccc} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

EL núcleo sería :Ker (A-2I)

$$\begin{array}{cccccc} 4 & -9 & 5 & 4 & a & 0 & 4a-9b+5c+4d \\ 7 & -15 & 8 & 7 & b & 0 & 7a-15b+8c+7d \\ 8 & -17 & 9 & 8 & c & 0 & 8a-17b+9c+8d \\ 1 & -2 & 1 & 1 & d & 0 & a-2b+c+d \end{array} = 0 \quad (a=\lambda \quad b=\gamma \quad c=\gamma \quad d=\gamma-\lambda)$$

Ker (A-2I)={ (a, b, c, d)"R/ a = x ; b = y ; c = y ; d = y - x } = <(1, 0, 0, -1)(0, 1, 1, 1)>

Por tanto el rango de la matriz (A-2I) será igual a 2:

$$\text{ROW_REDUCE} \quad \begin{array}{cccc} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Pero la multiplicidad algebraica del valor propio W=2 era 3, por tanto, como aún no hemos llegado a esta dimensión, tendremos que calcular la matriz (A-2I)²:

$$\begin{array}{cccc} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}^2 = \begin{array}{cccc} -3 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & 12 & -6 & -6 \\ -7 & 14 & -7 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}$$

Calculando el núcleo:

$$\begin{array}{cccccc} -3 & 6 & -3 & -3 & a & 0 & -3a+6b-3c-3d \\ -6 & 12 & -6 & -6 & b & 0 & -6a+12b-6c-6d \\ -7 & 14 & -7 & -7 & c & 0 & -7a+14b-7c-7d \\ -1 & 2 & -1 & -1 & d & 0 & -a+2b-c-d \end{array} = 0 \quad (a=\lambda \quad b=\gamma \quad c=\delta \quad d=-\lambda+2\gamma-\delta)$$

Ker (A-2I)²={ (a, b, c, d)"R/ a = x ; b = y ; c = z ; d = -x+2y-z }=

<(1, 0, 0, -1)(0, 1, 0, 2)(0, 0, 1, -1)>

Por tanto el rango de la matriz $(A-2I)^2$ es 1:

$$\text{ROW_REDUCE} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & 12 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -7 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al llegar ya a la dimensión 3 que es la máxima que podemos tener, la cadena de núcleos queda como:

$\text{Ker}(A-2I)$

$\text{Ker}(A-2I)^2 = \dots\dots\dots$

Esquema de puntos:

La REDUCIDA DE JORDAN es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular los vectores que integran la base de JORDAN, comenzaremos por V_2 :

$V_2 \in \text{Ker}(A-2I)^2 \setminus \text{Ker}(A-2I)$, por tanto podemos coger como $V_2 = (0, 1, 0, 2)$, comprobando que es linealmente independiente de los vectores del $\text{Ker}(A-2I)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto si podemos utilizarlo. Para calcular V_1 haremos:

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ROW_REDUCE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo la formula $V_1 = (A-2I)V_2$, quedando así como $V_1 = (-1, -1, -1, 0)$, después el único que hemos hecho es comprobar que es independiente con el V_2, V_3, V_4 .

Como $V_3 = (1, 0, 0, -1)$

Como $V_4 = (1, 2, 7/3, 1/3)$

La BASE DE JORDAN será:

$$B_J = \{-1, -1, -1, 0\}, (0, 1, 0, 2), (1, 0, 0, -1), (1, 2, 7/3, 1/3)\}$$

EJERCICIO 20: Calcular la forma reducida de Jordan de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $\sin(A)$, $\cos(A)$ y comprobar que se verifica:

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_3$$

$$\begin{array}{c} \text{CHARPOLY} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad -w(w-2)^2 \quad \text{SOLVE } (-w(w-2)^2, w) \quad (w=0, w=2)$$

En este caso los valores propios son $W=0$, i $W=2$.

$W=0$

Calculemos $\text{Ker}(A-0I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & b & 0 & 2b-2a \\ -2 & 0 & 2 & c & 0 & 2c-2a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a=\lambda & b=\lambda & c=\lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto :

$$\text{Ker } A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a=x; b=x; c=x\} \langle (1, 1, 1) \rangle$$

La dimensión de este es 1, lo que significa que el rango de la matriz A es 2:

$$\begin{array}{c} \text{ROW_REDUCE} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La cadena de núcleos será: $\text{Ker } A = \dots$

El esquema de puntos:

$W=2$

Calculemos $(A-2I)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & & & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & IDENTITY_MATRIX(3) & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & & & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

A continuación $\text{Ker}(A-2I)$:

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & 0 & 0 & a & 0 & -2a \\ -2 & 0 & 0 & b & = & 0 & -2a & (a=0 \quad b=\lambda \quad c=\gamma) \\ -2 & 0 & 0 & c & 0 & -2a \end{array}$$

$\text{Ker}(A-2I): \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a=0; b=y; c=z\} = \langle (0, 1, 0) (0, 0, 1) \rangle$

$\dim \text{Ker}(A-2I)=1$, por tanto el rango es 1, como se puede apreciar arriba.

