TEMA 1 : ESPACIO VECTORIAL

Definición de cuerpo:

Supongamos un conjunto K. K es un cuerpo si en el se han definido 2 operaciones internas:

- Una, la suma que le da la estructura de grupo abeliano: la suma tiene las siguientes propiedades:

- Asociativa: (a+b)+c=a+(b+c)
- Elemento neutro 0: a+0=0+a
- Elemento opuesto: "a " K " (−a) a+(−a)=(−a)+a=0
- Conmutativa: a+b=b+a

- Y otra segunda a la que llamaremos producto que le da estructura de grupo cumpliendo las siguientes propiedades:

- Asociativa: (a*b)*c=a*(b*c)
- Elemento neutro 1: a*1=1*a=a
- Elemento inverso: "a /=0 " a−1 a−1*a=1

- Se verifica además la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Definición de espacio vectorial:

Sea V un conjunto cuyos elementos llamaremos vectores y K un cuerpo. Diremos que V tiene una estructura de Espacio Vectorial sobre el cuerpo si:

- En V hay definida una ley de composición interna a la que llamaremos suma que le da estructura de grupo abeliano. Esa operación es:

(V, +)

− asociativa (a +b) + c = a + (b+c)

− elemento neutro 0: a+0=0+a=a " a " V

− elemento opuesto "a"V " −a a+(−a)=(−a)+a=0

− conmutativa : a+b=b+a "a,b

- Hay una ley de composición externa de elementos del cuerpo K por vectores cuyos resultados son vectores a la que llamaremos multiplicación de nº por vectores.

K*VV

(,a) a

- Distributiva de vectores

(a+b)= a+ b

• Distributiva de números:

(+)a= a+ a

• Asociativa de números por vectores:

( )a= (a) " , " K

• Elemento neutro:

1*a=a "a,b "K

Ejemplos:

V2 vector libre

V3 vector libre

R2={(a1,a2) / ai " R} R3= { (a1,a2,a3) /ai " R } Rn={(a1,a2....an)/ai" R}

(a1,a2...an)+(b1,b2...bn)=(a1+b1,a2+b2...an+bn)

(a1,a2...an)=(a1, a2... an)

m*n (aij)+(bij)=(aij+bij)

(aij)= (aij)

P1 (x) = { a0+a1 x/ ai " R} Pn (x)= { a0+a1x+a2x2...+anxn/ai" R}

FR (x) (f+g) (x)= f(x) + g(x) (f) (x)= f(x)

Ejercicios:

Demostrar que el conjunto R3 (a1,a2,a3) con las operaciones ordinarias es espacio vectorial:

(a1,a2,a3)+(b1,b2,b3)=(a1+b1,a2+b2,a3+b3)

Suma:

−Asociativa

[(a1,a2,a3)+(b1,b2 ,b3)]+(c1,c2,c3)=(a1,a2,a3)+[(b1,b2,b3)+(c1,c2,c3)]

Primer miembro = (a1+b1,a2+b2,a3+b3)+(c1,c2,c3)=(a1+b1)+c1,(a2+b2)+c2,(a3+b3)+c3

Segundo miembro = (b1+c1,c2+b2,b3+c3)+(a1,a2,a3)=a1+(b1+c1),a2+(b2+c2),a3+(b3+c3)

−Elemento neutro (0,0,0)

(a1,a2,a3)+(0,0,0)=(0,0,0)+(a1,a2,a3)=(a1+0,a2+0,a3+0)=(a1,a2,a3)

−Elemento opuesto

(a1,a2,a3)+(−a1,−a2,−a3)=(−a1,−a2,−a3)+(a1,a2,a3)=(0,0,0)

−Propiedad conmutativa

(a1,a2,a3)+(b1,b2,b3)=(b1,b2,b3)+(a1,a2,a3)

 (a1,a2 ,a3)=(a1, a2, a3)

Multiplicación

−Distributiva de vectores

 (a+b)= a+ b

−Distributiva de escalares

(+) a= a+ a

−Asociativa de vectores por escalares

( )a= (a)

−Elemento neutro

1*a=a*1=a

Sabemos que en !2 con las operaciones ordinarias:

(a1,a2)+(b1,b2)=(a1+b1,a2+b2)

 (a1,a2)=(a1, a2)

es un espacio vectorial de !.

En !2 definimos una suma que va a ser ordinaria y una multiplicación.

(a1,a2)+(b1,b2)=(a1+b1,a2+b2)

 (a1,a2)=(a12, a2)

¿Será ! espacio vectorial?

La suma al ser una operación ordinaria damos por hecho que cumple las cuatro propiedades:

- Asociativa
- Elemento neutro
- Elemento opuesto
- Propiedad conmutativa

Sin embargo debemos comprobar si se cumplen las propiedades en la multiplicación para que sea espacio vectorial.

−Distributiva de vectores

[(a1,a2)+(b1,b2)]= (a1,a2)+ (b1,b2)

Primer miembro:

(a1+b1,a2+b2)=((a1+b1)2, (a2+b2))=(a12+ b12+ a1b1, a2+ b2)

Segundo miembro:

(a12, a2)+(b12, b2)=(a12+ b12, a2+ b2)

Los dos miembros son distintos. No es espacio vectorial.

−Distributiva de números

(+)(a1,a2)= (a1,a2)+ (a1,a2)

Primer miembro:

((+)a12,(+)a2)=(a12+ a12, a2+ a2=

Segundo miembro:

(a12, a2)+(a12, a2)=(a12+ a12, a2+ a2)

−Asociativa de escalares por vectores:

( )(a1,a2)= ((a1,a2))

Primer miembro:

(( )a12,( )a2)=(a12, a2)

Segundo miembro:

(a12, a2)=((a12)2, (a2))=(a4, a2)

−Elemento neutro:

1(a1,a2)=(a1,a2)

(1a12,1a2)=(a12,a2)

<u>Ejercicio:</u>

En !2 definimos:

- (a1,a2)+(b1,b2)=(a1+b1,a2+b2)

(a1,a2)=(a1, a2)

- (a1,a2)+(b1,b2)=(a1+b1+1,a2+b2)

(a1,a2)=(a1, a2)

¿!2 con éstas operaciones tiene estructura de espacio vectorial?

- No será espacio vectorial en las propiedades de distributiva respecto de escalares.
- No será espacio vectorial en las propiedades del producto: distributiva respecto de vectores, escalares, elemento neutro.

