

Tema 4: Teoría del endomorfismo

Algoritmo de la división: dados $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ existen $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (resto) únicos tales que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ de modo que $r(x) = 0$ ó $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(g(x))$.

Teorema del resto: dado un polinomio $f(x)$, se verifica:

$(x-t) \mid f(x) \iff (x-t)$ es divisor de $f(x) \iff t$ es una raíz de $f(x)$

Nota: Si $g(x) \cdot q(x) = f(x)$ se dice que $g(x)$ es divisor de $f(x)$: $g(x) \mid f(x)$.

$\cdot$ t es una raíz de $f(x)$! al sustituir en $f(x)$ la x por t sale 0.

$(K[x], +, \cdot, \cdot^{-1})$ Unidades del anillo $K[x]$ (polinomios que : las constantes

tienen inversa) no nulas

$$f \cdot g = 1$$

$$\text{gr}(f) + \text{gr}(g) = \text{gr}(1) = 0$$

$$\text{gr}(f) = \text{gr}(g) = 0$$

$K[x]$ está constituido en el cuerpo de fracciones de $K[x]$, que es $\{f(x)/g(x); f(x), g(x) \in K[x] \text{ y } g(x) \neq 0\}$

!!!

$$K[x] \neq K(x)$$

Máximo común divisor de los polinomios $f_1, \dots, f_r$: es el polinomio mónico de mayor grado que divide a todos los f_i .

Dominio de Ideales Principales (D.I.P.): $K[x]$ es un D.I.P. cuando cualquier ideal es el conjunto de los múltiplos de un polinomio. En particular, si consideramos el ideal generado por unos cuantos polinomios, $f_1, \dots, f_r$, es el conjunto de los múltiplos del polinomio d , siendo d el máximo común divisor de los f_i . Se denota (d) .

Polinomio irreducible: $f \in K[x]$ mónico se dice que es irreducible si los únicos divisores mónicos de f son 1 y f (salvo productos por constantes).

Teorema: Cada polinomio se descompone de una única manera en producto de irreducibles por una constante.

Lema: Si f es un polinomio irreducible y f divide a $g \cdot h$ ($f \mid g \cdot h$), entonces $f \mid g$ ó $f \mid h$.

$K[x]$ es un dominio de factorización única.

Polinomios irreducibles en $K[x]$: Hay infinitos. Los mónicos de grado 1 siempre son irreducibles.

! $[x] \neq K(x)$! Los únicos polinomios irreducibles son los (mónicos) de grado 1.

Teorema Fundamental del álgebra

! $[x]$! Son irreducibles ! los de grado 1

! algunos de grado 2, los que no tienen raíces.

Los que son de la forma $(x-t)^2+s^2=0$ con $s \neq 0$.

! $[x]$! hay irreducibles de cualquier grado.

Polinomio mínimo. Polinomio característico.

¿Qué se pretende con la teoría del endomorfismo?

h

$V \rightarrow V$ un endomorfismo $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de V

A es matriz coordenada de h en esa base.

Trataremos de hallar otra base $\{c_1, \dots, c_n\}$ de V de modo que la matriz coordenada de h en esta nueva base sea lo más sencilla posible.

Supongamos que se puede conseguir que la matriz coordenada de h en la nueva base es

t_1

$$0 = C \cdot Y = AX$$

$$0 \cdot Y = CX$$

t_n

$1 \ t_1$

$$\text{Por tanto, } h(c_1) = C \cdot 0 = 0 = t_1 c_1$$

.. ..

$0 \ 0$

$$h(c_j) = t_j \cdot c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Si ponemos X_j para las coordenadas de c_j en la base inicial $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$X_j =$$

entonces, la imagen de c_j la podemos calcular usando las coordenadas respecto de la base antigua:

$$t(c_j) = AX_j$$

$$= AX_j = t_j X_j \quad [t_j \cdot I_n - A] \cdot X_j = 0$$

$t_j c_j t_j x_j$

X_j es solución no nula del sistema homogéneo $[t_j \cdot I_n - A] \cdot X = 0$.

