

TEMA 2: APLICACIONES LINEALES

• Introducción

Las aplicaciones lineales son funciones que conservan las operaciones de los espacios vectoriales.

Son funciones entre espacios vectoriales que conservan las operaciones de estos espacios.

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Una aplicación E de E en F es lineal si:

- La imagen de una suma es la suma de las imágenes.
- La imagen de un número por un vector es el número por el vector.

E, F espacio vectorial sobre K

F: E → F es lineal

- $f(vv + ww) = f(vv) + f(ww)$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

A los vectores del espacio inicial se les llama originales y a los vectores del espacio final se les llama imágenes o funciones. Para que una función sea lineal han de conservarse las operaciones de los espacios.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$f(2, 3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

$$\text{Sea } vv = (x_1, x_2)$$

$$ww = (x'_1, x'_2)$$

$$- f(vv + ww) = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = 2(x_1 + x'_1) + 3(x_2 + x'_2) = 2x_1 + 2x'_1 + 3x_2 + 3x'_2 = f(x_1, x_2) + f(x'_1, x'_2) = f(vv) + f(ww)$$

$$- f(\lambda vv) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 = \lambda(2x_1 + 3x_2)$$

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 \cdot x_2)$$

$$f(3, 4) = (3, 2 \cdot 4) = (3, 12)$$

$$\text{Sea } vv = (x_1, x_2)$$

$$ww = (x'_1, x'_2)$$

$$- f(vv + ww) = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (x_1 + x'_1, (x_1 + x'_1)(x_2 + x'_2)) = (x_1 + x'_1, x_1 \cdot x_2 + x'_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x'_2 + x'_1 \cdot x'_2) =$$

$$=f(vv)+f(wv)=f(x_1, x_2)+f(x'_1, x'_2)=(x_1, x_1 * x_2)+(x'_1, x'_1 * x'_2)=(x_1+x'_1, x_1 * x_2+x'_1 * x'_2)$$

$$f(vv+wv)=f(vv)+f(wv)$$

- Sea f :

$$f(x)=ax \quad a \in \mathbb{R}$$

- Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$D(f(x))=f'(x)$$

$$D[f(x)+g(x)]=(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)=D(f(x))+D(g(x))$$

$$D[f(x)] = (f(x))' = f'(x) = D(f(x))$$

2. Conceptos

Cuando la aplicación lineal es:

- **Inyectiva:** Una aplicación lineal es inyectiva cuando a una misma imagen no la pueden corresponder originales distintos. Se la llama monomorfismo.

No es monomorfismo Si es monomorfismo

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$$

$$f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$$

- **Suprayectiva o sobre:** cuando todos los vectores del espacio final se corresponde con alguno del espacio original. Se llama Epimorfismo.

Suprayectiva

- **Biyectiva:** f es sobreyectiva e inyectiva. Se la llama Isomorfismo.

Biyectiva

- Si el espacio inicial es el mismo que el espacio final se denomina Endomorfismo.
- A un isomorfismo de un espacio vectorial en si mismo se llama Automorfismo.

- **Imagen y núcleo de la aplicación.**

La imagen de la aplicación lineal es el conjunto de vectores en el espacio final que se corresponde con alguno en el espacio inicial.

$$\text{Im}(f) = \{ y \in E \mid \exists x \in E, f(x)=y \}$$

Imágenes

El núcleo de la aplicación lineal (N, Ker) es el conjunto de aquellos vectores del espacio inicial que se transforma en 0.

$$N(f) = \text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

• **Propiedades de las aplicaciones lineales.**

1. *Las aplicaciones lineales conservan las combinaciones lineales.* Transforman las combinaciones lineales del espacio inicial en combinaciones lineales del espacio final.

$$f(v_1 + v_2 + \dots + p v_p) = f(v_1) + f(v_2) + \dots + p f(v_p)$$

2. *En cualquier aplicación lineal la imagen del vector 0 en el espacio inicial es igual (0) en el espacio final.*

$$v + 0v = v; f(v + 0v) = f(v)$$

$$f(v) + f(0v) = f(v)$$

$$f(0v) = 0F$$

3. *Las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal.* Transforman vectores linealmente dependientes en vectores linealmente dependientes.

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ son l.d. $\{f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_p)\}$ l.d.

No ocurre lo mismo con la independencia lineal. Las imágenes con una aplicación lineal con vectores linealmente independientes no tienen porque ser linealmente independiente.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -3x_1 + 6x_2)$$

$$\{(2, -1), (3, 4)\} \text{ l.i. } 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -2 \neq 0$$

• 4

$$f(2, -1) = (4, -12) \quad 4 \cdot (-12) = -48 \neq 0 \text{ l.d.}$$

$$f(3, 4) = (-5, 15) \quad -5 \cdot 15 = -75 \neq 0$$

4. *Las aplicaciones lineales transforman subespacios vectoriales del espacio inicial en subespacios vectoriales del espacio final.*

Si $f: E \rightarrow F$ es lineal y $H \subseteq E$ subespacio de E $f(H) = \{y \in F \mid \exists x \in H; f(x) = y\}$ subespacio de F

Demostración

Si H es subespacio de E $f(H)$ es subespacio de F .

1- $y_1, y_2 \in f(H)$ $\exists x_1, x_2 \in H$ $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$ viene de H

2- $y_1 \in f(H)$ viene de H

1-.

" $xv1$, $xv2$ " H ! $f(xv1)=yv1$

$f(xv2)=yv2$

$yv1+yv2=f(xv1)+f(xv2)=(\text{por ser lineal}) f(xv1+xv2)$

$xv1$ " H

H es su. $xv1+xv2$ " H

$xv2$ " H

$yv1+yv2$ " $xv1+xv2$ " H $f(xv1+xv2)= yv1+yv2$

2-.

$yv1= f(xv1)$ (por ser función lineal) $f(xv1)$

$xv1$ " H y H es subespacio $xv1$ " H

$yv1$ " $f(H)$

5. Es el conjunto de vectores del espacio final con los del inicial que se corresponden con él, y es subespacio de f .

$\text{Img}(f)=f(e)=\{yv "F/"vv"E f(xv)=yv\}$ subespacio de F .

6. El núcleo de la aplicación lineal es un subespacio del espacio inicial.

$\text{Ker}(f)=\{vv"E/f(vv)=0v\}$ Subespacio de E

7. Una función (f) es inyectiva si y sólo si el núcleo está formado por el vector 0.

8. Las funciones de aplicaciones lineales inyectivas conservan la independencia lineal.

$Y=\{vv1,vv2,.....,vvp\}$ l.i ! $f(vv1),f(vv2),.....,f(vvp)$ l.i.

9. Si la aplicación lineal es sobre conserva los sistemas de generadores $f(E)=F \{vv1,vv2,....vvn\}$. Sus imágenes son un sistema de generadores del espacio final.

10. Si f es un isomorfismo conserva las bases y B es una base formada por $\{ev1,ev2,....,evn\}$ sus imágenes forman base del espacio final $\{f(ev1),f(ev2)....f(evn)\}=B'$.

Sólo hay isomorfismos entre espacios vectoriales de la misma dimensión:

- Si dos espacios vectoriales son isomorfos las propiedades de los vectores del espacio inicial se trasladan automáticamente a sus imágenes en el espacio final.
- Como en los conjuntos matemáticos lo que importa son las propiedades de sus elementos y no su naturaleza, pueden identificarse estudiando cualquiera de esos espacios a través de aquel de ellos que sean lo más sencillo posible.

11. Toda la aplicación lineal queda perfectamente definida conociendo las imágenes de los vectores de una

base del espacio inicial $f: E \rightarrow F$ $B = \{ev_1, ev_2, \dots, ev_n\}$ base de E conocidas $f(ev_1), f(ev_2), \dots, f(ev_n)$ podemos calcular las imágenes de cualquier vector xv .

$$xv = x_1 ev_1 + x_2 ev_2 + \dots + x_n ev_n$$

$f(xv) = x_1 f(ev_1) + x_2 f(ev_2) + \dots + x_n f(ev_n)$ conocida $f(xv)$ hará que muchas aplicaciones lineales en vez de dárseles por su ecuación la damos por los vectores de una base.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(1,0) = (2, -1, 1)$$

$$f(0,1) = (-1, 3, 4)$$

- Comprobar que está bien definida
- Hallar la imagen de $(4, -3)$
- Ecuación $f(x_1, x_2)$
- Hallar su núcleo, su imagen y clasificarla
- $\{(1,0), (0,1)\}$ forman la base canónica, y conocemos sus imágenes y por la propiedad 1 está bien definida.
- Expreso $(4, -3)$ en función de la base respecto de la base de la que tenemos definida la función:

$$(4, -3) = x(1,0) + y(0,1) \quad x=4; y=-3$$

$$f(4, -3) = f[4(1,0) - 3(0,1)] = 4f(1,0) - 3f(0,1) = 4(2, -1, 1) - 3(-1, 3, 4) = (11, -13, -8)$$

- Lo hacemos en un caso genérico

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1) = x_1(2, -1, 1) + x_2(-1, 3, 4)$$

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2, x_1 + 4x_2) = (y_1, y_2, y_3)$$

- $\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2) / f(x_1, x_2) = (0, 0, 0)\} = \{(x_1, x_2) / 2x_1 - x_2 = 0 \text{ ecuación cartesianas del Ker}\}$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 = 0$$

- **Ecuación de una aplicación lineal. Matriz asociada a una aplicación lineal.**

Sea f una aplicación lineal del espacio E de N dimensiones en el espacio F de M dimensiones.

Sea $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en una base de E_n y $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ una base de F_m . Supongamos un vector xv del espacio inicial y su correspondiente imagen $f(x) = y$

$$f: E_n \rightarrow F_m$$

Supongamos que xv tiene de coordenadas unos números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y su imagen tiene de coordenadas $(y_1,$

$y_2, \dots, y_m$).

Definición de la aplicación lineal.

