

Tema 6: Espacios vectoriales métricos

El espacio vectorial hermitiano.

Dado un K -espacio vectorial V ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se llama **forma hermitiana** en V a una aplicación $H: V \times V \rightarrow K$ que verifica:

- $H(a_1 + a_2, b) = H(a_1, b) + H(a_2, b)$
- $H(a, b_1 + b_2) = H(a, b_1) + H(a, b_2)$ (consecuencia de 1) y 5))
- $H(ta, b) = t \cdot H(a, b)$
- $H(a, tb) = \bar{t} \cdot H(a, b)$ (se obtiene de 3) y 5))
- $H(a, b) = \overline{H(b, a)}$

Ejemplo: el producto escalar ordinario.

Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de V si conocemos $H(a_i, a_j)$ $\forall i, j$, entonces conocemos $H(a, b)$ $\forall a, b$.

En efecto, si $a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ y $b = y_1 a_1 + \dots + y_n a_n$

$$H(a, b) = H(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, y_1 a_1 + \dots + y_n a_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \cdot H(a_i, a_j)$$

Expresión coordenada de una forma hermitiana: Sea A la matriz $n \times n$ cuyo elemento (i, j) es $H(a_i, a_j)$ se llamará **matriz coordenada de H** en base $\{a_1, \dots, a_n\}$.

y_1

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \times 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\{b_1, \dots, b_n\}$ es otra base de V . Sea P la matriz del cambio de bases:

$$\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} P$$

Si a es un vector cualquiera:

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

$$a = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$$

$$x_1$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

$$x_n$$

$$X = PX$$

$$x_1 \dots x_n \quad X' = X'P'$$

$$a = [a_1 \dots a_n] = [a_1 \dots a_n]P$$

$$x_1 \dots x_n$$

Sea B la matriz coordenada de H respecto de la nueva base (su elemento (i,j) es $H(b_i, b_j)$).

$$\text{Si } a, b \in V \quad a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

$$b = y_1 a_1 + \dots + y_n a_n = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$$

$$y_1$$

$$H(a, b) = [x_1 \dots x_n] A = X'AY = X'P'APY$$

$$y_n$$

$$y_1 \dots y_n \quad X'P'APY = X'BY \quad P'AP = B$$

$$H(a, b) = [x_1 \dots x_n] B = X'BY$$

$$y_n$$

Si no hay lugar a confusión se escribe $a \cdot b$ en lugar de $H(a, b)$ (si sabemos a qué H nos estamos refiriendo).

Si elegimos una base de V, $\{a_1, \dots, a_n\}$ entonces los valores de $a_i \cdot a_j$ determinan a los valores $a \cdot b \quad \forall a, b \in V$.

La matriz $A = [t_{ij}]$ con $t_{ij} = a_i \cdot a_j$ se llama matriz coordenada de H en bases $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Si $\{b_1, \dots, b_n\}$ es esta base dada por $[b_1 \dots b_n] = [a_1 \dots a_n] P$ y B es la matriz coordenada de H en bases $\{b_1, \dots, b_n\}$ entonces $B = P'AP$.

Observación: $t_{ij} = a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i = t_{ji}$ O sea, $A' = A$.

Una **matriz** $A \in \text{Mat}(n, K)$ se dice que es **hermitiana** si verifica que $A' = A$.

Si $K = \mathbb{R}$, hermitiana = simétrica ($A' = A = A$).

Una forma hermitiana H definida en un K-espacio vectorial, V, sobre un cuerpo $K = \mathbb{R}$ se llama **forma bilineal simétrica**:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(t \cdot a) \cdot b = t \cdot (a \cdot b)$$

$$a \cdot (t \cdot b) = t \cdot (a \cdot b)$$

$$(a_1 + a_2) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b$$

$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$$

Trataremos de encontrar una base de V respecto de la cual la matriz coordenada de H sea lo más sencilla posible.

Diremos que dos matrices hermitianas, $A, B \in \text{Mat}(n, K)$, son $\sim$ -**congruentes lineales** si existe P regular tal que $B = P'AP$.

La relación ser $\sim$ -congruentes lineales en el conjunto de las matrices hermitianas $n \times n$ sobre K es reflexiva, simétrica y transitiva.

Conviene recordar:

$$z_1 + z_2 = z_1 + z_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$$

$$z^{-1} = (z)^{-1}$$

Observación: Todas las matrices coordenadas de una forma hermitiana son $\sim$ -congruentes lineales entre sí. Si A y B son $\sim$ -congruentes lineales, entonces existe una forma hermitiana H que tiene como matrices coordenadas a A y a B .

