

Teoremas de continuidad

CONTINUIDAD

- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:

$$x+4 \text{ si } x \geq 0$$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$x^2+3x-4 \text{ si } x < 0$$

$$3-1-x \text{ si } x < 0$$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$2+2 \text{ si } x < 0$$

$$1$$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$1-e^x \text{ si } x < 0$$

$$1-e^x \text{ si } x < 0$$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$1-\cos x \text{ si } x < 0$$

$$\sin x$$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$3x^2$$

- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$e^x \text{ si } x < 0$$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$1-\text{si } x < 0$$

$$\text{---}$$

b) $f(x) = \sin 1/x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

- Estudiar la continuidad de las funciones

$$2 - \cos x (1+x)^{n-1}$$

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $\mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x=0$.

$$4 + 3 \sin x$$

- Calcular c para que la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

sea continua en todo el eje real.

- Determinar a y b para que la función
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < -\pi/2 \\ a \sin x + b & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2 \cos x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

- La suma de las funciones discontinuas en un punto, ¿ es siempre discontinua en ese punto ?. Compruébalo con las funciones:

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- La función
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$$

tiene una discontinuidad evitable en $x=2$. Hállese m , n , y todas sus discontinuidades.

- Hallar que valores deben tomar los números a y b , para que la función
$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 7x^2 + ax + b}{x^2 - 2x - 3}$$

, tenga en los puntos de abscisas $x=-1$ y $x=3$, discontinuidades evitables.

- La función
$$f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

no está definida en $x = a$. ¿ Qué valor ha de tener $f(a)$ para que sea continua ?

- Demostrar que
$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

es continua en $x=0$. ¿ Lo es en todo $\mathbb{R}$?

- Dar un ejemplo de función que no sea continua en ningún punto pero que su valor absoluto si lo sea.
- **Extensión de f.** Demostrar que si $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces existe una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $\mathbb{R}$ y que verifica $f(x)=g(x)$ en $[a,b]$. ¿ Se puede concluir lo mismo si se sustituye $[a,b]$ por (a,b) ? ¿ Y si suponemos que f es acotada ?

Teoremas de continuidad (Bolzano, signos,...) TEOREMAS DE CONTINUIDAD

- Demostrar que la ecuación $x^n - a = 0$ con $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, posee al menos una raíz real.
- Explicar apoyándose en el teorema de Bolzano, porque una función polinómica de grado impar, tiene siempre al menos una raíz real.
- Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$, tiene al menos una solución comprendida entre 0 y 1. Calcular

dicha raíz con una cifra decimal exacta.

- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ posee al menos una raíz real y calcularla con dos cifras decimales exactas.
- Empleando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$, tiene cuatro raíces reales.
- Demostrar que la ecuación $x + \sin x = 1$ posee al menos una raíz real.
- Probar que la función $f(x) = 2x^2 - \cos x$ toma el valor 1.
- Hállese la menor solución positiva de la ecuación $\tan x = x$ con dos cifras decimales exactas.
- Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x + e^{\sqrt{x}} = 42 \sin x$.
- Demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$x^{50} + \frac{133}{x^2 + 1 + \sin^2 x} = 70$$
- Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 4x$.
- ¿Es aplicable el teorema de Bolzano a $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$

en $[0, 1]$?

- Probar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función continua que solo toma valores racionales, entonces es constante.
- Demostrar que si una función es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) = 0$ para $x \in Q$, entonces $f(x) = 0$ para $x \in [a, b]$.
- Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Probar que en estas condiciones, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. Interpretar geoméricamente.
- Demostrar que si $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua y la función $g(x)$, continua en $[0, 1]$, es tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$. Interpretar gráficamente.
- Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua, demostrar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Idem $f(c) = 1 - c$.

OTROS PROBLEMAS

- Representar gráficamente la función $f(x)$ definida en el intervalo $[-2, 2]$

$$f(x) = -x \text{ para } -2 \leq x < 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 1 - x \text{ para } 0 < x \leq 2$$

- Hallar el campo de definición de las siguientes funciones reales de variable real definidas por las siguientes fórmulas :

$$a) f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{5}{3x + 2} + \frac{x}{x - 2}$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt{x + 7}}{x^4 + x^2 + 2}$$

$$d) f(x) = \sqrt[3]{\frac{2 + 3x}{3x - 2}}$$

$$e) f(x) = L \frac{6}{x^2} - 3$$

$$f) f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 12}$$

$$g) f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$$

- Estudiar la continuidad de :

$$1 - (1 + x)^4$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$x^2 - 1$$

- Estudiar la discontinuidad de la función :

$$x - 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ para } x = 1$$

$$x^4 - 1$$

- Estudiar la continuidad de la función : $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$
- Estudiar para qué valores de x es discontinua la función :

$$2x + 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$x^2 - 4x + 3$$

- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

$$x^2 - 4$$

$$a) f(x) = E(x) \quad b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$x^2 - 2$$

$$2x^2 - x - 3 \quad 2x^2 - 6x + 4$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$4x^2 - x - 5 \quad 3x^2 - 5x - 2$$

- Hallar m para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ m - 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Teoremas sobre derivabilidad