Debemos conocer las imágenes de la base del espacio inicial:

$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$. Estas imágenes son aquellos vectores cuyas coordenadas respecto de B_2 .

$$f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \text{ Rel } (x_i), (y_i)$$

.....

$$f(e_n) = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{mn})$$

$$f: E_n \rightarrow F_m$$

$$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ base de } E_n$$

$$B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \text{ base de } F_m$$

$$x \in E_n ; f(x) = y$$

$$x \text{ coordenadas respecto de } B_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y \text{ coordenadas respecto de } B_2 = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \text{ Rel } (x_i), (y_i)$$

.....

$$f(e_n) = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{mn})$$

$$y = \text{imagen de } x$$

$$y = f(x)$$

$$y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_m u_m = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) =$$

$$= x_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m) + x_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m) + \dots + x_n (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m) =$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) u_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}) u_2 + \dots + (x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn}) u_m$$

Tenemos y expresado el vector y de dos formas distintas respecto de B_2 :

$$y_1 = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) \text{ coordenadas de un vector } y \text{ y las de su imagen .}$$

$$y_2 = (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n})$$

.....

$y_m = (x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn})$ Ecuaciones de la aplicación lineal respecto de B_1, B_2

$(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}) + \dots + (x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn})$

En forma matricial:

$y_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n} \quad x_1$

$y_2 = a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n} \quad x_2$ Ec. Lineal de la aplicación lineal

.. ..

$y_m \quad a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn} \quad x_n$

Coord Matriz de la a.l. Coord del

Img. res respecto de B_1, B_2 orig. Respec

de B_2 de B_1

¿Cómo está constituida la matriz?

La primera columna está formada por las coordenadas respecto de B_2 de la imagen del primer vector de B_1 .

La segunda ídem

Las columnas de la matriz de la aplicación lineal están formadas por las coordenadas de las imágenes de los vectores de B_1 respecto de B_2

$f: E_n \rightarrow F_m$

Fijadas las bases B_1 y B_2 en E_n y en F_m a cada aplicación lineal le corresponde una matriz de $M \times N$.

$f \in \{E_n, F_m\} \quad M \times N$

A cada aplicación lineal una matriz

A cada matriz una aplicación lineal

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3)$ Hallar su ecuación matricial respecto de las bases canónicas.

Hallamos las imágenes de:

$f(1, 0, 0) = (1, 2)$

$$f(0,1,0)=(-1,0)$$

$$f(0,0,1)=(0,1)$$

$$y_1 = 1 - 1 \cdot 0 \cdot x_1$$

$$= x_2$$

$$y_2 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot x_3$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_3$$

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(1,0,0)=(-1,1,3)$$

$$f(0,0,1)=(1,1,-1)$$

$$f(2,3,-1)=(4,1,2)$$

1-. Probar que está bien definida.

2-. Imagen de $f(3,1,2)$; $f(x_1, x_2, x_3)$ y la matriz asociada respecto de las bases canónicas.

1-.

Debemos conocer las imágenes de los vectores de una base del espacio inicial

$\{(1,0,0)(0,0,1)(2,3,-1)\}$ ¿base?

$$1 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 1 \quad "0" = 3 \text{ Bien definida}$$

$$2 \ 3 \ -1$$

2-.

$f(3,1,2)$ expresamos ese vector respecto de la base

$$(3,1,2)=a(1,0,0)+b(0,0,1)+c(2,3,-1)$$

$$3 = a + 2c \quad a = 3 - (2/3) = 7/3$$

$$1 = 3c \quad c = 1/3$$

$$-2 = b - c \quad c = -2 + (1/3) = -5/3$$

$$f(3,1,2)=7/3f(1,0,0)-5/3f(0,0,1)+1/3f(2,3,-1)=7/3(-1,1,3)-5/3(1,1,-1)+1/3(4,1,2)=(-8/3,1,28/3)$$

$f(x_1, x_2, x_3) = a(1,0,0) + b(0,0,1) + c(2,3,-1)$ calcular a,b,c. Igual que antes 0 utilizar las ecuaciones matriciales respecto de las bases canónicas.

$$f(1,0,0)$$

$f(0,1,0)$ conocer las imágenes

$$f(0,0,1)$$

$$y_1 = -1 \cdot p + 1 \cdot x_1$$

$$y_2 = 1 \cdot q + 1 \cdot x_2$$

$$y_3 = 3 \cdot r - 1 \cdot x_3$$

$$4 - 1 \cdot p + 1 \cdot 2 \cdot 4 = -3 + 3p \quad p = 7/3$$

$$1 = 1 \cdot q + 1 \cdot 3 \cdot 1 = 1 + 3q \quad q = 0$$

$$2 \cdot 3 \cdot r - 1 \cdot -1 \cdot 2 = 7 + 3r \quad r = -5/3$$

$$y_1 = -1 \cdot 7/3 + 1 \cdot x_1$$

$$y_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot x_2$$

$$y_3 = 3 \cdot -5/3 - 1 \cdot x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 7/3x_2 + x_3, x_1 + x_3, 3x_1 - 5/3x_2 - x_3)$$

Siempre es conveniente tener la ecuación de la aplicación lineal respecto de la base canónica.

Si $a \in f: A \rightarrow M \times N$

$$Y = f(x) = Ax$$

Si $a \in g: B$

$$f + g: A \rightarrow B$$

$$f: A$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = Ax + Bx = (A+B)x$$

$$f + g: A \rightarrow B$$

$$(f)(x) = [f(x)] = (Ax) = (A)x$$

$$f: A$$

• Composición de funciones

En $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes endomorfismos:

$f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$$

1º clasificamos el tipo al que pertenecen: inyectiva y sobre (estudiamos su imagen y su núcleo)

Ecuación matricial respecto de las bases canónicas.

$$y_1 = 1 \ 0 \ 0 \ x_1$$

$$y_2 = 1 \ -1 \ 0 \ x_2 \ f$$

$$y_3 = 1 \ 1 \ 1 \ x_3$$

$$y_1 = 1 \ -1 \ 0 \ x_1$$

$$y_2 = 1 \ 0 \ 1 \ x_2 \ g$$

$$y_3 = 2 \ -1 \ 1 \ x_3$$

$$\ker(f) = \{ (x_1, x_2, x_3) / f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \}$$

$$1 \ 0 \ 0 \ x_1 \ 0$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) / 1 \ -1 \ 0 \ x_2 = 0 \} = \{ (0, 0, 0) \}$$

$$1 \ 1 \ 1 \ x_3 \ 0$$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ incog. sol. trivial}$$

Aplicación lineal inyectiva

$$\text{Im}(f) = \{ (y_1, y_2, y_3) / \exists (x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \}$$

$$y_1 = 1 \ 0 \ 0 \ x_1$$

$$= \{ (y_1, y_2, y_3) / y_2 = 1 \ -1 \ 0 \ x_2 \text{ ec. paramétricas de la img.} \}$$

$$y_3 = 1 \ 1 \ 1 \ x_3$$

$$= \mathbb{R} \{ (1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1) \} = \mathbb{R}^3 \text{ sobre}$$

La imagen de la aplicación lineal es un subespacio vectorial que está engendrado por las columnas de la matriz de esa aplicación respecto de las bases canónicas.

La dimensión de la imagen será el número máximo de generadores independientes. El número de columnas independientes de la matriz

$$\dim \text{Im}(f) = (A)$$

$$(A)=3$$

f es una aplicación lineal que es sobre e inyectiva: isomorfismo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_1 \quad 0$$

$$\text{Ker}(g) = \{(x_1, x_2, x_3) / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 = 0\} = \{(-, -,)\} = \mathbb{L}\{(-1, -1, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_3 \quad 0$$

$$(B)=2 \quad /B/ = -2+1+1=0 \quad \dim \ker(g)=3-2=1$$

2 vectores independientes. Los 2 primeros

$$x_1 - x_2 = 0 \quad x_3 =$$

$$x_1 = x_3 \quad x_1 = -$$

$$x_2 = -$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_1$$

$$\text{Im}(g) = \{(y_1, y_2, y_3) / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_2$$

$$\begin{pmatrix} y_3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_3$$

$$= \mathbb{L}\{(1, 1, 2), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \quad \dim (B)=2 = \mathbb{L}\{(1, 1, 2), (-1, 0, -1)\}$$

$$\text{Im} \quad 2 \quad \dim 3$$

No es sobre porque no es inyectiva ni sobre: endomorfismo.

Hallar la ecuación y la matriz asociada respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal: $-f+2g$

$$-f+2g - A+2B =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 0$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_1$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_2$$

$$y_3 \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_3$$

Composición de aplicaciones lineales y producto de matrices:

$f: \text{ENFM}$

$g: \text{FMGP}$

f compuesta con g

$g \circ f: \text{ENGP}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Se parte de un vector x_v del espacio inicial

$$X_v \xrightarrow{f} f(x)$$

g

$$Z_v = g(y) = g(f(x))$$

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$$

1-. Probar que tiene sentido $g \circ f$. ¿Existe $f \circ g$?

2-. Hallar $g \circ f(2, 2, -1)$ y la ecuación $g \circ f(x_1, x_2, x_3)$ dando su matriz asociada respecto de las bases canónicas [Author: A].

1-. Para que una composición de funciones tenga sentido el espacio final de la primera tiene que ser el original de la segunda.

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

g si tiene sentido $g \circ f$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$$

f No tiene sentido $f \circ g$

$$\mathbb{R}^3$$

2-.

$$(g \circ f)(2, 1, -1) = g(f(2, 1, -1)) = g(4, -1) = (5, 2)$$

$$(2,1,-1) f (4,-1)$$

g

$$(5,2)$$

$$(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = g(f(x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3 - (x_2 + 2x_3), x_1 + x_2 - x_3 + 2(x_2 + 2x_3)) = (x_1 - 3x_3, x_1 + 3x_2 + 3x_3)$$

$$y_1 \ 1 \ 0 \ -3 \ x_1$$

$$= x_2$$

$$y_2 \ 1 \ 3 \ 3 \ x_3$$

$$2x_3$$

Existe una estrecha relación entre la matriz de la composición y las matrices de las funciones que se componen.