Sea H una forma hermitiana en un K -espacio vectorial V :

- Se dice que los **vectores** a y b son **ortogonales** (o que a es ortogonal a b) si se cumple $a \cdot b = 0$ ($b \cdot a = 0$).

(En el caso particular del espacio ordinario: ortogonal = perpendicular).

- Un **vector** $a \in V$, $a \neq 0$, se dice que es **isótropo** si es ortogonal a sí mismo ($a \cdot a = 0$).
- Se dice que un **vector** a es **ortogonal a un subespacio** S cuando es ortogonal a todos los vectores de S .
- Se dice que el **subespacio** S es **isótropo** si S es ortogonal a S (Si $a, b \in S$ $a \cdot b = 0$).
- El conjunto de los **vectores** que son **ortogonales al subespacio** S se denota SO , $S^\perp$.

Proposición: SO es subespacio vectorial.

$S^\perp SO$ es un subespacio isótropo.

Propiedades:

- $S^\perp T \subseteq SO^\perp TO$
- $S^\perp(SO) \subseteq O$
- S y T son ortogonales $\iff S^\perp TO$ y $T^\perp SO$

Se llama **núcleo de la forma hermitiana** H al subespacio vectorial:

$$VO = \{a \in V; a \cdot b = 0 \forall b \in V\}$$

(V, H) un espacio vectorial hermitiano.

Proposición: Si (V, H) es un espacio vectorial hermitiano y $S \subseteq V$ entonces

$$\dim S + \dim S^\perp = \dim V.$$

(V, H) Núcleo de H : VO .

- Se llama **rango de la forma hermitiana H** al número natural $\text{rang } H = \text{rango de cualquiera de las matrices coordenadas de } H$ (todas ellas tienen el mismo rango).
- Se dice que **H es regular**, ó también que V es regular, si $\text{rang } H = \dim V$ (o sea, si cualquier matriz coordenada de H es regular).

Proposición: (V, H) espacio vectorial hermitiano:

H es regular si y sólo si $VO = 0$.

Proposición: $\dim VO = \dim V - \text{rang } H$.

(V, H) espacio vectorial hermitiano. S un subespacio vectorial de V .

La **restricción de H a S** se denota **HS** y es una forma hermitiana en S :

$$HS(a, b) = H(a, b) \quad \forall a, b \in S$$

¿rang HS ? ¿Núcleo de HS ? ¿Cuándo HS es regular?

El **subespacio S** se dice que es **regular** si HS es regular.

Proposición: Núcleo de $HS = S^\perp \cap VO$.

Consecuencia: $\text{rang } HS = \dim S - \dim(\text{Ker } HS) = \dim S - \dim(S^\perp \cap VO)$

S es regular ! $S^\perp \cap VO = 0$

$$\dim S + \dim(S^\perp \cap VO) = \dim S + \dim S^\perp - \dim VO = \dim V$$

$$\text{Como } S^\perp \cap VO = 0 \text{ ! } S^\perp \cap VO \text{ (suma directa) ! } \dim S + \dim VO = \dim V$$

(V, H) espacio vectorial hermitiano $S_1, \dots, S_r \subset V$

Se dice que la suma $S_1 + \dots + S_r$ es una **suma ortogonal** si es directa y además S_i es ortogonal a S_j $\forall i \neq j$.

En este caso se escribe $S_1 \perp \dots \perp S_r$! Suma directa de subespacios ortogonales 2 a 2.

(V, H) A matriz coordenada de H P^*AP

Encontrar en V una base respecto de la cual la matriz coordenada de H sea lo más sencilla posible.

$\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$! matriz coordenada en base $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$0 \text{ si } i \neq j$$

$$H(b_i, b_j) =$$

$$\lambda_i \text{ si } i=j$$

O sea, los vectores $\{b_1, \dots, b_n\}$ han de ser ortogonales dos a dos.

Queremos descomponer V en suma de subespacios de dimensión pequeña.

Lema: Cualquier suplementario del núcleo es regular: $V = S^\perp V$! S es regular.

Proposición: $H: V \times V \rightarrow K$ (!) (V, H) espacio vectorial hermitiano. Se tiene:

- $a^2 \neq 0 \forall a \in V$ ($a^2 = a \cdot a = H(a, a)$).
- $S^\perp V$; entonces S es isótropo o contiene algún vector no isótropo (Si todos los vectores de S son isótropos ! S es isótropo).

