1º EXAMEN DE MATEMATICAS I

- Discutir según los valores de a , el sistema:

$$ax + y + z = 1$$
$$x + ay + z = 1$$
$$x + y + az = 1$$

- Resolver la ecuación matricial XA=B+C, donde:

A= $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

B= $\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$

C= $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$

110

010

012

- Utilizando las propiedades de los determinantes calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$$

- Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano x=y que distan 1 del plano 2x−y+2z=2
- Dadas las rectas:

$$r \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$$
$$s \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.

b) Hallar la distancia entre ellas

- En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes:

A= Sale un número impar

B= Sale un número par

C= Sale el 1 o el 2

Se pide:

- ¿Son independientes A y B?
- ¿Son independientes A y C?
- Calcular P(A/C)?
- En una caja hay 6 bolas numeradas, 3 de ellas con números positivos y las otras 3 con números negativos. Se extrae una bola y después otra sin reemplazamiento.
- Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.
- Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

<u>SOLUCIONES</u>

- Discutir según los valores de a, el sistema.

$$ax + y + z = 1$$
$$x + ay + z = 1$$
$$x + y + az = 1$$

A= $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0$$

	1	0	-3	2
1	0	1	1	-2
	1	1	-2	0
1	0	1	2	
	1	2	0	

a = 1

a = −2

$a = \ 1 \qquad |A| = 0 \qquad RagA) = 1$

$a = -2 \qquad |A| = 0 \qquad Rg|A| = 2$

$a \quad 1,-2 \qquad |A| \quad 0 \qquad Rg\ A = 3$

$$A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right|$$

Si $a = 1 \quad |A^*| = 0 \quad Rg\ A^* = 1$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Si $a = -2$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1+1+2+2-1 = 9 \quad 0$$

Si $a = -2$

$|A^*| \quad 0 \quad RgA^* = 3$

CONCLUSIÓN

$Si\ a = 1 \quad Rg\ A = 1$

$Rg\ A^* = 1 \quad S.C.I.$

$N\ \ incog = 3$

$Si\ a = -2 \quad Rg\ A = 2$

$Rg\ A^* = 3\ \ S.I.$

$Rg\ A = 3$

$Si\ a \quad -2\,,1 \quad Rg\ A^* = 3 \quad S.C.D.$

$N\ \ Incog = 3$

- Resolver la ecuación matricial XA=B+C

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

X A = B + C

X = (B + C) A−1

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

$$|A| = 1$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; (AdjA)^t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$x = \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix}$$

- Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = x \quad 0 = 0$$

4. Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano x=y que distan 1 del plano

$$2x - y + 2z = 2$$

Plano π_1 $\quad x = y$

Plano π_2 $\quad 2x - y + 2z - 2 = 0$

Se tiene que cumplir que:

_ Equidisten en el plano π_1

_ Disten 1 de π_2

$$d(P,\pi_2) = \frac{|2x - y + 2z - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = 1$$

$$|2x - y + 2z - 2| = 3$$

Va a tener 2 soluciones:

$$\varphi_1 : 2x - y + 2z - 2 = -3 \qquad 2x - y + 2z - 5 = 0$$
$$\varphi_2 : 2x - y + 2z - 2 = -3 \qquad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas r y r´ será donde se crucen

$$r = \pi_1 \quad \varphi_1 \qquad \begin{matrix} x = y \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= \frac{5-\lambda}{2} \end{aligned}$$

$$r' = \pi_1 \quad \varphi_2 \qquad \begin{matrix} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= \frac{-1-\lambda}{2} \end{aligned}$$

- Dadas las rectas:

$$r \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$$
$$s \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.

b) Hallar la distancia entre ellas.

$$r \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad \begin{matrix} \vec{v}_r(3, 2, 4) \\ A(3\lambda + 1,\ 2\lambda - 2,\ 4\lambda + 1) = (1, -2, 1) \end{matrix}$$
$$s \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad \begin{matrix} \vec{v}_s(-1, 2, 3) \\ B(-\lambda - 2,\ 2\lambda + 3,\ 3\lambda + 2) = (-2, 3, 2) \end{matrix}$$

- $\vec{AB}$
  $(-3, 5, 1)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -51 \neq 0 \qquad Rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}) = 3$$

Se cruzan sin cortarse

b)

$\pi\{$

	1	0	-3	2
1	0	1	1	-2
	1	1	-2	0
1	0	1	2	
	1	2	0