Si fA (matriz asociada respecto a:)

B_1 de EN

B_2 de FM

gB

B_2FM

B_3CP

$g \circ f$ es lineal y $g \circ f Bx A$

fA

$$Y = f(x) = Ax$$

gB

$$Y = g(x) = Bx$$

$$Y = (g \circ f)(x) = g(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

$g \circ fBA$

Ejemplo:

Comprobar esta propiedad en el caso anterior:

$$fA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$gB = 1 - 1$$

$$\bullet 2$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 = 1 \ 3 \ 3$$

La matriz obtenida es la matriz obtenida anteriormente.

Caso particular de endomorfismo:

$f: E \rightarrow E$

$f: A \rightarrow A$

Al endomorfismo identidad ($I(x)=x$) por ser el elemento neutro de la composición de funciones le corresponderá el elemento neutro de la composición de matrices.

$$1 \ 0 \dots\dots\dots 0$$

$$0 \ 1 \dots\dots\dots 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 \ 0 \dots\dots\dots 0$$

Biyectivas por ser aquellas que poseen inversa también biyectiva les corresponderá las $M \rightarrow M$ que poseen inversa: A^{-1}

Si $f: E \rightarrow E$ es biyectiva

$f: A \rightarrow A$

Además $f^{-1}: E \rightarrow E$

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

$$f^{-1} = A^{-1}$$

f es inversible $\iff A^{-1}$

Si f es inversible y $f^{-1} = A^{-1}$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

- Hallar f^{-1} probar que es inversa.
- Usando la definición hallar la ecuación $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- Comprobar que la matriz asociada a f^{-1} es la inversa de la matriz asociada a f .

1-

$$y_1 = 2 - x_1$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(x) = y \text{ tal que } f(y) = x$$

$$f^{-1}(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ tal que } f(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$

$$(2y_1 - y_2, y_1 + y_2) = (x_1, x_2)$$

2-

$$(2y_1 - y_2, y_1 + y_2) = (x_1, x_2)$$

$$2y_1 - y_2 = x_1$$

$$y_1 + y_2 = x_2$$

$$3y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_1 = x_1 + x_2/3 = (1/3)x_1 + (1/3)x_2 \quad y_2 = x_2 - (1/3)x_1 + (1/3)x_2 = -(1/3)x_1 + (2/3)x_2$$

$$f^{-1}(x_1, x_2) = ((1/3)x_1 + (1/3)x_2, -(1/3)x_1 + (2/3)x_2)$$

$$y_1 = 1/3 x_1 + 1/3 x_2$$

$$y_2 = -1/3 x_1 + 2/3 x_2$$

3-

Comprobar que la matriz asociada a la inversa es la inversa de la matriz dada

$$A^{-1} A = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Efecto de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal:

$f: E \rightarrow F$

B_1 base en E , $f \mapsto A$ depende de la aplicación lineal y de las bases respecto de las cuales está definida

B_2 base en F

Si cambiamos de base en los espacios vectoriales E y F cambiará la matriz asociada a la aplicación lineal.

¿Cómo se transforma la matriz asociada en la aplicación lineal cuando efectuamos un cambio de base en los espacios definidos?

$f: E \rightarrow F$

B_1 base E

B_2 base F f_A $y = f(x) = Ax$

Cambio de base en E $B_1 \rightarrow B_1'$ Ecuaciones del cambio de base $X = N^{-1}x$

Cambio de base en F $B_2 \rightarrow B_2'$ Ecuaciones del cambio de base $Y = M^{-1}y$

$$My = Ax$$

$$Y = M^{-1}Ax$$

$$AB = M^{-1}AN$$

En el caso particular de que F sea endomorfismo como el espacio inicial es igual que el espacio final los cambios de base serán:

$$AB = M^{-1}AM$$

A y B son 2 matrices tales que $B = M^{-1}AM$ Matrices semejantes.

Por tanto al efectuar un cambio de base en un espacio vectorial la matriz asociada a un endomorfismo se transforma en otra semejante a ella.

Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

Hallar la matriz asociada respecto de $B' = \{(4, -1), (2, 3)\}$

Ecuación matricial respecto de la base canónica

$$y_1 = 2x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

Canónica B'

$$B' \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

x_1 x_2 coordenadas de la base nueva respecto de la antigua. Cómo la base

$x_1 = 4$ $x_2 = -1$ nueva está respecto de la canónica aplicamos directamente.

$$y_1' = 4x_1 + 2y_1'$$

$$y_2' = -1x_1 + 3y_2'$$

$$4x_1' + 2y_1' = -1x_1' + 4x_2' + 2x_1'$$

$$-1x_1' + 3y_2' = 1x_1' - 1x_2' + 3x_1'$$

$$y_1' = 4x_1 + 2(-1x_1 + 3y_2') = 4x_1 - 2x_1 + 6y_2' = 2x_1 + 6y_2'$$

$$y_2' = -1x_1 + 3(2x_1 + 6y_2') = -1x_1 + 6x_1 + 18y_2' = 5x_1 + 18y_2'$$

$$y_1' = 1/14(3x_1 - 2y_2) = 3/14x_1 - 2/14y_2 = 3/14x_1 - 1/7y_2$$

$$y_2' = 1/14(4x_1 + 2y_1) = 2/7x_1 + 1/7y_1 = 2/7x_1 + 1/7(3x_1 - 2y_2) = 5/7x_1 - 2/7y_2$$

• Resumen

f: ENFM

B1 en EN

B2 en FM

f: AMxN

Y=AX

Img (f) subespacio engendrado por las columnas de A

Dim (Img) = (A)

Base de la Img columnas independientes de A.

f es sobre si (A)=m

Ker AX=0 Subespacio vectorial cuya ecuación cartesiana es:

Dim(Ker) = n- (A)

La aplicación lineal es inyectiva cuando (A)=n

La aplicación lineal será biyectiva o isomorfismo si A es cuadrada y (A)=m=n

F es inversible si A es cuadrada y /A/ es distinto de 0

f⁻¹A⁻¹Y=A⁻¹X ecuación de f⁻¹

Cambio de base

AB=M⁻¹AN

Si f es endomorfismo

$$AB = M^{-1}AM$$

Ejercicio:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z, 3y + z)$$

$$g(1, 0, 0) = (3, 1)$$

$$g(0, 1, 0) = (-1, 2)$$

$$(2, 1, -1) \in \text{Ker}(g) \quad g(2, 1, -1) = (0, 0)$$

Probar que g es lineal

Hallar $g(0, 0, 0)$

¿ g está bien definida?

Calculamos el determinante de los vectores dados

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ bien definida

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Hallar la ecuación de g respecto de las bases canónicas:

$$y_1 = 3 - 1x_1$$

$$y_2 = 1 + 2x_2$$

$$y_3 = 0 \quad \text{[Author: A]}$$

¿ $g(0, 0, 0)$?

$$0 = 3 - 1a + 2$$

$$0 = 1 + 2b + 1$$

$$-1$$

$$0 = 5 - a$$

$$0 = 4 - b \quad a = 5 \quad b = 4 \quad g(0, 0, 0) = (5, 4)$$

$$y_1 = 3x_1 - 5x_2$$

$$= x_2$$

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Ejercicio:

$$1 \ 0 \ 0$$

$$fA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \ 1 \ 1$$

$$1 \ -1 \ 0$$

$$gB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \ -1 \ 1$$

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \text{!} f(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$fA \text{!} f^{-1} A^{-1}$$

Ecuación de f^{-1}

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, -2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -0 \ +0$$

$$/A/ = -1 \quad AT = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = 1 / -1 \ -1 \ +1 \ -0$$

$$0 \ 0 \ 1 \ +2 \ -1 \ +1$$

$$1 \ 0 \ 0$$

$$fA \text{!} f^{-1} A^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2 \ 1 \ 1$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

$$y_3 = -2x_1 + x_2 + x_3$$

Hallar las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ cuya imagen sea el subespacio engendrado por

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}\{(1, -2, 0, 1), (-1, 1, 2, 1)\}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2a & b \end{pmatrix} fA$$

0 2 2b matriz respecto de las bases canónicas 4×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

La imagen de la aplicación lineal está engendrada por las columnas de la matriz. Si tenemos unos generadores podemos utilizarlo como columnas de la matriz.

Las columnas de la matriz son los generadores de la matriz. Tenemos 2 y necesitamos una columna más que conseguiremos con una combinación lineal de las otras 2.

Hallar las aplicaciones lineales de $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo es el conjunto de aquellos vectores tales que:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)\}$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$fA_{3 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a \ a+b \ -a+2b \ x_3 \ \text{¿?}$$

La tercera ecuación ha de ser combinación lineal de las otras

Ejercicio 17:

¿Es posible una combinación lineal de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cuya imagen este engendrada por la

$$\text{Im}(f) = \mathbb{F}\{(-1, 1, 0, 2)(1, 1, -1, 3)\} \text{ y cuyo núcleo sea } \text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0\}?$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ Im}(f) = \mathbb{F}\{(-1, 1, 0, 2)(1, 1, -1, 3)\} \text{ Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a & b \end{pmatrix}$$

$fA_{1 \times 4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}$ Hay que ver si algún valor de a y b cumple la propiedad del Ker

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2a & 3b \end{pmatrix}$$

$$-1 \ 1 \ -a+b \ x_1 \ 0$$

$$1 \ 1 \ a+b \ x_2 = 0$$

$$0 \ -1 \ -b \ x_3 \ 0$$

$$2 \ 3 \ 2a+3b \ 0$$

Debemos buscar los generadores del núcleo: ecuaciones paramétricas:

$$x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 = x_2$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$x_3 =$$

$$\text{Ker}(f) = \mathcal{L}\{(1,1,0), (0,0,1)\}$$

$$-1 \ 1 \ -a+b \ 1 \ 0$$

$$1 \ 1 \ a+b \ 1 = 0$$

$$0 \ -1 \ -b \ 0 \ 0$$

$$2 \ 3 \ 2a+3b \ 0$$

$$-1 \ 1 \ -a+b \ 0 \ 0$$

$$1 \ 1 \ a+b \ 0 = 0$$

$$0 \ -1 \ -b \ 1 \ 0$$

$$2 \ 3 \ 2a+3b \ 0$$

No existe ninguna aplicación lineal en estas condiciones

$$\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = 3$$

$$2 + 2 = 3$$

Ejercicio 21:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en la $\text{Im}(1,0,0) = (-1,0,2)$ $\text{Im}(1,1,0) = (-3,1,1)$ $\text{Im}(1,1,1) = (1,-1,3)$.