Teorema: Sea (V, H) un espacio vectorial hermitiano sobre el cuerpo K . Entonces, existen $S_1, S_2, \dots, S_n$ subespacios vectoriales de V , de dimensión 1, tales que $V = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$. Si tomamos en cada S_i un vector no nulo b_i entonces $\{b_i\}$ es una base de V . Además $\{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de V con la propiedad de que sus vectores son ortogonales dos a dos.

Una base de V con la propiedad de que sus vectores son ortogonales dos a dos se dice **base ortogonal** de V .

Corolario: Toda matriz hermitiana es $\wedge$ -congruente lineal con una matriz diagonal.

Teorema: Sea (V, H) un espacio vectorial hermitiano real o complejo ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces existe una base de V respecto de la cual la matriz coordenada de H es $\text{diag}[1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0]$.

Corolario: Toda matriz hermitiana compleja o simétrica real es $\wedge$ -congruente lineal con una diagonal de 1's, -1's y 0's (en el caso real serán congruentes lineales).

Se llama **signatura de una base ortogonal** en un espacio vectorial hermitiano al número de vectores de esa base cuyo cuadrado es positivo (>0).

Observación: El número de vectores de cuadrado no nulo en cualquier base ortogonal de un subespacio vectorial hermitiano (V, H) es $\text{rang } H$.

(V, H) espacio vectorial hermitiano.

Observación: Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ es base ortogonal de V , entonces el número de vectores de esa base que no son isótropos es $\text{rang } H$. (en efecto, la matriz coordenada de H en esa base es $\text{diag}[a_1^2, \dots, a_n^2]$).

En consecuencia, todas las bases ortogonales de (V, H) tienen el mismo número de vectores no isótropos (vectores con cuadrado no nulo) y ese es el rango de H .

Teorema(Ley de inercia de Silvestre): Sea (V, H) un espacio vectorial hermitiano. Todas las bases ortogonales tienen la misma signatura. A esa signatura la llamamos signatura de la forma hermitiana H y se denota $\text{sig } H$.

Se llama **signatura de una matriz hermitiana** a la signatura de la forma hermitiana que tenga esa matriz como matriz coordenada.

Corolario: Dos matrices hermitianas, $A, B \in \text{Mat}(n, K)$ con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, son $\wedge$ -congruentes lineales si y sólo si A y B tienen el mismo rango y la misma signatura.

Proposición: Sea (V, H) un espacio vectorial hermitiano y S un subespacio vectorial de V $H|_S: S \times S \rightarrow K$.

Entonces, $\text{rang HS} = \text{rang H}$ y $\text{sig HS} = \text{sig H}$.

Dado un espacio vectorial hermitiano (real o complejo), (V, H) , llamaremos **forma cuadrática** asociada a la matriz hermitiana H a la aplicación $f: V \rightarrow K$ dada por $f(a) = H(a, a) = a^2$. No es una aplicación lineal. $f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\text{Re}(a \cdot b)$.

Conociendo f se conoce perfectamente H : ¿ a, b ?

Si el cuerpo es el de los reales, $K = \mathbb{R}$: $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$! $H(a, b) = \frac{1}{2} (f(a+b) - f(a) - f(b))$

Si $K = \mathbb{C}$: $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2\text{Re}(a \cdot b)$

$\text{Re}(a \cdot b) = \frac{1}{2} (f(a+b) - f(a) - f(b))$

$(i \cdot a + b)^2 = (i \cdot a)^2 + iab + bia + b^2 = H(ia, ia) + H(ia, b) + H(b, ia) + H(b, b) = iH(a, a) + iH(a, b) + iH(a, b) + H(b, b) = a^2 + iab - iab + b^2 = a^2 + b^2 + i(ab - ab) = a^2 + b^2 - 2\text{Im}(a \cdot b)$

$\text{Im}(a \cdot b) = (a^2 + b^2 - (i \cdot a + b)^2) / 2 = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - f(ia+b)]$

Método de Lagrange (para clasificar formas hermitianas por $\sim$ -congruencia lineal)

Ejemplo(10i): Diagonalizar por el método de Lagrange la forma cuadrática

$$4x^2 + 13y^2 + z^2 - 16xy - 4xz - 8yz$$

$$4 \quad -8 \quad -2$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ -8 & 13 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ forma hermitiana de matriz coordenada A

$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ ó forma bilineal simétrica

$$4x^2 + 13y^2 + z^2 - 16xy - 4xz - 8yz = (2x-4y-2z)^2 - 16y^2 - 4z^2 - 16yz + 13y^2 + z^2 - 8yz = (2x-4y-2z)^2 - 3y^2 - 3z^2 - 24yz = (2x-4y-2z)^2 - (3y+4z)^2 + 48z^2 - 3z^2 =$$

$$(2x-4y-2z)^2 - (3y+4z)^2 + 45z^2 = (2x-4y-2z)^2 - (3y+4z)^2 + (3^2+5)z^2 =$$

$$x^2 + y^2 - z^2$$

Si hacemos este cambio de coordenadas ! la matriz coordenada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El espacio vectorial unitario ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Formas hermitianas definidas positivas y negativas.