- Dadas las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 \sin x$, $h(x) = |x|$, estudia su derivabilidad en el origen.
- Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)|x-1|$, estudia si es continua y si tiene derivada en $x=0$ y en $x=1$. Estudia también cuántas derivadas sucesivas admite en $x=0$ y en $x=1$.
- Estudiar la derivabilidad de $f(x) = x^2|x-2|$ $g(x) = e^{|x|}$.
- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas de la forma :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 |x|$$

- Calcula las derivadas de las funciones:

$$a) y = (3x^2 - 7)^{Lx}$$

$$b) y = \sqrt{e^{2x}}$$

$$c) y = L \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$d) y = \operatorname{arctag} \frac{1 + e^x}{e^x}$$

- Hallar los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{|x-3|}{1+|x|}$

- Hallar los máximos y mínimos de la función :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x & [-1, 1] \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- Hallar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento de $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
- a) Dominio y asíntotas de la función $f(x) = x + \frac{L(x+4)}{x}$

b) Crecimiento y concavidad de la función : $f(x) = x^2 e^{-x}$

- Se considera la función $f(x) = x^2 |x+2|$ en el intervalo $[-3, 1]$. Se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad

b) Determinar los máximos y los mínimos locales y absolutos

c) ¿ Posee f algún punto de tangente horizontal ? ¿ Tiene esto algo que ver con el teorema de Rolle ?

- Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = (x+1)^3 \sqrt{3-x}$ en el punto $(2, 3)$.
- Encontrar un punto del intervalo $[0, 1]$ donde la tangente a la curva $y = 1 + x + x^2$ es paralela al eje de abscisas.
- ¿ Se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = x^2 |x-1|$ en $[-1, 1]$? Determina, en caso afirmativo, los puntos vaticinados en dicho teorema. ¿ Existe en el intervalo $(-1, 1)$ algún punto con tangente horizontal ?
- Considérese la ecuación $e^x = 1 + x$, y la función $f(x) = e^x - 1 - x$

a) Hallar los números reales c que cumplen $f'(c)=0$.

b) Hallar $f(0)$. Después, usando el apartado a) y el teorema de Rolle, razónese que ningún número positivo k es solución de la ecuación dada.

c) Idem que ningún número negativo es solución. ¿Cuáles son las soluciones de dicha ecuación?

- Obtener un número " c " que cumpla las condiciones del teorema de Cauchy en el intervalo $[2,3]$ para las funciones $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$.
- Dada la parábola de ecuación $y = x^2$, halla las coordenadas de un punto de la curva cuya tangente en él sea paralela a la cuerda de extremos $(1,1)$ y $(2,4)$. ¿Tiene esto algo que ver con algún teorema conocido?
- ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$

en el intervalo $[1,2]$?

En caso afirmativo, determina qué puntos cumplen los requisitos de dicho teorema.

- Probar que no existe ningún valor real de " m " para el que la función: $f(x) = x^3 + x + m$ pueda tener dos raíces reales distintas en el intervalo $[0,1]$.
- Sea $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Supongamos que $f'(x)=0$ tiene k soluciones, ¿qué se puede decir sobre el número de soluciones de la ecuación $f(x)=0$.

a) Probar que el polinomio $x^{17}+x^{15}+x^{13}+1$ solo tiene una raíz.

b) Probar que la ecuación $\log x + x^2 = 0$ tiene una única solución.

c) Determinar el número de soluciones de la ecuación $3 \log x - x = 0$.

d) Determinar el número de raíces reales del polinomio $x^5 - 5x - 1$.

e) ¿Para que valores de a tiene la ecuación $x^3 - 3x + a = 0$ una solución en el intervalo $(-1,1)$?

- La función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$

cumple que $f(-2) = f(1)$. Comprobar que para ningún número c se cumple que $f'(c) = 0$. ¿Cómo se explica este hecho contrario al teorema de Rolle?

- Dada la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, hállese tres intervalos I_1, I_2, I_3 tales que cada uno de ellos contenga una raíz de la ecuación $f'(x)=0$.
- Idem para la función $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$.
- Demostrar que $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$. Calcular $\sqrt{66}$ con dos decimales exactos.
- Razonar si puede aplicarse el teorema del valor medio a la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-2,0]$, hallando, en caso afirmativo, los puntos referidos.

- Probar que
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema del v. m. en $[0,2]$. Calcula el valor de c .

- Hallar el ángulo con que la curva $y = Lx$ corta al eje OX.
- Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ posee dos raíces reales distintas, siendo $f(x) = x''(x^2 - 9)$, sin calcular la derivada.
- Sea $f(x) = 2 + x^3(x - 2)^2$. Prueba que la ecuación $f'(x) = 0$ posee al menos una raíz en el intervalo $(0,2)$ sin calcular la derivada.
- ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hopital ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

- Aplicación del teorema de L'Hopital. (LIMITES.COL) Calculo de limites por L'Hopital

Otros problemas

- Estudiar el campo de existencia, asíntotas, los intervalos de crecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión, y concavidad de la función $y = L(x^2 - 3x + 2)$. Represéntala.
- Hallar la derivada n -ésima de la función $y = (1 + ex)^2$.
- Obtener el desarrollo de Mac-Laurin de $f(x) = e^{2x}$. (COU I)
- Obtener el desarrollo de Mac-Laurin de la función $f(x) = ex+1$. (COU I)
-