Por tanto, ha de ser $\text{rang}[t_j \cdot I_n - A] < n$, luego $t_j \cdot I_n - A$ no es regular, o sea $[t_j \cdot I_n - A] = 0$.

O sea, t_j es una raíz del polinomio $|xI_n - A|$

solución de la ecuación $xI_n - A = 0$

$x \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = 0$

$\dots$

$\dots$

$x \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = 0$

$K[x] \rightarrow K(x)$

$K[x] \rightarrow K(x)$. Consideramos matrices cuyas elementales son polinomios. En particular, son matrices sobre un cuerpo.

Llamaremos **x-matriz** a cualquier matriz cuyos elementos están en $K[x]$, es decir, cuyos elementos son polinomios; diremos que una **x-matriz** M es **regular**:

- si existe otra x-matriz, N , tal que $M \cdot N = N \cdot M = I_n$.
- si tiene inversa y además su inversa es también una x-matriz.

Tipos de x-matrices:

x- matriz elemental de tipo 1:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

x- matriz elemental de tipo 2:

$$q \in K[x] \quad S_{ij}(q)^{-1} = S_{ij}(-q)$$

x- matriz elemental de tipo 3:

$$s \in K^* \quad M_i(s)^{-1} = M_i(s^{-1})$$

Proposición: Si M es una x-matriz, entonces:

- $P_{ij} \cdot M$ es la x -matriz que resulta de intercambiar en M las filas i y j .
- $M \cdot P_{ij}$ es la x -matriz que resulta de intercambiar en M las columnas i y j .
- $S_{ij}(q) \cdot M$ es la x -matriz que resulta de sumar a la fila i , la fila j multiplicada por q .
- $M \cdot S_{ij}(q)$ es la x -matriz que resulta de sumar a la columna j , la columna i multiplicada por q .
- $M_i(s) \cdot M$ es la x -matriz que resulta de multiplicar la fila i de M por s .
- $M \cdot M_i(s)$ es la x -matriz que resulta de multiplicar la columna i de M por s .

Teorema: Dada una x -matriz M existen x -matrices elementales $P_1, \dots, P_l, Q_1, \dots, Q_s$ tales que $Q_s Q_1 \cdot M \cdot P_1 P_l = E_n$ donde los E_i son polinomios mónicos y

además cada uno divide al siguiente (o

cada uno es múltiplo del anterior)

$$E_1 | E_2 | \dots | E_r$$

Observación: $|xI_n - A|$ es un polinomio mónico de grado n . En particular, $|xI_n - A| \neq 0$.

Consecuencia:

$$= |Q_s| \cdots |Q_1| \cdot |xI_n - A| \cdot |P_1| \cdots |P_l| \text{ en donde}$$

$$K^* \mid K^* \mid \dots \mid K^* \mid K^*$$

polinomio mónico

de grado n

Polinomio de grado n

los Q_i y los P_j son x -matrices elementales.

Por tanto, tiene que ser $r = n$ y además $E_1 \cdots E_n$ es un polinomio mónico de grado n que se diferencia de $|xI_n - A|$ en producto por una constante, luego ha de ser $E_1 \cdots E_n = |xI_n - A|$

Corolario: Para una x -matriz M son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- M es una x -matriz regular.
- $|M| \neq 0$ el determinante de M es una constante no nula.
- M es producto de elementales.

Dada una x -matriz M , denotaremos $D_s(M)$ al máximo común divisor de todos los menores de orden s de M .

Lema: Si P es una x -matriz elemental., entonces $D_s(P \cdot M) = D_s(M) = D_s(M \cdot P)$.

Teorema: Dada la x -matriz $(xI_n - A)$, sabemos que mediante operaciones elementales la podemos transformar en una del tipo con los E_i mónicos y además

$$E_1 | \dots | E_n.$$

Pues bien, esos polinomios mónicos $E_1, \dots, E_n$ están determinados por la x -matriz $xI_n - A$. (Independientemente del proceso seguido nos saldrán los mismos polinomios).

De hecho, son $E1 = D1(xIn - A)$

4