Una **forma hermitiana** H en un espacio vectorial V se dice que es **definida positiva** si

$\text{sig } H = \dim V$. Es decir, V admite una base ortogonal en la que todos los vectores tienen cuadrado positivo. (En V cualquier base ortogonal tiene todos los vectores con cuadrado positivo).

Proposición: Dado un espacio vectorial hermitiano (V, H) , son equivalentes:

- H es definida positiva.
- $a^2 = H(a, a) > 0 \quad \forall a \neq 0$.
- Si A es matriz coordenada de H , entonces existe Q regular tal que $A = Q'Q$.
- Si A es matriz coordenada de H , entonces los menores (det. de subm.) angulares de A son todos positivos.

Observaciones: Si (V, H) es espacio vectorial hermitiano y H es definida positiva, (siempre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), entonces:

- $a^2 > 0$
- HS es definida positiva para todo $S \in V$
- V admite una base en la que la matriz coordenada de H es I_n .

Si (V, H) es un espacio vectorial hermitiano y H es definida positiva, se llama **norma de un vector** a V al número real $\|a\| = \sqrt{a^2}$

(Notar que $\|a\| = 0 \iff a = 0$) $\|a\| > 0 \quad \forall a \neq 0$.

Una base ortogonal de V se dice que es una **base ortonormada** si todos los vectores de la base son de norma 1.

La matriz coordenada de H respecto de una base ortonormada es I_n .

El espacio vectorial euclidiano.

- V espacio vectorial real con una forma hermitiana de signatura máxima. (V, E) se llamará **espacio vectorial euclidiano**.

Si elegimos en V una base ortonormada, la matriz coordenada de la forma bilineal simétrica es, en esa base, I_n .

Las coordenadas de un vector $a \in V$ respecto de una base ortonormada $\{a_1, \dots, a_n\}$ se llaman coordenadas euclidianas o cartesianas.

Si $a = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de una base ortonormada entonces $E(a, b) = a \cdot b =$

$b = (y_1, \dots, y_n)$ respecto de una base ortonormada $= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Es decir, tenemos el producto escalar ordinario de la geometría.

- V espacio vectorial complejo con una forma hermitiana de signatura máxima, (V, E) se llamará **espacio vectorial unitario**.

Si elegimos en V una base ortonormada, la matriz coordenada de E en esa base es I_n .

Las coordenadas de un vector respecto de una base ortonormada se llaman coordenadas unitarias.

Si $a = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de una base ortonormada entonces $E(a, b) = a \cdot b =$

$$y \cdot b = (y_1, \dots, y_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Proposición (Desigualdad de Cauchy–Schwarz): Si (V, E) es un espacio vectorial unitario o euclidiano, entonces $|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in V$.

Además, se da la igualdad si y sólo si $\{a, b\}$ es ligada.

Nota: $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$! solo tiene sentido hablar de norma cuando estemos en una forma hermitiana de signatura máxima.

Proposición (Desigualdad triangular o de Minkowski): Si (V, E) es un espacio vectorial unitario o euclidiano, entonces $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Además, se da la igualdad si y sólo si $\{a, b\}$ es ligada y $a \cdot b$ es real positivo.

Si $a \cdot b$ es real $\neq -1 \leq \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \leq 1$ (1)

$$\|a\| \cdot \|b\|$$

Sea (V, E) un espacio vectorial euclidiano. Dados dos vectores no nulos, a y b , se llama **ángulo formado por a y b** al ángulo δ comprendido entre 0 y π tal que $\cos \delta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$

$$\|a\| \cdot \|b\|$$

(Esta definición tiene sentido por (1) ya que $\cos \delta \in [-1, 1]$).