Hallar la matriz en la base $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Y Coordenadas de la imagen respecto de B_2 de F .

A Columnas formadas por las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B_1 respecto de B_2 .

X Coordenadas de los originales respecto de E.

EF

Coordenadas de $f(1,0,0)$, $f(1,1,0)$, $f(1,1,1)$ respecto de la base $E\{(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)\}$

Coordenadas de la función respecto de sí misma:

$$(-1,0,2)=x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1)$$

$$-1=x+y+z \quad x=-1 \quad -1$$

$$0=y+z \quad y=-2 \quad A=-2$$

$$2=z \quad z=2 \quad 2$$

$$(-3,1,1)=x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1)$$

$$-3=x+y+z \quad x=-4 \quad -1 \quad -4$$

$$1=y+z \quad y=-1 \quad A=-2 \quad -1$$

$$1=z \quad z=1 \quad 2 \quad 1$$

$$(1,-1,3)=x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1)$$

$$1=x+y+z \quad x=3$$

$$-1=y+z \quad y=-4$$

$$3=z \quad z=3$$

$$-1 \quad -4 \quad 2$$

$$A=-2 \quad -1 \quad -4$$

$$2 \quad 1 \quad 3$$

Hallar la f_A respecto de la base canónica:

$$-1 \quad a \quad d$$

$$A=0 \quad b \quad e$$

$$2 \quad c \quad f$$

Cambio de base pasando la base canónica:

$$AB=M^{-1}AM$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19:

Sean f y g dos homomorfismos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$f(1,0,0)=(2,1,-1); f(1,1,2)=(7,4,5)$$

$$\text{Ker}(f) = \{(x,y,z)/x=2z; x+y+z=0\}$$

$$g(x,y,z)=(x, x+xy, x-y+z)$$

- Hallar $(g \circ f)(3,1,2)$
- Hallar las distintas ecuaciones y una base de $\text{Im}(g \circ f)$

Hallamos f_A (respecto de las bases canónicas)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \text{ a d } 1 \text{ 7}$$

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & b & e \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & c & f \end{pmatrix} = 2 \text{ 5}$$

$$f(1,0,0)=(2,1,-1)$$

$$f(1,1,2)=(7,4,5)$$

$$\text{ker}(f) = \{x/x=2z; x+y+z=0\}$$

Hallo un sistema de generadores del núcleo: Ecuaciones paramétricas.

$$x=2$$

$$y=-3 \quad \text{E} \{(2,-3,1)\}$$

$$z=$$

$$f(2,-3,1)=(0,0,0)$$

$$2 \text{ a d } 1 \text{ 7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b & e \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & c & f \end{pmatrix} = 2 \text{ 5}$$

$$2a + 2d = 0$$

$$1b + e - 3 = 0$$

$$-1c + f = 0$$

$$2 + a + 2d = 7$$

$$1 + b + 2e = 4 \quad a = 13/7 \quad b = 1 \quad c = 2/7$$

$$-1 + c + 2f = 5$$

$$4 - 3a + 2d = 0$$

$$2 - 3b + e = 0 \quad d = 11/7 \quad e = 1 \quad f = 20/7$$

$$-2 - 3c + f = 0$$

$$(g \circ f)(3, 1, 2)$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 13/7 \ 11/7 \ 2 \ 13/7 \ 11/7$$

$$g \circ fBA = 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 = 3 \ 20/7 \ 18/7$$

$$1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 2/7 \ 20/7 \ 0 \ 8/7 \ 24/7$$

$$2 \ 13/7 \ 11/7 \ 3 \ 11$$

$$(g \circ f)(3, 1, 2) = 3 \ 20/7 \ 18/7 \ 1 = 17$$

$$0 \ 8/7 \ 24/7 \ 2 \ 8$$

Tutoría del 16-12-99

Ejercicio 22:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que $f(1, 0, 0) = (-1, 1, 1, 2)$; $f(0, 1, 0) = (0, 1, 1, -1)$; $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}\{(1, 1, 1)\}$

¿Para qué valores de λ el $L^\lambda H = \mathbb{R}^4$ siendo $L = \mathbb{R}\{(-1, 0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ y H el subespacio imagen de la ecuación cartesiana $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ por la aplicación f ?

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$f(1, 1, 1) = (-1, 1, 1, 2)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 1, -1)$$

$$-1 \ 0 \ a$$

$$fA = 1 \ 1 \ b$$

$$1 \ 1 \ c$$

$$2 -1 d$$

$$\text{Ker}(f)=\mathbb{F}\{(1,1,1)\}$$

$$L^*H=4$$

$$L=\mathbb{F}\{(-1,0,1,1),(1,0,1)\}$$

$$0 -1 0 a 1$$

$$0 = 1 1 b 1$$

$$0 1 1 c 1$$

$$0 2 -1 d$$

$$H=f\{x/x^1-x^2+x^3=0\}=\mathbb{F}\{f(1,1,0),f(-1,0,1)\}$$

$$\text{Generador } Y=AX$$

$$\mathbb{F}\{f(1,1,0),f(-1,0,1)\} \quad 0=-1+a \quad a=1$$

$$0=2+b \quad b=-2$$

$$0=2+c \quad c=-2$$

$$0=1+d \quad d=-1$$

$$x_1=x_2-x_3 \quad x_1=-$$

$$x_2=$$

$$x_3=$$

$$1 -1 0 1 1 -1$$

$$1 = 1 1 -2 1 = 2$$

$$0 1 1 -2 0 2$$

$$2 -1 -1 1$$

Img. de los gen. Que engendran el subesp H.

$$-1 -1 0 1 -1 2$$

$$0 = 1 1 -2 0 = -3$$

$$1 1 -2 1 -3$$

$$2 -1 -1 -3$$

$$H = \{(-1, 2, 2, 1), (2, -3, -3, -3)\}$$

$$L + H = \mathbb{R}^4$$

$$L \cap H = \{(0, 0, 0, 0)\}$$

$$L + H = \{(-1, 0, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 2, 2, 1), (2, -3, -3, -3)\}$$

$\dim L + \dim H = 4$ Para que sea 4 los 4 vectores tienen que ser independientes, por tanto el rango de la matriz debe ser igual a 4 ; luego el determinante tiene que ser distinto de $\neq 0$ [Author: A]

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_3 + C_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_4 + C_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +4 - 6 - 2 = -4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\dim H + L + \dim L \cap H = \dim L + \dim H$$

$$2 + 2 = 4$$

Ejercicio 23:

Sea T el conjunto de las matrices reales cuadradas de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Consideremos la aplicación lineal $g: T \rightarrow T$ que hace corresponder a cada matriz cuadrada de orden 2×2 , X la matriz $g(X) = AX$.

a) Calcular g^{-1}

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Probar que $g \circ g = g$

c) Hallar la matriz de g en la base canónica de T

c) Calcular $\text{Ker}(g)$ e $\text{Im}(g)$ dando una base de cada uno de los subespacios

$$g: T \rightarrow T$$

$$g(x)=AX$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la imagen de $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$$

Primero recordando la definición de g o $g(g \circ g)(x)=g(x)$

$$g(x)=AX ; (g \circ g)(x)=g(g(x))=g(AX)=A(AX)=A^2X! \text{Comprobar que } A^2=A$$

$$g \circ g = g$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

g^M Bases canónicas; $g \circ g^N$ bases canónicas y ver si son iguales ¿ $M=N$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ Primera columna}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ Segunda columna}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Tercera columna}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Cuarta columna}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g \circ g M_{XN} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -2 & 0 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d) $\text{Ker}(g) = \{x / AX = (0)\} = a \ b$ Subesp. Engendrado por

$$\begin{pmatrix} -3a & -3b \end{pmatrix} \text{ 2 matrices}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Generadores}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & c & d & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ Base del núcleo}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3a - c = 0$$

$$3b + d = 0 \quad c = -3a$$

$$-6a - 2c = 0 \quad d = -3b$$

$$-6b - 2d = 0$$

Otra forma de hacerlo es utilizando la matriz respecto de las bases canónicas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$g M \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -2 & d & 0 \end{pmatrix}$$

Este es el mismo sistema que antes

La imagen es el subespacio engendrado por las columnas de la matriz respecto de la base canónica.

La imagen es el subespacio engendrado por:

$$\text{Img}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim \text{Img}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \ -6 \ 0 \ -2$$

$$\dim \text{Im}g + \dim \text{Ker} = \dim T$$

$$x + 2 = 4$$

Ejercicio 8:

Definimos $f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$

$$f(a_1 + a_2x + a_3x^2) = a_1 + a_2x - (a_1 + a_2)x^2 - 2a_3x^4$$

- Probar que f es lineal.
- Hallar la matriz de f en las bases canónicas
- Encontrar su núcleo

$f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ Polinomios de grado menor o igual que 4 y tienen de dimensión 5

$$1 \ 0 \ 0 \ \text{Número}$$

$$0 \ 1 \ 0 \ x^1$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 0 \ 0 \ x^3$$

$$0 \ 0 \ -2 \ x^4$$

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \text{ 1ª columna } f(1, 0, 0) = 1 - x^2$$

$$\text{2ª columna } f(0, 1, 0) = x - x^2 \text{ Matriz } A$$

$$\text{3ª columna } f(0, 0, 1) = -2x^4 \text{ [Author: A]}$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 1 \ 0 \ a_1 \ 0$$

$$0 \ -1 \ 0 \ a_2 = 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ a_3 \ 0$$

$$0 \ 0 \ -2 \ 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$-a_1 - a_2 = 0 \text{ Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$$

$$0 = 0$$

$$-2a^3=0$$

$$\dim \text{Im} + \dim \text{Ker} = \dim \text{espacio inicial}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot 1 - 0 = (1 - 2)(2 - 3) + 3(1 - 2) = (1 - 2)[(1 - 2)(2 - 3) + 3] = (1 - 2)(-3 + 5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 - 0 = 1$$

$$-3 + 5 = (3 \pm \sqrt{9 - 20})/2 = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$= 0$$

$$= (3 + i\sqrt{11})/2$$

$$= (3 - i\sqrt{11})/2$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si nos piden diagonalizar un endomorfismo lo primero es hallar la matriz asociada respecto de las bases canónicas.