Propiedades

Axiomas de la definición:

- 0*v = 0
- a*0v=0
- K(−vv)=−kvv
- (−k)vv=−kvv
- k(vv−wv)=kvv−kwv
- (k−t)vv=kvv−tvv

Demostración

- k+0=k vv(k+0)=kvv kvv+0vv=kvv 0vv=kvv−kvv=0v

3. vv+(−v)=0v k[(vv+(−vv)]=k0v kvv+k(−vv)=k0v kvv+kvv=0 k(−vv)=−kvv

Combinaciones lineales:

Sumas de productos de escalares por vectores:

vv1+ vv2........... pvvp=" ivvi

Ejemplos:

2(−1,4)+6(3,2)−(−1,6)

3 −1 4 3 1 6 24 2 42

6 0 2 0 0 1 18 0 11

2(1+x2)+3(2−x+x2)−(−3+x2)

Las combinaciones lineales de vectores son vectores.

Dependencia e independencia lineal:

Definición: Los vectores v1,v2.......vp son linealmente independientes o que forman un sistema libre de vectores si la única combinación lineal de ellos que vale el vector 0v es aquella en la que todos los coeficientes son 0.

{vv1,vv2......vvp} l.i.! v1+ v2..... pvvp=0v i=0 "i

Los vectores v1,v2....vp son linealmente dependientes o que forman un sistema de vectores si existen combinaciones lineales de ellos que vales el vector 0v con algun coeficiente distinto de 0.

{vv1,vv2,......vvp} l.d. !" vv1, vv2,........... pvvp=0v i"0

Averiguar si los conjuntos siguientes de vectores son l. i. o l. d.

- {(1,−1,0)(2,1,3)(1,2,−1)} en !3
- {(1,−1,1)(2,1,3)(4,−1,5)} en !3
- {1+x2,1−x2,1+3x−2x2} en !2(x)
- f
- {x,ex,e−x}

Resolución:

x(1,−1,0)+y(2,1,3)+z(1,2,−1)=(0,0,0)

(x,y,z) x=0,y=0,z=0 l. i.

x,y,z, " "0 l. d.

x+2y+z=0 x+2y+z=0 x+2y+z=0 z=0;y=0;x=0

−x+y+2z=0 3y+3z=0 3y+3z=0

3y−z=0 3y−z=0 −4z=0

solución trivial: independientes

infinitas soluciones: dependientes l. i.

2.

x(1,−1,1)+y(2,1,3)z(4,−1,5)=(0,0,0)

x+2y+4z=0 1 2 4 0

−x+y−z=0 −1 1 −1 0

x+3y+5z=0 1 3 5 0

 (A)= (A/b) =n

sistema homogéneo igual solución

<ninf. Sol.

- 2 "0 2" (A) A =5−2−12−4+3+10=0

1 1

(A)=2inf. sol.

sol"sol. triv.

l.i.

$x+2y=-4z$

$-x+y=z$

$3y=-3z$

solución (z=)

y= −

x=−2

z=

"!

3.

$a(1+x2)+b(1-x2)+c(1+2x-2x2)=0p=(0+0x+0x2)$

$a+b+c+(3c)x+(a-b-2c)x2=0p$

- polinomios iguales mismos coeficientes

a+b+c=0 1 1 1 0

3c=0 0 0 3 0 A =6"0 (A)=3

a+b−2c=0 1 −1 −2 0

menor de orden 2 " 0 rango de los polinomios por lo menos 2.

x=y=z=0

l. i.

5.

x+ ex+ e−x=0

2 funciones asocian a cualquier número real el mismo valor en ambas

x=1 + e+ (1/e)=0

x=0 + =0

x=2 2 + e2+ *(1/e2)=0

Determinante de la matriz de los coeficientes " 0 independiente

1 e 1/e

0 1 1 =(1/e2) + 2e − (2/e) − e2"0

2 e2 1/e2

Sabiendo que vv1, vv2, vv3 son l. i. Averiguar si w1, w2, w3, son l. i. o l. d.

- { wV1, wv2, wv3} / wv1=vv1+2vv2−vv3

wv2=−vv1+vv2+2vv3

wv3=2vv1 +vv3

xwv1+ywv2+zwv3=0v

x(vv1+2vv2−vv3)+y(−vv1+vv2+2vv3)+z(2vv1 +vv3)=0v

(x−y+2z)vv1+(2x+y)vv2+(−x+2y+z)vv3=0v

vv1, vv2, vv3, son l. i. luego necesariamente tienen que ser 0 sus coeficientes:

x−y+2z=0 x−y+2z=0 x−y+2z=0 z=y=x=0 l. i.

2x+y =0 3y−4z=0 3y−4z=0

−x+2y+z=0 y+3z=0 13z=0

b) {wv1, wv2, wv3} / wv1=vv1−vv2+vv3

wv2=2vv1+2vv2−vv3

wv3=4vv1+vv2

xwv1+ywv2+zwv3=0v

x(vv1−vv2+vv3)+y(2vv1+2vv2−vv3)+z(4vv1+vv2)=0v

(x+2y+4z)vv1+(−x+2y+z)vv2+(−x−y)vv3=0v

x+2y+4z=0 x+2y+4z=0 x+2y+4z=0 y=z=x=0 l. i.

−x+2y+z=0 4y+z=0 4y+z=0

x−y =0 3y=0 y=0

<u>Propiedades de la dependencia lineal.</u>

Todo conjunto de vectores que contengan el vector 0 es un conjunto de vectores l. d.

{vv1, vv2, ...vvn, 0v} l. d.

Un conjunto de vectores si uno al menos de ellos es una combinación lineal del resto son l. d.

{vv1, vv2, ...vvn} l. d. ! " vvi tal que vvi= vv1+ vv2+..... ivvi

Tiene la propiedad transitiva:

Si los vectores vv1, vv2,.....vvp dependen linealmente de los vectores wv1, wv2, ...wvr y cada wv depende linealmente de uv1, uv2, ...uvs entonces vv1, vv2,....vvp son combinación lineal de uv1, uv2, ...uvs.

Ejercicios:

a) Calcular K para que estos 3 vectores sean linealmente independientes:

{(1,2,k)(2,−1,3)(1,1,−1)}

b) Calcular a,b para que estos 3 vectores sean linealmente dependientes:

{(−2,a,2,b)(1,−1,2,3)(0,1,2,−1)}

- 1ª forma:

Si son dependientes existen combinaciones lineales de ellos que valen 0v con "0 Rouche

x1(1,2,k)+x2(2,−1,3)+x3(1,1,−1)=(0,0,0) xi"0

x1+2x2+x3=0 1 2 1

2x1−x2+x3=0 (A)<3 2 −1 1 =0 1+2k+6+k−3+4=0

kx1+3x2−x3=0 sol.dist. de la triv. K 3 −1 k=−8/3

Gauss

x3+2x2+x1=0 x3+2x2+x1=0 x3+2x2+x1=0 l.d. sol. dist. de la triv.

x3−x2+2x1=0 −3x2+x1=0 −3x2+x1=0 inf. sol./ sist. equiv. a un

−x3+3x2+kx1=0 5x2+x1(1+k)=0 (5+3+3k)x1=0 sist. con + incog. que ecu.