Propiedades:

- $\delta = \pi/2 \iff a \perp b$
- $\delta = 0 \iff \{a, b\}$ es ligada y $a \cdot b > 0$
- $\delta = \pi \iff \{a, b\}$ es ligada y $a \cdot b < 0$
- (Teorema del coseno). $\|b-a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos \delta$

Nota: Si $\delta = \pi/2$, tenemos el teorema de Pitágoras.

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Lema: Sea (V, E) un espacio vectorial euclidiano. Toda familia ortogonal de vectores no nulos es libre.

(V, E) espacio vectorial unitario.

Teorema: (V, E) espacio vectorial unitario. Cualquier familia ortogonal de vectores no nulos de V se puede completar hasta tener una base ortogonal de V .

Corolario: Si $\{a_1, \dots, a_r\}$ es una familia ortonormada de vectores en (V, E) , entonces la podemos completar hasta una base ortonormada de (V, E) .

Una matriz cuadrada, regular, P , tal que $P'P = I_n$ se llama **matriz unitaria**.

Una matriz unitaria real se llama **matriz ortogonal** ($PP' = I_n$, o sea, $P' = P^{-1}$) ! $|P| = \pm 1$.

Las matrices unitarias son matrices de cambio de base ortonormada a otra base ortonormada.

Clasificación unitaria de las formas ortonormadas.

Nos dan V, E y H y queremos clasificar H eligiendo la base ortonormada para E de V respecto de la que la matriz coordenada de H sea lo más sencilla posible.

El producto de dos matrices unitarias es unitaria.

La inversa de una matriz unitaria es unitaria.

El conjunto de las matrices unitarias $n \times n$ es un grupo $U(n)$.

El conjunto de las matrices ortogonales $n \times n$ es un grupo $O(n)$.

Las matrices ortogonales cuyo determinante es 1 forman un subgrupo de $O(n)$, se denota $O^+(n)$.

Observación: $O^+(n) \subset O(n) \subset U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$

Si A es matriz coordenada de H en una base ortonormada de (V, E) y cambiamos de base ortonormada de (V, E) (sea U la matriz del cambio de bases), entonces la matriz coordenada de H en la nueva base es U^*AU .

Dos matrices hermitianas, $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ se dice que son **congruentes unitarias** si existe U unitaria tal que $B = U^*AU$.

Dos matrices simétricas reales, $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ se dice que son **congruentes ortogonales** si existe P ortogonal tal que $B = P^tAP$.

Observación:

Dos matrices son congruentes unitarias si y sólo si son matrices coordenadas de una misma forma hermitiana H respecto de dos bases ortonormadas de (V, E) .

Dos matrices son congruentes ortogonales si y sólo si son matrices coordenadas de una misma forma bilineal simétrica H respecto de dos bases ortonormadas de (V, E) .

Observación: Si A y B son congruentes unitarias, entonces A y B son **semejantes**

$$B = U^*AU = (U^{-1})^*AU = Q^{-1}AQ$$

Lema: Sea $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ hermitiana, se tiene:

- Los valores propios de A son todos reales.
- La matriz A es diagonalizable como endomorfismo. (O dicho de otro modo, la forma canónica de A es diagonal).

Lema: Sea (V, E) un espacio vectorial unitario (ortogonal) y $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base ortonormada. Sea A una matriz hermitiana (simétrica) y consideramos el endomorfismo $h: V \rightarrow V$ que tiene matriz coordenada A en la base $\{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces:

- $E(h(a), b) = E(a, h(b)) \quad \forall a, b \in V$.
- V es suma ortogonal de los subespacios fundamentales de h .

Teorema: Sea (V, E) un espacio vectorial unitario (ortogonal) y H una forma hermitiana (bilineal simétrica)

en V . Entonces existe una base de V que es ortonormada para E y que además es ortogonal para H .

Corolario: Dada una matriz hermitiana (simétrica) A , existe U unitaria (ortogonal) tal que U^*AU es diagonal (en la diagonal aparecen los valores propios de A).

Dicho de otro modo: Toda matriz hermitiana es congruente unitaria con una matriz diagonal. Toda matriz simétrica real es congruente ortogonal con una matriz diagonal.

Nota: A y B son congruentes unitarias ! U unitaria t.q. $B = U^*AU = Q^{-1}AQ$! A y B son semejantes.

Corolario: Dos matrices hermitianas $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ son congruentes unitarias si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.

Dos matrices simétricas reales $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, son congruentes ortogonales si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.

Nota: Si $a, b \in V$ y $E(a, b) = 0$! $H(a, b) = 0$?

En general no.

Para que se dé la implicación a, b han de ser valores propios para la matriz coordenada de H .