• Propiedades de autovalores y autovectores

$\{ \}$ autovectores asociados al autovalor λ .

Propiedad 1: Los autovectores asociados a un autovalor λ junto con el vector 0_v forman un subespacio vectorial:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Se llama multiplicidad analítica de un autovalor a su multiplicidad como raíz de la ecuación característica.

Multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio asociado al mismo. Esta es:

$$n - r(A - \lambda I)$$

Para cualquier autovalor multiplicidad analítica $\geq$ multiplicidad geométrica.

Propiedad 2: Autovectores correspondientes a autovalores distintos son vectores linealmente independientes.

Propiedad 3: Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos autovalores.

Si A y B semejantes ($B = M^{-1}AM$)

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$$

$$B - I = M^{-1}AM - I = A - I$$

Propiedad 4: El producto de los autovalores de una matriz es igual al valor de su determinante. La suma de los autovalores es igual a la traza de la matriz.

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Propiedad 5: Si A y B son dos matrices semejantes, también son semejantes sus potencias cualquiera que sean.

$$B = M^{-1}AM$$

$$B^2 = BB = M^{-1}AM * M^{-1}AM = M^{-1}A^2M \text{ Luego } B^2 \text{ es semejante a } A^2$$

$$B^3 = B^2B = M^{-1}A^2M * M^{-1}AM = M^{-1}A^3A \text{ luego } B^3 \text{ es semejante a } A^3$$

Esta nos va a permitir calcular la potencia de una matriz mediante diagonalización.

Propiedad 6: Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces λ^n es un autovalor de A^n .

X autovector correspondiente

$$AX = \lambda X$$

$$AX = \lambda^2 X; * X = A^2 X \quad X = A^2 X$$

$$AX = \lambda^2 X$$

λ^2 es un autovalor de A^2

X es su autovector correspondiente.

Consecuencia de esto: Supongamos una matriz A y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores. Esto significa que su polinomio característico es: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de la matriz A^p y

$$P_{A^p}(\lambda) = (A^p - I) = (\lambda^p - \lambda_1^p)(\lambda^p - \lambda_2^p) \dots (\lambda^p - \lambda_n^p)$$

Ejemplo:

Hallar los polinomios característicos de la matriz A, AN y B:

$$B) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$= 1$$

$$= 2$$

$$= -1$$

$$= 1$$

$$= 2$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 & 4 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \text{ doble}$$

$$= 6 \text{ simple}$$

$$= -2 \text{ doble}$$

$$= 6 \text{ simple}$$

$$= -2 \text{ doble}$$

$$\text{Autovalores } B^3; (-1)^3 = -1; (1)^3 = 1; (2)^3 = 8$$

$$P_B(\lambda) = \lambda^3 - I = (\lambda - (-1))(\lambda - 1)(\lambda - 8)$$

$$\text{Autovalores } B^n; (-1)^n; (1)^n; (2)^n$$

$$P_{B^n}(\lambda) = \lambda^n - I = ((\lambda - (-1))^n)(\lambda - 1)(\lambda - 2)^n$$

$$\text{Autovalores } D^4: (-2)^4 = 16 \text{ doble}; 6^4 = 1296 \text{ simple}$$

$$P_{D^4}(\lambda) = (\lambda - 16)^2(\lambda - 1296)$$

$$\text{Autovalores } D^n: (-2)^n \text{ doble}; 6^n \text{ simple}$$

$$P_{D^n}(\lambda) = ((\lambda - (-2))^n)(\lambda - 6)^n$$

Propiedad 7: Si λ es un autovalor de la matriz A y A es inversible, entonces $1/\lambda$ es un autovalor de la inversa.

$$AX = \lambda X; A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X; A^{-1}X = \lambda A^{-1}X; A^{-1}X = 1/\lambda X$$

$$1/\lambda \text{ autovalor a } A^{-1}$$

Ejemplo:

Indicar si las matrices B y D son inversibles. En caso afirmativo, hallar los autovalores de B^{-1} y D^{-1} y sus polinomios característicos.

$$P_B(\lambda) = (\lambda - (-1))^2(\lambda - 2) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

Autovalores de B-1: $1/-1=-1$ $1/1=1$ $1/2$

$$PB-1()=(-1-)(1-)(1/2-)$$

$$/D/=(-2)*(-2)*6=24 \text{ "D" } -1$$

autovalores de D-1: $1/-2=-1/2$ doble $1/6$ simple

$$PD-1((-1/2-)^2 (1/6-))$$

Propiedad 8: Teorema de Cayley: Toda matriz es raíz de su ecuación característica.

Ejemplo:

Probar que las matrices R y S son raíces de su ecuación característica y mediante ello calcular sus inversas.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 11 & 14 & -21 \\ 14 & 18 & 7 & 18 & 7 \\ 7 & 18 & 7 & 28 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PR() = 3^5 - 2 = (3-)(4-)^2 = -7 + 10 \text{ Hay que comprobar que } A^2 + 7A + 10I = 0$$

$$\bullet 4-$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 11 & 14 & -21 \\ 14 & 18 & 7 & 18 & 7 \\ 7 & 18 & 7 & 28 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10I = -R^2 + 7R; I = 1/10(-R^2 + 7R) = [1/10(-R + 7I)]R$$

$$10I = -R^2 + 7R; I = 1/10(-R^2 + 7R) = [1/10(-R + 7I)]R$$

$$R^{-1} = 1/10(-R + 7I) = 1/10 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-1 \ 3$$

$$1 \ -1 \ 0$$

$$Ps() = 2^5 - 1 = (-)(1-)(-1-)(-1-)(-1-)+2(-1-)= + - - -1-1+ -2-2 = -3 -4$$

$$\bullet 1 \ -1-$$

$$-S^3 - 4I = 0$$

$$1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1$$

$$S^2 = S \times S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 2 \ -2 \ 2$$

$$-1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ -4 \ 0 \ 0$$

$$S^3 = S^2 \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-S^3 = 4I; I = \frac{1}{4}(-S^3) = \frac{1}{4}(-S^2)$$

$$S^{-1} = \frac{1}{4}(-S^2)$$

• **Teorema fundamental de diagonalización de matrices cuadradas. ¿Qué y cómo se diagonalizan?**

Una matriz cuadrada se diagonaliza si en el espacio inicial (E_n) existe una base formada por autovectores.

Sea $f: E_n \rightarrow E_n$, el endomorfismo f es diagonalizable si en el espacio vectorial existe una base formada por autovectores.

Supongamos que A es diagonalizable en el espacio vectorial E_n existe una base formada por los vectores $ev_1, ev_2, \dots, ev_n$ respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.

Sup. A diag. Que en E ; $B = \{ ev_1, ev_2, \dots, ev_n \}$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diag.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

.....

$$\bullet 0 \dots n$$

Hay que hallar $f(ev_1), f(ev_2), \dots, f(ev_n)$

$f(ev_1)$ es un vector cuyas coordenadas respecto de B forman la primera columna.

$f(ev_2)$ es un vector cuyas coordenadas respecto de B forman la segunda columna.

$f(ev_n)$ es un vector cuyas coordenadas respecto de B forman la tercera columna.

$f(ev_1) = ev_1 + 0ev_2 + 0ev_3 = ev_1$; ev_1 autovector y su autovalor correspondiente.

$f(ev_2) = 0ev_1 + ev_2 + 0ev_n = ev_2$; ev_2 autovector y su autovalor correspondiente.

$f(ev_3) = nev_n$; ev_n autovector y n su autovalor correspondiente.

Resumen:

Si la matriz es diagonalizable, existe una base formada por autovectores.

Desde el punto de vista contrario:

Supongamos que en el espacio vectorial existe una base formada por autovectores y sea $uv_1, uv_2, \dots, uv_n$ sus autovalores correspondientes:

MB(f): 1ª columna coordenadas respecto de B de $f(ev_1)$

2ª columna coordenadas respecto de B de $f(ev_2)$

3ª columna coordenadas respecto de B de $f(ev_n)$

$f(ev_1) = u_1 e_1 + 0e_2 + 0e_n$; coordenadas $(u_1, 0, 0, 0)$

$f(ev_2) = 0e_1 + u_2 e_2 + 0e_n$; coordenada $(0, u_2, 0, 0)$

.....

$f(ev_n) = 0e_1 + 0e_2 + u_n e_n$; coordenadas $(0, 0, \dots, u_n)$

$u_1 \ 0 \ 0 \dots\dots\dots 0$

$0 \ u_2 \ 0 \dots\dots\dots 0$

$0 \ 0 \ u_3 \dots\dots\dots 0$ MB (f) Esto es una demostración constructiva

.....

$0 \ 0 \ 0 \dots\dots\dots u_n$

La demostración nos dice que para que una matriz o endomorfismo sea diagonalizable debe existir en EN una matriz formada por autovectores. También nos dice que la matriz semejante diagonal es aquella que tiene como elementos de la diagonal principal los autovalores y también que la base que respecto de la cual se produce la diagonalización a bien el endomorfismo tiene esa expresión diagonal está formado por autovectores.

M es matriz cuyas columnas son las coordenadas de una base de autovectores

$0 \dots\dots\dots 0$

$0 \dots\dots\dots 0 = -" = M^{-1}AM$

.....

$0 \ 0 \dots\dots\dots n$

Casos:

Para que una matriz real sea diagonalizable en el conjunto de los números ! todos sus autovalores deben ser reales.

Si todos los autovalores son reales y simples es diagonalizable.

Si posee autovalores múltiples, para que sea diagonalizable deben coincidir las multiplicidades de cada autovalor.