Se igualan los dos miembros de la 3ª ecuación:

8+3k=0

2ª forma

- vectores independientes: uno de ellos ha de ser combinación lineal de los otros 2

por ejemplo el primero:

$(1,2,k)=x1(2,-1,3)+x2(1,1,-1)$

$2x1+x2=1$ 2 1 1

$-x1+x2=2$ −1 1 2 (A)=2 luego (A/b)=2

$3x1-x2=k$ 3 −1 k A/b =0

$2k+6+1-3+4k=0$

$3k+8=0$

$k=-8/3$

2 1 1

0 3 5

0 −5 2k−3

2 1 1 $6k+16=0$

0 3 5 $k=-16/6$: $k= -8/3$

0 0 6k−9+25

<u>Sistemas de generadores:</u>

Generadores:

Los vectores vv1, vv2,...vvn son un sistema de generadores del espacio vectorial V si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de ellos:

{vv1, vv2,....vvn} s. g. de V!"xv"" xv= vv1+ vv2..... nvvn

Ejercicio:

Indicar si los conjuntos siguientes de vectores son generadores:

- {(1,−1)(2,3)} en !2
- {(−1,1)(1,3)(2,−1)} en !2
- {(1,1,−1)(1,0,1)(0,1,1)} en !3
- {(1,1,2)(−1,1,3)((1,3,1)} en !3
- {1+x2,1+x2,1+x+x2} en !2(x)

1 1 −1 0 1 1

0 1 1 1 −1 0 en x2

1 1 0 1 0 0 1 0

0 0 1 0 1 1 0 1 en M2x2

• Sea un vector cualquiera del espacio y le expresamos como combinación lineal de los vectores:

(a1,a2)=x1(1,−1)+x2(2,3)

x1+2x2=a1 1 2 a1 comp. det. " que sea a1,a2

−x+3x2=a2 −1 3 a2 (A)=2 (A/b)=2

Sol: " que sea a1,a2 serán generador Todo vector del espacio vectorial se puede

si únicamente tiene solución para al− expresar de forma única como expresión de

gunos valores de a1, a2 no serán gene− los dos generadores

radores.

• (a1,a2)=x1(−1,1)+x2(1,3)+x3(2,−1)

−x1+x2+2x3=a1 −1 1 2 a1 (A) (A/b)=2 x1+3x2−x3=a2 1 3 −1 a2 Comp. indet.

<incog

" vector se puede expresar de infinitas formas como combinación lineal de esos 3

Generadores

c)

d)

(a1,a2,a3)=x1(1,1,2)+x2(−1,1,3)+x3(1,3,1)

x1−x2+x3=a1 1 −1 1 a1

x1+x2+3x3=a2 1 1 3 a2

2x1−3x2+x3=a3 2 −3 1 a3

¿A?

• −1

1 1 "0 =2 por lo menos

A = 1−6−3−2+9+1=0

(a)=2

Sistema debe de tener solución (A/b) también tiene que ser 2

1 −1 a1

1 1 a2 =0

2 −3 a3

<u>Base de un espacio vectorial:</u>

Los vectores u1, u2,....un forman una base del espacio vectorial " si son un sistema de generadores y son un conjunto l. i.

B={u1,u2,.....un} base de " ! generadores / l. i.

Ejemplos:

A{(1,−1,2)(0,1,3)(1,−1,1)}en !3

B{(1,−1,1)(1,1,2)(2,0,3)} en !3

C{1+x2,−1+x+x2,x+2x2} en !2(x)

D 1 −1 1 1 −1 1 0 0

0 1 0 1 1 3 0 −1 en M2x2

1 −1 1 1 0 1

E 1 0 1 3 1 −1 en M2x2

F{(1,1,0)(0,1,0)(−1,1,1)(0,2,3)} en !3

A)

- Generadores:

(a1,a2,a3)=x1(1,−1,2)+x2(0,1,3)+x3(1,−1,1)

x1 +x3=a1 x1 +x3=a1 Comp. det. " que sea

a1,a2,a3

−x1+x2−x3=a2 x2 =a1+a2 x2=a1+a2

2x1+3x2+x3=a3 3x2−x3=a3−2a1 x3=3a1+3a2−a3+2a1=5a1+3a2−a3

x1=a1−5a1−3a2+a3=−4a1−3a2+a3

- Independientes

x1(1,−1,2)+x2(0,1,3)+x3(1,−1,1)=(0,0,0)

x1 +x3=0 x1=0

−x1+x2−x3=0 x2=0 solución única BASE

2x1+3x2+x3=0 x3=0 (nos queda el mismo sistema igualado a 0)

B)

- Generadores

x1(1,−1,1)+x2(1,1,2)+x3(2,0,3)=(a1,a2,a3)

x1+x2+2x3=a1 1 1 2 a1 (A)>= 2

−x1+x2 =a2 1 1 0 a2 A =0 (A)=2

x1+2x2+3x3=a3 1 2 3 a3

Para que sea compatible (A/b)=2

1 1 a1 a3+a2−2a1−a1−2a2+a3=0

1 1 a2 =0

1 2 a3

No son generadores

No son base. Todos los vectores tienen que cumplir esa condición y no todos la cumplen.

C)

- Generadores

(a0+a1x+a2x2)= (1+x2)+ (−1+x+x2)+ (x+2x2)

 − =a0 1 −1 0 a0

 + =a1 0 1 1 a1 (A)=2

 + +2 =a2 1 2 2 a2

 (A/b) debe ser 2

1 −1 a0 Unicamente son combinación lineal aquellos cuyos

0 1 a1 coeficientes cumplen esta condición. No son gen. No son Base

1 1 a2

D)

E)

- Generadores:

a b 1 −1 1 1 0 1

c d 1 0 1 3 1 −1

x+y =a x+y =a x+y =a x+y =a

−x+y+z=b 2y+z=a+b 2y+z=a+b 2y+z=a+b

x+y+z=c z=c−a z=c−a z=c−a

3y−z=d 3y−z=d −5z=2d−3a−3b 0=−8a−3b+5c+2d

para que el sistema tenga solución se tiene que cumplir la última ecuación. Únicamente son combinaciones lineales de esos tres elementos cumplan esa igualdad. No todas las matrices cumplen esa condición . No son generadores. No son base.

F)

- generadores

a1,a2,a3)=x1(1,1,0)+x2(0,1,0)+x3(−1,1,1)+x4(0,2,1)

x1 −x3 =a1 1 0 −1 0 a1

x1+x2+x3+2x4=a2 1 1 1 2 a2 (A)=3

x3+x3=a3 0 0 1 1 a3

(A/b) no puede tener − que 3 filas (A/b)=3 Sistema compatible indeterminado porque el   (A/b)<x con infinitas soluciones deopendientes de un parámentro. Todo vector se puede formar de infinitas formas como combinación de esos 4. Son generadores.