Ahora, no hace falta calcular $(A-2I)^2$ ya que $(A-2I)$ ya ha llegado a la máxima dimensión que podía tener, 2.

El esquema de puntos sería:

Por tanto la matriz es una matriz DIAGONALIZABLE ya que está formada solo por vectores propios:

La Reducida de Jordan será:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Per a calcular los vectores de la base es indiferente por donde empecemos, porque como ya hemos dicho son propios y por otra parte porque podemos coger los vectores que nos han salido de los núcleos:

$$V_1 \in \text{Ker}(A) = (1, 1, 1)$$

$$V_2 \in \text{Ker}(A-2I) = (0, 1, 0)$$

$$V_3 \in \text{Ker}(A-2I) = (0, 0, 1)$$

Comprobamos que son linealmente independientes:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ROW_REDUCE & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La Base de Jordan:

$$B_J = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

A continuación calcularemos:

$$\sin(A): \begin{matrix} \sin(0) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2) \end{matrix}$$

Esta se obtiene con la expresión: $\text{diag}\{\sin(1), \sin(2), \sin(3)\}$

Después se realiza el producto $P \text{ diag}\{\sin(1), \sin(2), \sin(3)\} P^{-1}$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \sin(0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sin(2) & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sin(2) & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Obteniéndose como $\sin(A)$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin(2) & \sin(2) & 0 \\ -\sin(2) & 0 & \sin(2) \end{matrix}$$

La matriz P es la matriz de cambio de base que vendrá dada por:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Vectores en columna de la base de Jordan.

$$\cos(A): \begin{matrix} \cos(0) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2) \end{matrix}$$

Volveremos a hacer el producto $P \cos(A) P^{-1}$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cos(0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cos(2) & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cos(2) & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Resultando el $\cos(A)$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos(2) & \cos(2) & 0 \\ 1 - \cos(2) & 0 & \cos(2) \end{matrix}$$

A continuación comprobaremos si se verifica lo que nos pide el enunciado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin(2) & \sin(2) & 0 \\ -\sin(2) & 0 & \sin(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos(2) & \cos(2) & 0 \\ 1-\cos(2) & 0 & \cos(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y comprobamos que si que se verifica y que el resultado es la matriz identidad de tamaño 3x3.

CAPÍTULO 5

Espacios con Producto Escalar

EJERCICIO 21 Descomponer en $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, el vector $(3, 7, 2)$ en suma de un vector proporcional al vector $(2, 3, 4)$ y de otro ortogonal al vector $(2, 3, 4)$, considerando el producto escalar canónico

Si $Z = (3, 7, 2)$ y $x = (2, 3, 4)$

$$H = Z - P$$

Buscamos el vector H que se construye como resta del vector z y de un vector P que será ortogonal a vector $(2, 3, 4)$, por tanto, despejando de la ecuación $H = Z - P$, el vector P, será igual a $P = Z - H$.

Para calcular P realizaremos Gram-Schmidt, del siguiente modo:

$$\langle (3, 7, 2), (2, 3, 4) \rangle = 35$$

$$(2, 3, 4) \cdot (2, 3, 4) = 29$$

P será igual a:

$$\frac{35}{29} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{70}{29} \quad \frac{105}{29} \quad \frac{140}{29}$$

Per tant H:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} - \frac{70}{29} \quad \frac{105}{29} \quad \frac{140}{29} = \frac{17}{29} \quad \frac{98}{29} \quad -\frac{182}{29}$$

Hemos descompuesto el vector $(3, 7, 2)$ en suma de un vector proporcional, al $(2, 3, 4)$, que será el vector $H = (17/29, 98/29, -182/29)$, y un vector ortogonal al mismo, que será el $P = (70/29, 105/29, 140/29)$

Ejercicio 21 En el espacio euclídeo $(E, \cdot)$ donde E es el espacio vectorial formado por las funciones polinómicas con coeficientes reales de grado menor o igual que tres, y el producto escalar se define como:

$$P(x) \cdot Q(x) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx,$$

Calcular el ángulo que forman los polinomios

$$P(x) = 3x^2 + 7$$

$$Q(x) = x^3 - 6x + 2$$

Tenemos que tener en cuenta, que el producto de polinomios, no resulta ser un producto escalar, porque el resultado es otro polinomio, no un escalar. Tenemos que calcular este producto como la integral definida, si que nos da un escalar.