Si A es diagonalizable se puede calcular cualquiera de sus potencias fácilmente.

$$M^{-1}AM; A = M^{-1}DM$$

$$A^2 = M^{-1}D^2M$$

$$\dots\dots\dots P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \end{pmatrix}$$

$$AP = M^{-1}PM^{-1} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} nP$$

Ejemplos:

$$A) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los dos son simples y reales; sí es diagonalizable.

$$\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de autovectores: $\{(2,3), (-1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los tres son reales y simples; así que es diagonalizable (P.2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 2 \ -2 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1$$

$$C) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ simple } \mathcal{E}\{\lambda=1\} = \mathcal{E}\{(1 \ 0 \ 0)\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ doble } \mathcal{E}\{\lambda=2\} = \mathcal{E}\{(2 \ 0 \ 1)\}$$

$$0 \ -1 \ 2$$

No es diagonalizable porque al autovalor 2 que es doble, únicamente le corresponde un subespacio propio de una dimensión.

$$D) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \text{ doble } \mathcal{E}\{\lambda=-2\} = \mathcal{E}\{(1 \ 1 \ 0)(1 \ 0 \ 1)\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 6 \text{ simple } \mathcal{E}\{\lambda=-6\} = \mathcal{E}\{(-1 \ 0 \ 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sí es diagonalizable, si existe base de autovectores porque al autovalor doble le corresponde un subespacio propio de dos dimensiones

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{[Author:A]}}$$

$$F) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (3 + 11i)/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (3 - 11i)/2$$

No es diagonalizable porque tiene números complejos

Ejercicios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -3 & 3 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 & -6 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A_n ; B_n ; y D_n . Las tres son diagonalizables

$$A_n = M^{-n} M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & n & 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \ 1 \ 0 \ (-1)^n \ 3 \ 1$$

$$1 \ -1 \ -1 \ (-1)^n \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1$$

$$B_n = M^{-1} \dots M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2^n \ 0 \ 2 \ 1$$

$$1 \ 1 \ -1 \ (-2)^n \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1$$

$$D_n = M^{-1} \dots M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 6^n \ 0 \ 1 \ 1$$

• Diagonalización de matrices simétricas

Toda matriz simétrica real es diagonalizable. Se puede diagonalizar con un tipo especial de base llamadas bases ortonormales (vectores que son perpendiculares 2 a 2 y unitarios) Para diagonalizar vamos a introducir en el espacio vectorial una medida a través de un producto escalar.

Producto escalar:

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Un producto escalar en V es una aplicación. Es una correspondencia por la que a una pareja de vectores le corresponde un número real al que llamamos producto escalar.

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Axiomas:

P.1. El producto escalar de un número por si mismo es positivo o nulo.

$$a \cdot a \geq 0 ; a \cdot a = 0 \iff a = 0$$

P.2. Compatible.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

P.3. Distributivo respecto de la suma de vectores.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

P.4. Asociativo respecto de la suma de números.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$ $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ es un p. e.

En $\mathbb{R}^3$ $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ es un p.e.

En general

En $\mathbb{R}^n$ $x \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

Axiomas.

1-. $a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$; $a \cdot a = 0 \iff a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$; $a = (0, 0, \dots, 0) = 0_v$

2-.

3-. $a \cdot (b + c) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \dots + a_n(b_n + c_n) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + \dots + a_nb_n + a_nc_n =$

$a \cdot b + a \cdot c$

Si llamamos matriz por cuyas columnas fueran las coordenadas de los vectores:

$x_1 \ y_1$

$x_2 \ y_2$

$x \cdot y = x^T y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

..

$x_n \ y_n$

Espacio vectorial euclídeo: Espacio en el que se ha introducido un p.e.

Norma o módulo de un vector: Raíz cuadrada positiva del vector por si mismo:

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$

En $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\|(3, -2)\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$\|(-1, 1, 3)\| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$

$\|(-1, 2, -3, 5)\| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 25} = \sqrt{39}$

Propiedades del módulo:

- El módulo de cualquier vector es positivo:

$\|a\| \geq 0$; $\|a\| = 0 \iff a = 0_v$

- El módulo de un número por un vector es:

$\|a\| \cdot \|b\| = \|a \cdot b\|$

- El módulo de una suma es una desigualdad triangular:

$$\|av + bv\| \leq \|av\| + \|bv\|$$

Para demostrar este último punto se utiliza la desigualdad de Cauchy–Schwartz:

$$av \cdot bv \leq \|av\| \|bv\|$$

Comprobar la desigualdad triangular para:

$$av = (1, -1, 2, 3)$$

$$bv = (4, 2, 1, 1)$$

1er miembro:

$$\|a+b\| = \|(5, 1, 3, 4)\| = \sqrt{25+1+9+16} = \sqrt{51} = 7,141414....$$

2 o miembro:

$$\|av\| + \|bv\| = \sqrt{1+1+4+9} + \sqrt{16+4+1+1} = \sqrt{15} + \sqrt{22} = 3,8739 + 4,6904 = 8,5633$$

$$\|av+bv\| < \|av\| + \|bv\|$$

Un vector es unitario si su módulo es 1.

En $\mathbb{R}^n$ los vectores de la base canónica son unitarios:

$$ev_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad \|ev_1\| = 1$$

$$ev_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad \|ev_2\| = 1$$

.....

$$ev_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad \|ev_n\| = 1$$

$av = (2/3, -1/3, 2/3)$ es un vector unitario

$av = (4/9, 1/9, 4/9)$ es un vector unitario

Obtener vectores unitarios

av es unitario Normalizamos el vector

$$\|av\|$$

$$a = (3, -2, 4)$$

$$a/\|a\| = (3/\sqrt{29}, -2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29})$$

Tiene la misma dirección y sentido del vector.

Ejemplo:

Módulo 4: dirección y sentido del vector $(3,1,-1)$

$$4 \cdot \mathbf{av} = 4\mathbf{av} = 12 \ 4 \ -4$$

$$\|\mathbf{av}\| = \sqrt{11^2 + 11^2 + 11^2 + 11^2}$$

Ángulo de dos vectores:

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores de un espacio vectorial euclídeo, el ángulo que forman se define mediante:

$$\mathbf{av} \cdot \mathbf{bv}$$

$$\cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{av} \cdot \mathbf{bv}}{\|\mathbf{av}\| \|\mathbf{bv}\|}$$

$$\mathbf{av} \cdot \mathbf{bv}$$

$$-1 \cdot \frac{\mathbf{av} \cdot \mathbf{bv}}{\|\mathbf{av}\| \|\mathbf{bv}\|} = -1$$

Ejemplo.

Calcular el ángulo de las siguientes parejas de vectores:

$$\mathbf{a}=(1,-2); \mathbf{b}=(3,5)$$

$$\mathbf{a}=(3,1,-2); \mathbf{b}=(4,1,3)$$

$$\mathbf{a}=(1,1,-1,2); \mathbf{b}=(3,2,1,1)$$

$$\cos \mathbf{a}, \mathbf{b} = \frac{(3-10)/(\sqrt{5} \cdot \sqrt{34})}{(-7)/(\sqrt{170})} = \arccos \frac{(-7)/(\sqrt{170})}{(-7)/(\sqrt{170})} = 122.471010$$

$$\cos (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(12+1-6)/(\sqrt{9+1+4} \sqrt{16+1+9})}{7/(\sqrt{14} \sqrt{26})} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \arccos \frac{7/(\sqrt{14} \sqrt{26})}{7/(\sqrt{14} \sqrt{26})} = 68.4 \dots$$

$$\cos (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{(3+12-1+2)/(\sqrt{7} \sqrt{15})}{6/(\sqrt{105})} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \arccos \frac{6/(\sqrt{105})}{6/(\sqrt{105})} = 54.1588$$

Ortogonalidad:

El vector $\mathbf{a}$ es ortogonal si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ su producto escalar es 0.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$(4,-3) \cdot (6,-8) \text{ porque } (4,-3) \cdot (6,-8) = 24 - 24 = 0$$

$$(3,-2,1) \cdot (6,9,0) \text{ porque } (3,-2,1) \cdot (6,9,0) = 18 - 18 = 0$$

$$\mathbf{ev}_1 = (1,0,0,\dots,0)$$

$$\mathbf{ev}_2 = (0,1,0,\dots,0)$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \text{ en } e_i \text{ si } i = n$$

Un conjunto de vectores forman un sistema ortogonal de vectores si esos vectores son ortogonales 2 a 2.

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es un sistema ortogonal de vectores $\iff u_i \perp u_j \iff u_i \cdot u_j = 0 \text{ si } i \neq j$

Ejemplo:

$$\{(1, -2, 1), (0, 1, 2), (5, 2, -1)\}$$

$$(1, -2, 1) \cdot (0, 1, 2) = 0 - 2 + 2 = 0$$

$$(1, -2, 1) \cdot (5, 2, -1) = 5 - 4 - 1 = 0$$

$$(0, 1, 2) \cdot (5, 2, -1) = 0 + 2 - 2 = 0$$

Propiedades:

P.1: Si un vector es ortogonal a un conjunto de vectores, entonces, es ortogonal a todos los vectores del subespacio engendrado por ellos.

v_1

Si u es ortogonal $v_2 \implies u \perp x \forall x \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

....

v_p

P.2: Los vectores de un conjunto ortogonal son linealmente independientes.

Si $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ sistema ortogonal de vectores $\implies \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ son l.i.

Demostración:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_p = 0 \text{ Todos los coeficientes } 0$$

Multiplicamos escalarmente:

$$u_1 u_1 + u_2 u_1 + \dots + u_p u_1 = 0$$

valen 0 por ser ortogonales

$$\|u_1\|^2 = 0 \implies u_1 = 0$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_2 + \dots + u_p u_2 = u_2 \cdot 0 = 0$$

valen 0 por ser ortogonales

$$\|u_2\|^2 = 0 \implies u_2 = 0$$

.....

La única combinación lineal que resulta 0 es aquella en la que todos los coeficientes son 0.

P.3: Supongamos un espacio vectorial V y en él un subespacio. El conjunto de aquellos vectores que son ortogonales a todos los vectores del subespacio forman un subespacio vectorial que se llama subespacio ortogonal.