- Independientes:

(0,0,0)=x1(1,1,0)+x2(0,1,0)+x3(−1,1,1)+x4(0,2,1)

Son independientes y

Son BASE

Un espacio vectorial puede tener más de una base. ¿Qué relación existe entre las distintas bases de un espacio vectorial?

Teorema de la Base

Todas las bases de un espacio vectorial tiene el mismo número de vectores.

Demostración

Hay dos tipos de bases:

Generación finita: Aquellos que están engendrados por un número finito de vectores. Tiene un sistema de generadores que contienen un número finito de vectores:

!2, !3........!n Son espacios de generación −−>infinita[Author:A].

P.1 Todo espacio vectorial de generación finita posee una base.

" es un espacio vectorial H={ vv1,vv2,.....vvn} es un sistema de generadores de generación finita.

Los vectores de H son independientes H son base.

Los vectores de H sean dependientes No son base. Consideramos el conjunto H el número máximo de vectores independientes.

T={vv1,vv2,..vvn} el resto n−k serán dependientes de ellos.

T es una base

T son independientes.

¿Son generadores? Cualquier vector de " hay que probar que todos los vectores de H son combinación lineal de T.

Xv c.l.{vv1,vv2......vvk,vvk+1.........vvn} vvk+1.......vvn c.l. de los vectores que van del 1 hasta el k.

{vv1,vv2.........vvk}=Xv c.l. Propiedad transitiva son base de ".

P.2. Si " espacio vectorial posee una base formada por n vectores cualquier conjunto vector formado por n vectores independientes es otra base.

" base B={uv1,uv2,........uvn}

H={vv1,vv2.........vvn} independientes H es otra base.

Vector H son independientes¿Son generadores?

H sistema de generadores cualquier vector del espacio es c.l. de los vectores de H.

"x""c.l. de H

El conjunto B por ser base el un sistema de generadores.

Cualquier vector del espacio es c.l. de ellos. En particular el primer vector de H.

B es un sistema de generadores vv1 es c.l. de B.

Vv1= uv1+ uv2..... nuvn En esta relación algun "0 porque si todos los =0 al sustituir nos quedaría que vv1=0 que no puede ser porque vv1 es de un sistema independiente

"0 despejamos vv1 uv1=(1/)vv1−(/)uv2........−(n/)uv1

uv1 es c.l. {vv1,uv2,......uvn}=H1 H1 es un sistema de generadores.

Si xv es un vector cualquiera x es c.l. de los vectores de la base B={uv1,uv2,........uvn} entonces el uv1 puede ser sustituido por un c.l. de los vectores de vv1,uv1.......uvn.

xv=c.l. {uv1{vv1,uv2...uvn},uv2.....uvn}

vv2 también será c.l. de H2={vv1,vv2,uv3,uv4.....uvn}

Son un sistema de generadores del espacio.

Sustituyes uv1 por vv1 etc... Iterando el proceso n veces el conjunto H es un sistema de generadores y como eran independientes forman base.

P.3. Si un espacio vectorial " posee una base formada por n vectores en ese espacio vectorial no puede haber más de n vectores independientes.

- si B={uv1,uv2..........uvn} base de "

y H={vv1,vv2..........vvp} independientes !n"p

Si p>n contradicciónp>n y los vectores de H son independientes los n primeros seguirán

siendo independientes.

{vv1,vv2....vvn}l.i. resto {vvn+1,vvn+2.....vvp} c.l. por la propiedad 2

Contradicción 1−p son independientes p>n

1−n son independientes n−p c.l. dependientes.

P.4. Teorema de la Base.

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Supongamos de bases de "

B={uv1,uv2..........uvn} Base de "

B´={vv1,vv2..........vvp}Base de " n=p

En primer lugar:

p"n

B´ es base y B al ser base son independientes. Por P.3. el número de vectores independientes es menor o igual que el número de vectores independientes de la otra base.

p=n

Dimensión:

Llamaremos Dim. de un espacio vectorial al número de vectores que tienen sus bases.

!2 2 Dim. 2 vectores.

Bases Canónicas.

!2{(1,0)(0,1)}

!3{(1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)}

!n{(1,0,0,......0),(0,1,0,.........0),(0,0,1,............0),..........(0,0,0,............1)}

1 0 ....0 0 1 ....0 0 0 0

0 0 ....0 0 0 ....0 0 0 0

.... M2x2

0 0 ....0 0 0 0 0 0 1

!n(x) n+1 dim {1,x,x2............xn}

Consecuencias prácticas:

La Dim de " es el número de vectores que tienen sus bases.

La Dim es el número máximo de vectores independiente que tiene ese espacio.

La Dim es el número mínimo de vectores que se necesita para engendrar ese espacio.

Si conocemos la Dim de un espacio vectorial para demostrar que un conjunto de vectores es una base de ese espacio bastará con comprobar que su número coincide con la Çdim y comprobar si es generador o independiente.

Ejemplo:

Sea " un espacio vectorial y en el una base formada por ev1,ev2,ev3. Sean H1,H2 y H3 los siguientes conjuntos:

B={ ev1,ev2,ev3}

H1={uv1,uv2,uv3} uv1= ev1+ ev2 / uv2= ev1+ ev3 / uv3= uv2+uv3

H2={vv1,vv2} vv1= ev1−ev2 / vv2= ev1+ev2+ev3

H3={wv1,wv2,wv3,wv4} wv1= ev1+ev2+ev3 / wv2= ev1− ev3 / wv3=2ev1− ev2 / wv4= −ev1−ev2−ev3

Estudiar si son base de ese espacio:

H2 no es base porque el espacio es de tres dimensiones y H2 tiene 2 vectores nada más. Número mínimo 3

H3 no es una base porque el espacio es de tres dimensiones y H3 tiene 4 vectores pueden ser generadores nº mínimo 3 pero no son independientes nº máximo 3.

H1 tiene 3 vectores y es de tres dimensiones. Demostraremos si es base demostrando únicamente si son independientes.

Tutoría del 26 de octubre de 1999:

− Ejercicio junio 99

a) Hallar los valores de K para que éstas matrices formen base del espacio de las matrices 2x2.

1 0 2 −1 0 1 −1 3

0 0 2 1 2 1 3 K

Para que un conjunto de vectores formen base tienen que ser independientes

1 0 2 −1 0 1 −1 3 0 0

0 0 + 2 1 + 2 1 + 3 K = 0 0

+2 − =0

− + +3 =0

−2 +2 +3 =0

+ +K =0

1 2 0 −1 −1 1 3

0 −1 1 3 "0 A = 1* 2 2 3

0 2 2 3 1 1 K

0 1 1 K

−2K+3+6−6+3−2K=6−4K=0 K=3/2

Son Base si A "0!K"3/2

- Cuando no sean Base expresar la cuarta matriz como combinación lineal de las otras tres:

−1 3 1 0 2 −1 0 1

=x +y +z

3 3/2 0 0 2 1 2 1

−1=x+2y −1=x+2y

3= −y+ z 3 = −y+ z y=(9/4)−3=−3/4

3= 2y+2z 9 = 4z z=9/4

3/2= y + z 9/2= 2z x=−1+(6/4)=2/4=1/2

- Demostrar que los polinomios siguientes forman Base del espacio de los polinomios de grado menor igual que 3.