La Fórmula para el ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{\sqrt{P(x)^2} \sqrt{Q(x)^2}}$$

$$P^2 = \int_0^1 P(x)^2 dx$$

$$\int_0^1 (3x^2 + 7)^2 dx = \frac{324}{5}$$

$$\frac{324}{5}^{\frac{1}{2}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

$$Q^2 = \int_0^1 Q(x)^2 dx$$

$$\int_0^1 (x^3 - 6x + 2)^2 dx = \frac{96}{35}$$

$$\frac{96}{35}^{\frac{1}{2}} = \frac{18\sqrt{210}}{35}$$

Después calcularemos $P(x)Q(x) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$

$$\int_0^1 (3x^2 + 7)(x^3 - 6x + 2) dx = -\frac{29}{4}$$

La expresión (1) quedará:

$$\frac{-\frac{29}{4}}{\frac{18\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{18\sqrt{210}}{35}} = -\frac{145\sqrt{42}}{1728} = -0.543812$$

Calculemos el ángulo:

$$\arccos(-0.543812) = \arcsen \frac{135953}{250000} + \frac{\pi}{2} = \frac{9053}{4219} = 2.14576$$

EJERCICIO 23 Se considera en R_5 el producto escalar definido mediante la matriz de Gram en la base

canónica

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Calcular la norma de los vectores

$$b_1 = (1, 4, 2, -1, 0)$$

$$b_2 = (0, 1, 1, -1, 0)$$

Con la norma asociada al producto escalar definido mediante GC.

Indicar el método seguido para calcularlas.

Utilizando el método de la matriz de Gram, matriz del producto escalar en la base fijada, en este caso la base C.

Tenemos por expresión matricial del producto escalar:

$$x \cdot y = X^T G_C Y$$

Podemos escribir $X = b_i$; $y = b_j$

Por tanto si para calcular la norma hemos de calcular el producto escalar de x para x , será el mismo pero en vez de tratarse de dos vectores diferentes se tratará de un mismo vector, x

b_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = [51]$$

Sacando la raíz cuadrada de este valor: $b_1 = 7.1414284$

b_1 :

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
 [0 & 1 & 1 & -1 & 0] & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & [0 & 1 & 1 & -1 & 0] \rightsquigarrow [4] \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4
 \end{array}$$

$$b_2 = 2$$

b) Calcular los suplementos ortogonales de los subespacios vectoriales de R^5 : A, B, A + B, A $\cap$ B, siendo

$$A = \{(x, y, z, t, u) / 2x + y = 0; z - t = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z, t, u) / x = y = z = 0\}$$

A:

Para realizar este ejercicio sacaremos una base de A:

$$A = \langle (1, -2, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

El último vector lo incluimos por que no se nos da ninguna condición para el parámetro u por tanto puede tomar cualquier valor.

Podemos ahora utilizar dos métodos, por el producto escalar vector a vector, cogiendo un vector genérico (x, y, z, t), multiplicándolo por la matriz de Gram y multiplicando por cada uno de los vectores de la base transpuesta, o también se puede sacar una matriz formada por los vectores de esta base expresada en columnas.

Sea H:

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

La expresión utilizada será: $(x, y, z, t, u) \cdot GC^T H$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\
 [x & y & z & t & u] & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x - 2(3y + u) & 2z + 3t & y + 4u \end{bmatrix} \quad x = -22u \quad y = -4u \quad z = -\frac{3t}{2}$$

Dándonos como resultado las ecuaciones paramétricas del suplemento ortogonal de A, A Las ecuaciones de A tienen dos parámetros porque la dimensión de la base de A era 3, por tanto la dimensión de A será 2 (estamos en R5).

Una base de A:

$$A = \langle (-22, -4, 0, 0, 1), (0, 0, -3/2, 1, 0) \rangle$$

B:

Para calcular el B es exactamente el mismo, ahora la base de B:

$$B = \langle (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Por tanto la matriz H es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La expresión quedará:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z + 2t & y + 4u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y = -4u & z = -2t \end{bmatrix}$$

La dimensión de B es 2 por tanto la de B será 3, y una base de B:

$$B = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, -4, 0, 1, 0), (0, 0, -2, 0, 1) \rangle$$

A + B:

La matriz que necesitamos será la formada por los vectores de la base de A y los de la base de B.