" $H^\perp$ "

$$\{xv \mid \langle xv, uv \rangle = 0 \text{ } \forall u \in H\} = H^\perp$$

Ejemplo.

Hallar el subespacio ortogonal a H siendo $H = \{xv \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

Buscamos un sistema de generadores del subespacio H . Ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = -x_2 + 2x_3$$

$$x_1 = -x_2 + 2x_3$$

$$x_2 =$$

$$x_3 =$$

$\mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\} = H^\perp$ a todos los vectores ortogonales a los 2.

$$H^\perp = \{xv \mid \langle xv, (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid -x_1 + x_2 = 0\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mid (2, 0, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

P.4: Todo espacio vectorial euclídeo posee un base ortonormal.

Demostración:

Ortogonalización de una base por el método de Gram-Schmidt:

Dada una base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de un espacio vectorial V ortogonalizarla por el método de G-S consiste en hallar otra base ortogonal de tal manera que la recta engendrada por u_1 sea igual que e_1 .

El plano que engendra u_1, u_2 sea igual que e_1, e_2 .

El espacio de tres dimensiones que engendra u_1, u_2, u_3 sea igual que e_1, e_2, e_3 .

El espacio engendrado por $u_1, u_2, \dots, u_n$ sea igual que $e_1, e_2, \dots, e_n$

$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ Base de V ; ortogonalizar por G-S $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$\mathcal{L}\{u_1\} = \mathcal{L}\{e_1\}$$

$$\mathcal{L}\{u_1, u_2\} = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$$

.....

$$\mathcal{L}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Comprobar que los vectores forman base de $\mathbb{R}^3$ y ortogonalizar por el método de G-S.

Ortonormalizar la base.

$$B = \{(-1, 1, 2), (2, 1, -3), (1, 0, 1)\}$$

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3$$

Comparamos la base:

$$-1 \quad 1 \quad 2$$

$$2 \quad 1 \quad -3 \quad | \quad 0 = 8 \text{ base}$$

$$1 \quad 0 \quad 1$$

$$B' = \{e_1, e_2, e_3\} \quad e_1 = u_1 = (-1, 1, 2)$$

$$e_2 = u_2 + a e_1 = (2, 1, -3) + a(-1, 1, 2) \quad e_2 \cdot e_1 = u_2 \cdot e_1 + a e_1 \cdot e_1$$

$$0 = (2, 1, -3) \cdot (-1, 1, 2) + a(-1, 1, 2) \cdot (-1, 1, 2) \quad 0 = -7 + 6a \quad a = 7/6 \quad e_2 = (2, 1, -3) + 7/6(-1, 1, 2)$$

$$e_2 = (5/6, 13/6, -4/6) \text{ más cómodo } (5, 13, -4)$$

$$\text{Comprobamos } (-1, 1, 2) \cdot (5, 13, -4) = 0$$

$$e_3 = u_3 + b e_1 + c e_2 = (1, 0, 1) + b(-1, 1, 2) + c(5, 13, -4)$$

$$e_3 \cdot e_1 = 0 = (1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 2) + b(-1, 1, 2) \cdot (-1, 1, 2) + c(5, 13, -4) \cdot (-1, 1, 2) = 1 + b \cdot 6 + 0 \quad b = -1/6$$

$$e_3 \cdot e_2 = 0 = (1, 0, 1) \cdot (5, 13, -4) + b(-1, 1, 2) \cdot (5, 13, -4) + c(5, 13, -4) \cdot (5, 13, -4) = 1 + 0 + c \cdot 210 \quad c = 1/210$$

$$(1, 0, 1) - 1/6(-1, 1, 2) - 1/210(5, 13, -4) = (240/210, -48/210, 144/210) \text{ más cómodo: } (240, -48, 144); (5, -1, 3)$$

$$B' = \{(-1, 1, 2), (5, 13, -4), (5, -1, 3)\}$$

Comprobación:

$$(-1, 1, 2) \cdot (5, 13, -4) = 0$$

$$(-1, 1, 2) \cdot (5, -1, 3) = 0$$

$$(5, 13, -4) \cdot (5, -1, 3) = 0$$

Base ortogonal

Normalizamos los vectores. Dividimos cada vector por su módulo.

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{5}{\sqrt{210}}, \frac{13}{\sqrt{210}}, -\frac{4}{\sqrt{210}} \right), \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}} \right) \right\}$$

Ortogonalizar la siguiente base: $\{(1,1,0)(0,1,1)(1,0,1)\}$

$$B' = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$e_1 = u_1 = (1, 1, 0)$$

$$e_2 = u_2 + ae_1 = (0, 1, 1) + a(1, 1, 0)$$

$$e_2 \cdot e_1 = 0 = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) + a(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) = 1 + a \quad a = -1/2$$

$$e_2 = (0, 1, 1) - 1/2(1, 1, 0) = (-1/2, 1/2, 2/2) = (-1, 1, 2)$$

$$e_3 = u_3 + be_1 + ce_2 = (1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(-1, 1, 2)$$

$$e_3 \cdot e_1 = 0 = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0) + b(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) + c(-1, 1, 2) \cdot (1, 1, 0) = 1 + 2b + 0 \quad b = -1/2$$

$$e_3 \cdot e_2 = 0 = (1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 2) + b(1, 1, 0) \cdot (-1, 1, 2) + c(-1, 1, 2) \cdot (-1, 1, 2) = 1 + 0 + 6c \quad c = -1/6$$

$$e_3 = (1, 0, 1) - 1/2(1, 1, 0) - 1/6(-1, 1, 2) = (4/6, -4/6, 4/6) \text{ más cómodo } (1, -1, 1)$$

$$B' = \{(1, 1, 0)(-1, 1, 2)(1, -1, 1)\} \text{ Normalizamos:}$$

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$$

Tutoría del 11-1-00:

Sea $f: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$

$$f(A) = A + A^T/2$$

Probar que es lineal.

2 condiciones:

$$f(A+B) = f(A) + f(B)$$

$$f(A) = f(A)$$

$$f(A+B) = A+B + (A+B)^T/2 = A+B + A^T + B^T/2 = A + A^T/2 + B + B^T/2 = f(A) + f(B)$$

$$f(A) = A + (A)^T/2 = A + A^T/2 = ((A+A^T)/2) = f(A)$$

Es lineal.

Núcleo y base del mismo:

$$\text{Ker}(f) = \{A/f(A)=0\} = \{A/A + A^T/2=0\}$$

$A + A^T/2=0$; $A + A^T=0$; $A^T=-A$ Matrices tales que su traspuesta sea igual a su opuesta. Matrices antisimétricas de orden $n \times n$. Parecido al ejercicio 9 se subespacios .

Matrices antisimétricas:

$0 \ a_2 \ a_3 \dots a_n$

$-a_2 \ 0 \ b_3 \dots b_n$

$-a_3 \ -b_3 \ 0 \dots c_n$

.....

$-a_n \ -b_n \ -c_n \dots 0$

$0 \ a \ b$

$-a \ 0 \ c$ generadores

$-b \ -c \ 0$

$0 \ a \ b \ 0 \ a \ 0 \ 0 \ 0 \ b \ 0 \ 0 \ 0$

$-a \ 0 \ c = -a \ 0 \ 0 + 0 \ 0 \ 0 + 0 \ 0 \ c$

$-b \ -c \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ b \ 0 \ 0 \ 0 \ c \ 0$

$0 \ a_2 \ a_3 \dots a_n \ 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 1 \ .$

$-a_2 \ 0 \ b_3 \dots b_n \ -1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ .$

$-a_3 \ -b_3 \ 0 \dots c_n = \text{£} \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ -1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ .$

.....

$-a_n \ -b_n \ -c_n \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ . \ -1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ .$

$0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0$

$0 \ 0 \ 1 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 1 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0$

$0 \ -1 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0$

.....

$0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ -1 \ 0 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 1$

$0 \ 0 \ 1 \dots 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots 1 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \dots -1 \ 0$

$n-1+n-2+n-3 \dots +2+1 \ S_n = (a_1 + a_n)n/2 = n^2 - n/2 \text{ dim. del Ker.}$

$\text{Img}(f) = \{B/B = A + A^T/2\}$ Matrices simétricas.

$A = S + T \ S = A + A^T/2$ Simétricas $T = A - A^T/2$ Antisimétricas.

$A + A^T \ A^T + (A^T)^T \ A^T + A$

2 2 2

a1 a2 a3.....an

a2 b2 b3.....bn

a3 b3 c3.....cn n+n-1+n-2....1

.....

an bn cn.....

1 0 0.....0 0 1 0.....0 . 0 0 0.....1 .

0 0 0.....0 1 0 0.....0 . 0 0 0.....0 .

0 0 0.....0 0 0 0.....0 . 0 0 0.....0 .

.....

0 0 0.....0 0 0 0.....0 . 1 0 0.....0 .

0 0 0.....0 0 0 0.....0 0 0 0.....0

0 1 0.....0 . 0 0 1.....0 . 0 0 0.....0

0 0 0.....0 . 0 1 0.....0 . 0 0 0.....0 n+n-1+n-1+....+1=(1+n)n/2

..... n2+n/2 dim Img

0 0 0.....0 . 0 0 0.....0 . 0 0 0.....0

0 0 0.....0 . 0 0 0.....0 . 0 0 0.....1

Ejercicio 6:

f A= 1 a c

2 b d f:!3!2

f(1,0,0)=(1,2)

f(0,1,0)=(a,b)

f(0,0,1)=(c,d)

y1 1 a c x1

y2 = 2 b d x2

x3

$$f(2,1,1)=(3,1)$$

$$3 \ 1 \ a \ c \ 2$$

$$1 = 2 \ b \ d \ 1$$

$$1 \ 3 = 2 + a + c$$

$$f(0,2,3)=(1,-1) \ 1=4+b+d$$

$$1 \ 1 \ a \ c \ 0$$

$$-1 = 2 \ b \ d \ 2 \ a=2 \ b=-8 \ c=-1 \ d=5$$

$$3$$

$$1 \ 2 \ -1 \ -2 \ 1$$

$$2 \ -8 \ 5 \ 1 = 17$$

$$-1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2 - x_3, 2x_1 - 8x_2 + 5x_3)$$

Clasificamos f

$$(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im} f = 2$ Espacio final $\dim 2$ sobreyectiva

$\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$ No es inyectiva.