{1,x−1,(x−1)2,(x−1)3}

Dim !3(x)=4hay 4 polinomios por lo que bastará con ver que son independientes.

*1+ (x−1)+ (x−1)2+ (x−1)3 =0

Desarrollar; ordenar en potencias, igualar coeficientes en ambos miembrros.

x=1; si sustituyo:

+2 (x−1)+3 (x−1)2=0 He derivado

x=1

2 +3*2 (x−1)=0 He vuelto a derivar

x=1 2 =0

3*2 =0

=0

Son Base porque todos son 0

− Ejercicio de septiembre del 99

Sea " en espacio vectorial sobre ! y B={uv1,uv2,uv3} una base de ".

Probar que B´={vv1,vv2,vv3} es otra base si :

vv1= uv1

vv2= −uv1+uv2

vv3= uv1−uv2+uv3

Hay que ver si son independientes:

vv1+ vv2+ vv3=0

Se sustituye:

uv1+ (−uv1+uv2)+ (uv1−uv2+uv3)=0v

(− +)uv1+(−)uv2+ uv3=0v

− + =0 = 0

− =0 =0

=0 =0

Hallar las coordenadas de los vectores de B respecto de los vectores de B´.

vv1+ vv2+ vv3=uv1

uv1+ (−uv1+uv2)+ (uv1−uv2+uv3)=uv1

(− +)uv1+(+)uv2+ uv3=uv1

− + =1 =0

− =0 =0

=0 =1

Se hace lo mismo pero igualando a uv2 y queda:

− + =0 =0

− =1 =1

=0 =1

Se hace lo mismo pero igualando a uv3 y queda:

− + =0 =1

− =0 =1

=1 =1

1 + n

{1+xn,x+xn,x2+xn,...........xn−1+xn,xn+xn}

Demostrar que estos polinomios son una base de !n(x):

Hay que probar que son independientes:

a0 (1+xn)+a1(x+xn)+................an−1(xn−1+xn)+an(xn+xn)=0!

a0=0

a1=0

....

$a_{n-1}=0$

$a_n=0$

Coordenadas:

Sea B={ev1,ev2........evn} base de " y sus vectores generadores e independientes.

"xv"" xv=x1ev1+x2ev2+..........xnevn Coordenadas (x1,x2........xn)

xv coord. (x1,x2........xn) resp. de B={ev1,ev2........evn} ! xv=x1ev1+x2ev2+..........xnevn

(de examen)

- Supongamos que esta base M del espacio de las M2x2. Hallar los vectores de ese espacio cuyas coordenadas respecto de x son (x,2x,3x,4x).

M= 1 0 2 −1 0 1 −1 3

0 0 2 1 2 1 3 1

L={A/A=x 1 0 +2x 2 −1 +3x 0 1 +4x −1 3

0 1 2 1 2 1 3 1

={A/A= x 13x ={A/A=x 1 13

22x 9x 22 9

Dada en !3 la base B={(1,−1,1)(0,1,2)(1,2,5)} hallar las coordenadas del vector yv=(1,−1,2) respecto de ella

(1,−1,2)=y1(1,−1,1)+y2(0,1,2)+y3(1,2,5)

y1 + y3= 1 y1 + y3= 1 y1 + y3=1

− y1+ y2+2 y3=−1 y2 +3 y3= 0 y2 +3y3=0

y1+2y2+5 y3= 2 2y2+4 y3= 1 −2y3=1

y3=−1/2, y2=3/2 y1=3/2

Sea " espacio vectorial y B={e1,e2,e3} una base del mismo. Sea B´={vv1,vv2,vv3} donde vv1= e1−e2 ;

vv2= e1+e3 ; vv3= 2e1−e2−e3.

- Probar que B´es otra base:

Hay que probar que son independientes

- Si uv(−1,2,1) tiene coordenadas respecto de B ¿ cuáles son sus coordenadas respecto de B´?
- Si zv (−2,2,1) tiene coordenadas respecto de B´¿ cuáles son sus coordenadas respecto de B?
- ¿ Qué vector del espacio tiene las mismas coordenadas respecto de las 2 bases?

b)uv=−e1+2e2+e3=a1vv1+a2vv2+a3vv3=a1(ev1−ev2)+a2(ev1+ev3)+a3(2ev1−ev2−ev3)=

=(a1+a2+2a3)ev1+(−a1−a3)ev2+(a2−a3)ev3=

−1= a1+a2+2a3 −1= a1+a2+2a3 −1= a1+a2+2a3

2=−a1 − a3 3= −a2 −3a3 3= −a2− 3a3

1= a2 −a3 1= a2 −a3 4= −4a3

a3=−1 ; a2=0 ; a1=1

c)zv=−2vv1+2vv2+vv3=−2(ev1−ev2)+2(ev1+ev3)+ (2ev1−ev2−ev3)=2ev1+ev2+ev3

Las coordenadas son (2,1,1)

- (a1,a2,a3) son las coordenadas de un vector respecto de B y B´.

a1ev1+a2vv2+a3vv3=a1vv1+a2vv2+a3vv3

a1(ev1−ev2)+a2(ev1+ev3)+a3(2ev1−ev2−ev3)

a1=a1+a2+2a3 −a1−a2− a3=0 a3=0

a2=−a1 − a3 −a2−2a3=0 a2=0

a3= a2 − a3 −a2−2a3=0 a1=0

El único vector que tiene las mismas coordenadas respecto de las 2 bases es (0,0,0)

- Las coordenadas de un vector respecto a una base dependen del vector y de la base.
- Las coordenadas de un vector respecto de la base canónica son sus componentes. En !n, M2x2, en los

!n son sus −−>coeficientes[Author:A].

- c={x,y,z /x−y=3}

vv=(x,y,z)

uv=(x´,y,z´) ¿vv , uv " c ?

por hipótesis

x−y =3 vv+uv=(x+x´,y+y´,z+z´)

x´−y´=3 para que sea de c

x+x´−(y+y´)=3

x+x´−(y+y´)"3

3 + 3 =6"3

no es

- D={A/ AB=BA}

A1 y A2 " D ¿ A1 + A2 " D?

Por hipótesis

A1*B=B*A1 (A1 + A2)*B=B(A1+A2)

A2*B=BA2 (A1 + A2)*B=A1*B+A2*B

=B*A1 +B*A2

=B(A1+A2)

Si A1 " D ¿ *A1 " D?

Se debe cumplir: (A1)B=B(A1)

(A1)B= (A1B)= por hipótesis BA1

Luego es subespacio.