H:

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array}$$

Podríamos realizar Gauss para eliminar los independientes, pero en este caso no lo hemos hecho.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 [x & y & z & t & u] & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$[x - 2(3y + u) \quad 2z + 3t \quad y + 4u \quad z + 2 \quad y + 4u] \quad x = \lambda \quad y = \frac{2\lambda}{11} \quad z = 0 \quad t = 0 \quad u = -\frac{\lambda}{22}$$

Haciendo Gauss se comprueba que la dimensión de la suma de A+B, es 4, por eso nos salen las ecuaciones paramétricas en función de un parámetro.

$$(A+B) = \langle (1, 2/11, 0, 0, -1/22) \rangle \dim (A+B) = 1$$

(A
B):

Podemos utilizar la propiedad: (A B) = B + A

(A B) se quedará:

$$B + A \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, -4, 0, 1, 0), (0, 0, -2, 0, 1), (-22, -4, 0, 0, 1), (0, 0, -3/2, 1, 0) \rangle$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & -22 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{ROW_REDUCE} & 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Donde todos son INDEPENDIENTES.

$$c) \text{ Sea } V = \{(1, 1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}$$

una base de R5. Calcular la matriz de Gram del producto escalar considerando en V.

El que tenemos es la matriz Vc, y conocemos la matriz de Gram en la base C, por tanto calculando la transpuesta de Vc y utilizando la expresión:

$$G_V = (V_C)^T G_C V_C$$

$$V_C: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(V_C)^T: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_C: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

d) ¿Es V una base ortonormal para este producto escalar?. Justifica la respuesta.

No, porque la matriz de Gram que tenemos G_C no coincide con la matriz Identidad del espacio R^5 , es decir $G_C \neq I_5$. La matriz de Gram G_C en una base ortonormal, es la matriz identidad, ya que está formada de la siguiente manera: los elementos de la diagonal principal son productos escalares de cada vector por sí mismo es decir en la posición 1,1, estará el producto de U_1 por U_1 , y así sucesivamente, y esto coincidirá con las normas al cuadrado del respectivo vector, al ser base ortonormal, la norma será 1; mientras que los elementos que se encuentran fuera de la diagonal, representan los productos cruzados, es decir, en la posición 1,2 se encuentra el producto del vector U_1 por U_2 , pero que como la base era ortonormal, es decir ortogonal, estos productos serán todos cero.

$$\begin{array}{ccccc}
 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\
 2 & 4 & -3 & 3 & 1 \\
 -1 & -3 & 6 & -2 & 3 \\
 3 & 3 & -2 & 4 & 0 \\
 1 & 1 & 3 & 0 & 6
 \end{array}$$

EJERCICIO 24 Dado el sistema: $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ encontrar una base ortonormal de R^4 a partir de ella.

Utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, conseguiremos un sistema ortogonal a partir de uno cualquiera, después lo haremos ortogonal dividiendo por la norma.

$$U1: [-1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

La norma al cuadrado, $U1^2 = 2$

$$U2: [-1 \ 0 \ 1 \ 0] - \frac{[-1 \ 0 \ 1 \ 0] [-1 \ 1 \ 0 \ 0]}{2} [-1 \ 1 \ 0 \ 0] = -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0$$

La norma de este vector, al cuadrado, será, $U2^2 = 3/2$, calculemos la norma al cuadrado porque es la que se pone en la fórmula.

U3:

$$\begin{aligned}
 & [-1 \ 0 \ 0 \ 1] - \frac{[-1 \ 0 \ 0 \ 1] [-1 \ 1 \ 0 \ 0]}{2} [-1 \ 1 \ 0 \ 0] - \\
 & - \frac{[-1 \ 0 \ 0 \ 1] \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0\right)}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0\right) = -\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3} \ 1
 \end{aligned}$$

La norma al cuadrado, $U3^2 = 4/3$

U4:

$$\begin{aligned}
 & [0 \ 0 \ 0 \ 1] - \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 1] [-1 \ 1 \ 0 \ 0]}{2} [-1 \ 1 \ 0 \ 0] - \\
 & - \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 1] \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0\right)}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0\right) -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}}{\frac{4}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

La norma al cuadrado $\|u\|^2 = 1/2$

La base ortonormal sería:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 25: ¿Cuáles de las siguientes matrices representan un homomorfismo entre espacios con producto escalar?. Justificar la respuesta

El que se nos pregunta es si la matriz es ortogonal, y para que sea ortogonal, se tiene que cumplir que su inversa coincida con su traspuesta (por tratarse de un espacio euclídeo). Lo que haremos es calcular la inversa y la traspuesta, y si coinciden serán ortogonales y representarán un homomorfismo

A: $\begin{bmatrix} 0\% & 0\% \\ -0\% & 0\% \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0\% & 0\% \\ -0\% & 0\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\% & 0\% \\ -0\% & 0\% \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

COINCIDEN, por tanto si es HOMOMORFISME.

B: $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

NO COINCIDEN, por tanto NO ORTOGONAL, NO HOMOMORFISMO.

C: $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

COINCIDEN, HOMOMORFISMO.

D:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

NO COINCIDEN, NO HOMOMORFISMO.

E:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

COINCIDEN, HOMOMORFISMO

1

58

+

+

= 1

+

= 2

= 1

+

= 2

= 0

= 2