Ejercicio 9:

Homomorfismo $f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$F(P(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$$

$$F(2 - 3x + x^2) = (2, 0, 0, 2)$$

Ecuación matricial:

$$\text{Canónica de } \mathbb{R}[x]: \{1, x, x^2\}$$

$$\text{Canónica en } \mathbb{R}^4(x): \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} a_0$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} a_1$$

$$y^3 \ 1 \ 2 \ 4 \ a^2$$

$$y^4 \ 1 \ 3 \ 9$$

1ª columna: coordenadas $f(x)=(1,1,1,1)$

2ª columna: coordenadas $f(x)=(0,1,2,3)$

3ª columna: coordenadas $f(x^2)=(0,1,4,9)$

Imagen y núcleo:

Img:

$$(A)=3$$

$$\dim \text{Im}(f)=\mathbb{E}\{(1,1,1,1)(0,1,2,3)(0,1,4,9)\}$$

Núcleo:

$$0 \ 1 \ 0 \ 0 \ a_0$$

$$0 = 1 \ 1 \ 1 \ a_1$$

$$0 \ 1 \ 2 \ 4 \ a_2$$

$$0 \ 1 \ 3 \ 9$$

$$\dim \text{Ker}(f)=3- (A)=3-3=0$$

$\ker(f)=\{0\}$ Inyectiva.

Base ortonormal

$$B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\|e_1\|=\|e_2\|=\dots=\|e_n\|=1 \quad e_i \cdot e_j = 0 \quad i \neq j$$

$$e_i \cdot e_j = 1 \quad i=j$$

$$0 \ i \neq j$$

Matrices ortogonales

Una matriz C cuadrada es ortogonal si su inversa es igual a su traspuesta.

C es ortogonal $C^{-1}=C^T \quad C^T C = C C^T = I$ (identidad)

Ejemplo:

$$1 \ 0 \ 0$$

$$0 \sqrt{3}/2 \ 1/2$$

$$0 \ -1/2 \ \sqrt{3}/2$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$CCT = 0 \sqrt{3}/2 \ 1/2 \ 0 \ \sqrt{3}/2 \ -1/2 = 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \ -1/2 \ \sqrt{3}/2 \ 0 \ 1/2 \ \sqrt{3}/2 \ 0 \ 0 \ 1$$

Propiedades:

P.1: Si una matriz es ortogonal su determinante puede valer 1 o -1.

Si C es ortg. $|C| = \pm 1$

$$CCT = I$$

$$|C| \ |CT| = |I|$$

$$|C|^2 = 1$$

$$|C| = \pm 1$$

P.2: Las filas y columnas de una matriz ortogonal están formadas por una base o conjunto de vectores ortonormales.

C es ortogonal

1ª columna v_1 $C(v_1, v_2, \dots, v_n)$

2ª columna v_2 v_1^T

..... v_2^T

n columna v_n Si C es ortogonal $CTC = I$

v_n^T

$$v_1^T \ v_1^T v_1 \ v_1^T v_2 \dots v_1^T v_n \ v_1^* v_1 \ v_1^* v_2 \dots v_1^* v_n$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \ v_2^T = v_2^T v_1 \ v_2^T v_2 \dots v_2^T v_n = v_2^* v_1 \ v_2^* v_2 \dots v_2^* v_n$$

... ..

$$v_n^T \ v_n^T v_1 \ v_n^T v_2 \dots v_n^T v_n \ v_n^* v_1 \ v_n^* v_2 \dots v_n^* v_n$$

$$1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 1 \text{ si } i=j$$

$$= 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ v_i^* v_j$$

$$\dots 0 \text{ si } i \neq j$$

0 0 0.....1

P.3: Propiedades de los autovalores de matrices simétricas reales.

- Si A es una matriz simétrica real todos sus autovalores son números reales.
- Si A es una matriz simétrica real los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Demostración:

Si A es una matriz simétrica real y λ_1, λ_2 son dos autovalores distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) y x_1 y x_2 autovectores asociados a ellos entonces:

$$\lambda_1 x_1 = Ax_1; Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

Serán ortogonales si su producto escalar es 0.

Hallemos el producto escalar.

$$\lambda_1 x_1 \cdot x_2 = Ax_1 \cdot x_2 = (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2 = x_1^T A x_2 = x_1 \cdot Ax_2 = x_1 \cdot \lambda_2 x_2 = \lambda_2 (x_1 \cdot x_2)$$
 Primer miembro

Coordenadas en filas columnas Simétrica $A^T = A$

$$\lambda_1 x_1 \cdot x_2 - \lambda_2 x_1 \cdot x_2 = 0 \quad (\lambda_1 - \lambda_2) x_1 \cdot x_2 = 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ porque son distintos! } x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = 0$$

Si A es una matriz simétrica real es diagonalizable. Además existe una base ortonormal de autovectores que la diagonaliza.

Situaciones que se pueden dar:

- Matriz A . Tiene todos sus autovalores distintos. Los autovalores directamente forman base ortogonal. Para hallar la base ortonormal que diagonaliza de esta forma a esta matriz habrá que normalizar a los vectores.
- Matriz A . Tiene autovalores múltiples. La base de autovectores no tiene porque salir directamente ortogonal porque los autovectores asociados a autovalores distintos si serán ortogonales pero los autovectores correspondientes al mismo autovalor no tienen porque salir ortogonal. Proceso de G-S. Para obtener la base ortogonal de autovectores podemos utilizar el método de G-S.

Ejemplo:

Diagonalizarla de la forma ordinaria y luego con una base de autovectores.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2-03$$

$$/A-I/ = 0 \quad 2-3 = (2-)^2(5-)-9(2-)-9(2-)= (2-)[(2-)(5-)-18] = (2-)[10-7+ -18]$$

$$3 \quad 3 \quad 5- = 2- (-7-8) = 0 \quad 2- = 0 \quad = 2$$

$$-7-8=0 \quad =8 \quad =-1$$

$$\mathcal{E}\{=2\}=\{(, -, 0)\}=\mathcal{E}\{(1,-1,-->0[Author:A])\}$$

$$0 \quad 0 \quad 3 \times 0$$

$$0 \quad 0 \quad 3 \quad y = 0 \quad = 2$$

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad z \quad 0$$

$$3z=0 \quad x=$$

$$3y+3z=-3x \quad y= \quad z=0 \quad (1,-1,0)"(1,1,2)$$

$$\mathcal{E}\{=8\}=\{(1/2, 1/2,)\}=\mathcal{E}\{(1,1,2)\}$$

$$-6 \quad 0 \quad 3 \times 0$$

$$0 \quad -6 \quad 3 \quad y = 0 \quad = 2$$

$$3 \quad 3 \quad -3 \quad z \quad 0$$

$$-6x=-3z$$

$$-6y=-3z$$

$$\mathcal{E}\{=-1\}=\{(-, -,)\}=\mathcal{E}\{(-1,-1,1)\}$$

$$3 \quad 0 \quad 3 \times 0$$

$$0 \quad 3 \quad 3 \quad y = 0 \quad = 2$$

$$3 \quad 3 \quad 6 \quad z \quad 0$$

$$3x=-3z$$

$$3y=-3z \quad (1,-1,0)"(-1,-1,1)$$

$$(1,1,2)"(-1,-1,1)$$

Base de autovectores que diagonaliza

$\{(1,-1,0)(1,1,2)(-1,-1,1)\}$ Es ortogonal.

La matriz semajante diagonal es

$$2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1$$

$$- \wedge - \ 0 \ 8 \ 0 \ P = -1 \ 1 \ -1$$

$$0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1$$

Diagonalización ordinaria

La relación que liga a todas estas matrices

$$- \wedge - = P^{-1} A P$$

$$2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ -1$$

$$0 \ 8 \ 0 = -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 2 \ 3 \ -1 \ 1 \ -1$$

$$0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1$$

Diagonalización mediante base ortonormal o matriz ortogonal.

Buscar base ortonormal de autovectores.

$$2 \ 0 \ 3$$

$$A = 0 \ 2 \ 3 \text{ Base ortogonal}$$

3 3 5 Normalizamos vectores

$$\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$$

$$1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{6} \ -1/\sqrt{3}$$

$$C = -1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{6} \ -1/\sqrt{3} \ - \wedge - = C^T A C \text{ Matrices congruentes}$$

$$0 \ 2/\sqrt{6} \ 1/\sqrt{3}$$

$$2 \ 0 \ 0 \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} \ 0 \ 2 \ 0 \ 3 \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{6} \ -1/\sqrt{3}$$

$$0 \ 8 \ 0 = 1/\sqrt{6} \ 1/\sqrt{6} \ 2/\sqrt{6} \ 0 \ 3 \ 3 \ 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{6} \ -1/\sqrt{3}$$

$$0 \ 0 \ -1 \ -1/\sqrt{3} \ -1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 3 \ 3 \ 5 \ 0 \ 2/\sqrt{6} \ 1/\sqrt{3}$$

Diagonalizar:

$$2 \ 2 \ 2$$

$$2 \ 5 \ -1$$

$$2 \ -1 \ 5$$

21/07/ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

MATEMÁTICAS

44

Impreso hasta aquí el 2/12/99

Impreso hasta aquí el 7/12/99

Impreso hasta aquí el 23/12/99

Impreso hasta aquí el 28/12/99

Impreso hasta aquí el 29/12/99

Impreso hasta aquí el 5/12/00

Impreso hasta aquí el 14/01/00

Impreso hasta aquí el 15/01/00

Impreso hasta aquí el 16/01/00

vv

vv

wv

$f(vv+wv)$

$f(vv)$

$f(vv) = f(vv)$

$f(wv)$

$f(vv) + f(wv)$

$f(0vE) = 0vF$

$0vE$

$0vE$

H

$f(H)$

$yv1$

$yv2$

$$Y_V = A X$$

$$Y = AX$$

$$Y = A X$$

$$R^{-1} \times R = I$$

$$xv * yv = xv^T yv$$