Cálculo de D:

1 0

B= −1 2

a b 1 0 1 0 a b

c d −1 2 = −1 2 c d

a−b 2b a b

c−d 2d = −a+2c −b+d

a− b =a b=0

2b =b b=0

c− d =−a + c a−c−d=0

2d =−b+2d

x+y 0 c+d 0

D= x y c d

- {B/3f(1)=f(2)}

f, g " E ¿f+g " E?

¿ f " E?

Por hipótesis

3f(1)=f(2) Debería ser:

3g(1)=g(2) 3+(f+g)(1)=(f+g)(1)!3[f(1)+g(1)]=3f(1)+3g(1)

3f(1)+3g(1)=f(2)+g(2)

3(f(1)+g(1)=f(2)+g(2) f(2)+g(2)=(f+g)(2)

3(f)(1)=3 f(1)= f(1)= f(2)=(f)(2)

si es subespacio.

F! no es subespacio

{xv/= vv1+ vv2+......... pvv xvp} un conjunto muy importantes de vectores es el formado por

una c.l. de vectores de p.

L{vv1+vv2+.........vv }variedad lineal

Calcular el subespacio engendrado por:

l{(1,−1,2,3)(2,1,−1,1)}={(x1 ,x2,x3,x4)/ (x1 ,x2,x3,x4)= (1,−1,2,3)+ (2,1,−1,1)}

ejemplo =2

=1 (0,−3,5,5) Vector que pertenece a ese subespacio.

x1= +2

x2=− + Ecuaciones paramétricas del subespacio

x3=2 − (los parámetros son y)

x4=3 +

, "!

Si despejamos los parámetros ! Ecuaciones cartesianas

=x1−2 ! =x1+x2/3

x2=−x1+2 + x3=2x1−5((x1+x2)/3) 3x3=6x1−5x1−5x2

x3=2x1−4 − x4=3x1−5((x1+x2)/3) 3x4=9x1−5x1−5x2

$x4=3 -6 +$

$x1-5x2-3x3 =0$

$4x1-5x2 -3x4=0$

Los subespacios vectoriales son espacios vectoriales que contienen sistemas de generadores , bases y dimensión−

Su base es un conjunto de generadores de su subespacio que sean independientes.

La dimensión es el número de vectores de la base del subespacio.

La dimensión del subespacio vectorial será menos o igual que la del espacio total.

- {0v}""
- " " "

Ejemplos

Calcular un sistema de generadores , una base y la dimensión de los siguientes subespacios:

M=£{(1,−1,1)(3,1,−2)(4,0,−1)}

N= {(x−2y,2x+y,−x+y)/x,y "!}

P= {(x,y,z)/x+y−z=0}

R= {(x,y,z, t)/x−y+z−t=0 ; 2x+y−z−t=0}

T= {A/ AB=BA B= 1 0

−1 2

M) 1 −1 1

= 3 1 −2 =2

4 0 −1

−1+8−4−3=0 A =0 dim M=2

BM={(1,−1,1)(3,1,−2)}

BM={(1,−1,1)(4,0,−1)}

N)

(x−2y,2x+y,−x+y)=(x,2x,−x)+(−2y,y,y)

=x(1,2,−1)+y(−2,1,1)

$N=£\{(1,2,-1)(-2,1,1)\}$

Dim $N=2$

1 2 −1

= −2 1 1 Base $N=\{(1,2-1)(-2,1,1)\}$

P) $\{(x,y,z)/x+y-z=0\}$

$x+y-z=0$ $x=-y+z$

y=

z=

x=− +

{(− + , ,)}$=£\{(-1,1,0)(1,0,1)\}$

dim $P=2$

−1 1 0

1 0 1 =2 $BP=\{(-1,1,0)(1,0,1)\}$

- $x- y+ z- t=0$

$2x+ y - z- t=0$ $3x+2t=0$ $x=2t/3$

1 −1 1 −1 0 $x -y= -z+ t$ z=

2 1 −1 −1 0 $2x+y=z+t$ t=

$3x=2t$

x−y=− +

2x+y= +

3x=2 x=2/3

y= −1/3

z=

t=

$R=£\{(0,1,1,0)(2/3,-1/3,0,1)\}$

$(2,-1,0,3)$

dim H = n− (A)

c+d 0

A= c 0 (c,d "!)}=£ 1 0 1 0

1 0 0 1

c+d 0 = c 0 + d 0 = c 1 0 +d 1 0

c d c 0 0 d 1 0 0 1

dim =2 dim (A)= 1 0 1 0 =2

1 0 0 1

1 0 1 0

base= 1 0 0 1

Operaciones con subespacios:

Sea " espacio vectorial; H y L dos subespacios

H"L={vv/vv"H y vv"L}

H H"L={vv/vv"H o vv"L}

Si H y L son subespacios ¿Lo serán H"L y H"L?

Si H y L son subespacios H"L es subespacio.

Teorema de caracterización 1º vv+wv " H"L

Sean vv y wv " H"L !

2º vv"H"L

Hipótesis

vv"H vv"L H es subespacio!vv+wv"H

wv"H wv"L ! vv+wv"H"L

L es subespacio!vv+wv"L

H es subespacio vv"H

! vv"H"L

L es subespacio vv"L

La unión de otros dos subespacios no tienen porque ser subespacios. Tengo que hallar un ejemplo para que no se verifique.

Contraejemplo:

"=!2 H={(a,0)}

L={(0,b)}

H"L={vv/vv=(a,0) o vv=(0,b)

vv=(1,0)"H"L

vv+wv=(1,1) "H

wv=(0,1)"H"L "H"L

"L

<u>Suma de subespacios:</u>

H+L={vv/vv=xv+yv;xv"H e yv"L}

Suma de dos subespacios es un conjunto de aquellos vectores que se pueden expresar como suma de un vector del primer subespacio y suma del segundo. Demostrar que la suma de subespacios es otro subespacio. (pag. 17 Álgebra lineal para la economía)

Se dice que dos subespacios son independientes cuando su intersección es el vector 0v Cuando esto ocurre, los vectores de la suma se pueden expresar de forma única como suma de un vector de H y de un vector de L.

H"L={0v} Suma directa. H"L

Dos subespacios son complementarios cuando su suma sea el espacio " y cuando su intersección sea 0v

H y L son complementarios H+L="

H"L={0v}

Dimensión de la suma de dos subespacios con la suma de la intersección es:

dim(H+L)+dim(H"L)=dim H + dim L

En el caso de que H y L sean complementarios:

dim(H"L)=0

dim H + dim L= dim "

<u>Ejemplos</u>:

− Sea H el conjunto de vectores de !4 tales que:

$x1+x2-2x3+x4=0$

− Sea L el conjunto de vectores de !4 que son combinación lineal de:

(1,−1,0,1) y (1,2,1,−1)

H={xv"!4/ x1+x2−2x3+x4=0}

L=£{(1,−1,0,1)(1,2,1,−1)}

- Hallar la dimensión y una base de H y L.
- Hallar las distintas ecuaciones, la dimensión y una base de H+L y H"L.
- Indicar si H+L es suma directa.
- Ampliar una base de H hasta obtener una base de !4.
- Obtener un subespacio complementario de L.
- Comprobar la relación entre si de los 4 subespacios.

1.

Hgeneradores

Nos sobran 3 ecuaciones paramétricas.

x4=−x1−x2+2x3 x1=

x2=

x3=

x4=− − +2

H=£{(1,0,0−1)(0,1,0−1)(0,0,1,2)}

1 0 0 −1

dim H= 0 1 0 −1 =3 BH={(1,0,0,−1)(0,1,0,−1)(0,0,1,2)}

0 0 1 2

L Tenemos los generadores

Queremos la dim

1 −1 0 1

dim L= 1 2 1 −1 BL={(1,−1,0,1)(1,2,1,−1)} dim L=2

2.

H+L={vv/vv=xv+yv ;xv"H,yv"L}={vv/vv= (1,0,0,−1)+ (0,0,1,2)+ (0,0,1,2)+ (1,1,0,1)+ (1,2,1,−1)}

n: vector de H que será combinación lineal de BH

=£{(1,0,0,−1)(0,1,0,−1)(0,0,1,2)(1,−1,0,1)(1,2,−1,1)}

Para hallar la suma de 2 subespacios se necesitan los sistemas de generadores de los 2 subespacios (ecuaciones paramétricas).La suma de dos subespacios es aquel subespacio que está engendrador por un sistema de generadores del primero más un sistema de generadores del 2º.

Si queremos la dimensión y tenemos los generadores:

1 0 0 −1

0 1 0 −1

dim H+L= 0 0 1 2 =4

1 −1 0 1

1 2 −1 1

1 0 0 −1

0 1 0 −1 1 0 −1

0 0 1 2 =1 0 1 −1 = 1

−1 −1 0 1 1 −1 1

dim H+L

!4 dim 4H+L=!4

3.

H"L Necesitamos las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios:

H Tenemos las ec.

L Hallamos las ec.

(x1,x2,x3,x4)=x(1,−1,0,1)+ (1,2,1,−1)

x1= + x1= +x3 =x1−x3

x2=− +2 x2=− +2x3 x2=−x1+x3+2x3

x3= x4= −x3 x4=x1−x3−x3

x4= −

L={xv"!4/x1+x2−x3=0 ; x1−2x3−x4=0}

H"L={x1"!4/xv"H y xv"L}={(x1,x2,x3,x4)/Por pertenecer a H x1+x2−2x3+x4=0

$x1+x2-x3 =0$

Por pertenecer a L $x1 -2x3-x4=0$

dim (H"L) ecuaciones paramétricas sistema de generadores resolvemos sistema

1 1 −1 1 0 x1+x2−2x3=−x4 x1+x2−2x3=−x4 x4=

1 1 −3 0 0 x1+ x2− x3= 0 −x3=x4 x3=−

1 0 −2 −1 0 x1 −2x3=x4 −x2 =2x4 x2=−2

x1=−

1 1 −2

1 1 −3 =−1 =3 dim H"L=4−301

1 0 −2

£{(−1,−2,−1,1)} Base de la intersección

4.

H y L ¿Son independientes?

H"L={0v}

H"L"{0v } No son independientes porque su intersección es de dimensión 1. Para que fueran independientes es resultado del sistema tenía que ser el vector 0.

5.

Para que la suma sea directa los subespacios que se suman sean independientes. Como no lo son la suma no es directa.

6.

H""

BH={vv1,vv2......vvH} dim " =H

¿BN?={ vv1,vv2......vvH uvH+1.....uvn}

Se añaden a la BH n−H vectores independientes de ellos, de BH.

"=!4dim 4 4−3 se añade 1 vector nuevo cualquiera independiente de los 3

dim H dim 3

BH=(1,0,0,−1)(0,1,0,−1)(0,0,1,2)( )}

1 0 0 −1

0 1 0 −1 "0 (inf. formas)

0 0 1 2

a b c d

Para que formen base el det."0

Menor de orden 3 distinto de 0 y se añade el vector de base canónica que tenga el 1 en una columna que no forme parte del menor de orden 3.

1 0 0 −1

0 1 0 −1 "0

0 0 1 2

0 0 0 1

ej. 3 −1 2 1

−3 1 3 −2

1 0 0 0

0 0 0 1

Subespacio complementario

Base de L BL{(1,−1,0,1)(1,2,1,−1)}

Ampliamos la Base a una base del espacio total

1 −1 0 1

1 2 1 −1 Lc=£{(0,0,1,0)(0,0,0,1)}

0 0 1 0

0 0 0 1

6.

Relación entre dim y subespacio

Dim (H+L)+dim(H"L)=dim H+ dim L

4 + 1 = 3 + 2

- sea " un espacio vectorial sobre ! y el conjunto A una base de ". Razonar si este conjunto está formado por vectores dependientes o independientes.

A={vv1,vv2,vv3,vv4}

B={uv1,uv2,uv3}

uv1= 2vv1+vv2+vv3+3vv4

uv2= 2vv2+vv33vv4

uv3= −2vv1+5vv2+vv3+3vv4

uv1+ uv2+ u3=0v

( )+ ( )+ ( )=0v

Sacamos factor común a v. Sistema sol. trivial: independientes

inf. soluciones: dependientes

formamos la matriz cuyas coordenadas sean las filas

2 −1 1 3

0 2 1 3 =0 3 vectores independientes

−2 5 1 3 =2

Hallamos el rango si =3 independientes

<3 dependientes

b) Determinar la dimensión y una base del subespacio engendrado por estos 3 vectores £={uv1,uv2,uv3}

La dimensión será el número máximo de generadores independientes. 2 por el .

La base la forman 2 de los 3 con tal de que fueran independientes.

B={uv1,uv2}

- Ampliar la base de este subespacio hasta tener una base de ".

2 −1 1 3

0 2 1 3 {uv1,uv2,vv3,vv4}

0 0 0 1

0 0 0 1

Sea L el conjunto de aquellos vectores xv de !4 tales que la suma de sus coordenadas vale 0. Probar que L es subespacio de !n. Hallar su dimensión y una base.

L={xv=(xv1,xv2,xv3..........xvn)"!n/ xv1+xv2+xv3..........+xvn=0}

Teorema de carácter debe cumplirse que

xv=(xv1,xv2........,xvn)"L xv+yv"L

yv=(yv1,yv2........,yvn)"L xv"L

Hipótesis tesis

xv1+xv2..........+xvn=0 xv1+yv1+xv2+yv2+...............+xvn+yvn=0v

yv1+yv2..........+yvn=0 xv1+ xv2..........+ xvn=0

Por hipótesis

xv1+yv1+xv2+yv2+...............+xvn+yvn=0v

0 + 0 + + 0 =0

xv1+ xv2..........+ xvn= (xv1+xv2..........+xvn)= =0

es un −−>subespacio[Author:A].

Dimensión y Base:

{x/x1+x2+..........+xn=0} Ecuaciones cartesianas

Ec. Paramétricas

x1=−x2−x3..........−xn−1−xn

x2=

x3=

....

xn= n

(n−1 par) x1=− − −..........− n

£{(−1,1,0,0.......,0)(−1,0,1,0,0,...........,0)...........(−1,0,0,0...............0,1)}

−1 1 0 0 . . . 0 0

−1 0 1 0 . . . 0 0

−1 0 0 1 . . . 0 0

dim . . . . =n−1 dim n−1

−1 0 0 0 . . . 1 0

−1 0 0 0 . . . 0 1

Sea H el conjunto de vectores H={(x,0,0,1)(0,x,1,0)(0,1,x,0)(1,0,0,x)}

a)¿Para qué valores de x es H base de !4?

b)Para aquellos valores de x para los que H no es base de !4 ¿Cuál es la dimensión del subespacio engendrado por H? Dar una base del subespacio.

a) para aquellos vectores en los que estos vectores sean independientes

x 0 0 1 0 0 0 1 0 x 1

= 0 x 1 0 =4 "0 0 x 1 0 = 0 1 x =

0 1 x 0 0 1 x 0 1−x2 0 0

1 0 0 x 1−x2 0 0 x

(C1−xC4)

=−[x2(1−x2)−(1−x2)]=−[(1−x2)(x2−1)]=(1−x2)2 1−x2=0 x=−1; x=1

H es base de !4 para todo x"!4 excepto para x=1 y x=−1.

b)

- x=1

P=£{(1,0,0,1)(0,1,1,0)(0,1,1,0)(1,0,0,1)}

Dim P número máximo de generadores independientes

1 0 0 1

= 0 1 1 0 =2 Bp={(1,0,0,1)(0,1,1,0)}

0 1 1 0

1 0 0 1

- x=−1

P´=£{(−1,0,0,1)(0,−1,1,0)(0,1,−1,0)(1,0,0,−1)}

Dim P´número máximo de generadores independientes

−1 0 0 1

0 −1 1 0 =2 BP ={(−1,0,0,1)(0,−1,1,0)}

0 1 −1 0

1 0 0 −1

16.b−. Sea M =(vv1,vv2,vv3,vv4) donde wv= vv1+vv2+vv3,kvv4

¿Qué condición se ha de cumplir para que M sea otra base de"? En ese caso ¿Cuál serían las coordenadas de vv4 respecto de M?

vectores independientes

B= {vv1,vv2,vv3,vv4}

1 0 0 0

B=det"0 0 1 0 0 = B =k Para que sea base k"0

0 0 1 0

1 1 1 k

¿Cuáles son las coordenadas de vv4 respecto de M?

Despejar vv4 respecto de vv1,vv2,vv3,wv

vv4=(−1/k)vv1−(1/k)vv2−(1/k)vv3+(1/k)wv

Las coordenadas son: =(−1/k,−1/k,−1/k,1/k)

14.a−. Sea M={X/aX=0} donde A= 2 −1 y X"M2x2

−4 2

- Probar que M es un espacio vectorial del espacio M2x2.

Tema de caracterización

Si X1 y X2"M! X1+X2"M

X1"M

Hipótesis Tesis

AX1=0 A(X1+X2)=0

AX2=0 Demostración

A(X1+X2)=AX1+AX2=0+0=0

Tesis

A(X1)=0

Demostración

A(X1)= AX1= =0

- Hallar la dimensión y una base de M

Cálculo de los vectores de las matrices de M.

2 −1 a b 0 0 2a−c=0 2a−c=0

−4 2 c d 0 0 2b−d=0 2b−d=0

−4a+2c=0 c=2a

−4b+2d=0 d=2b

AX=0 X=A−10 " A−1 porque determinante =0

a b (a,b"!)}£ 1 0 0 1

2a 2b 2 0 0 2

a b = a 0 + 0 b = a 1 0 + b 0 1

2a 2b 2a 0 0 2b 2 0 0 2

dim M= 1 0 2 0 =2

0 1 0 2

BM= 1 0 0 1

2 0 0 2

- Hallar la dimensión y una base de M+N donde

N= a+b a+2b /a,b"!}=£ 1 1 1 2

a+2b 4b 1 0 2 4

M+N=£ 1 0 0 1 1 1 1 2

2 0 0 2 1 0 2 4

1 0 2 0

dimM+N= 0 1 0 2

1 1 1 0

1 2 2 4

Rango es por lo menos 2 menor de orden 2"0

Rango es por lo menos 3 menor de orden 3"0

1 0 0 0 1 0 2

C3−2C1 0 1 0 2 = 1 −1 0 =0

1 1 −1 0 2 0 4

1 2 0 4

=3dim 3

BM+N= 1 0 0 1 1 1

2 0 0 2 1 0

£M+N = 1 0 0 1 1 1

2 0 0 2 1 0

- Hallar la dimensión y base de M"N

Necesitamos las ecuaciones cartesianas

Dimensión Relación entre dimensión y sus subespacios

Dim M+Dim N=Dim M+N+Dim M"N

2 + 2 = 3 + x Dim M"N=x=1

M ecuaciones cartesianas

x1 x2 x1 x2 = a b =M

x3 x4 x3 x4 2a 2b

x1=a

x2= b

x3=2ax3=2x1

x4= 2bx4=2x2

M= x1 x2 2x1 −x3 =0

x3 x4 2x2 −x4=0

N= x1 x2 x1 x2 = a+b a+2b

x3 x4 x3 x4 a+2b 4b

ecuaciones paramétricas

x1=a+b b=x1−a a=2x1−x2

x2=a+2b x2=a+2x1−2a x3=2x1−2x1−x2

x3=a+2b x3=a+2x1−2a x4=4x1−4(2x1+x2)

x4=4b x4=4x1−4a

N= x1 x2 x2−x3 =0 M''N= x1 x2 2x1 −x3 =0

x3 x4 4x1−4x2 +x4=0 x3 x4 2x2 −x4=0

x2 −x3 =0

4x1−4x2 +x4=0

2x1 −x3 =0 2x1 −x3 =0 x4=a

2x2 −x4=0 2x2−x3 =0 x3

x2 −x3 =0 −2x3+x4=0

4x1−4x2 +x4=−−>0[Author:A]

21/07/04 ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

MATEMÁTICAS

1

27

Impreso hasta aquí 25/10/99

Impreso hasta aquí 7/11/99

Impreso hasta aquí 13/11/99

Impreso hasta aquí 18/11/99

−3a1−a2+2a3=0

=0

=0

=0

dependientes