

APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Es conocido que cuando realizamos cualquier medición, estamos cometiendo errores de diferente índole según la magnitud de medida del instrumento utilizado. Por lo tanto los métodos vistos hasta ahora no nos interesan porque nos daban polinomios que pasaban por dichos puntos. Lo que nos interesa ahora es que el error que haya entre los puntos y la hipotética función sea mínima.

Nosotros tenemos $(n+1)$ puntos y tenemos que calcular una función de la cual desconocemos $(m+1)$ parámetros. Los datos que debemos de calcular son las siguientes: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

El objetivo que nosotros perseguiremos será la de minimizar la suma del cuadrado de las distancias desde la $f(x)$ hasta los puntos. Utilizando una expresión matemática nos quedará de la siguiente manera:

$$D = \sum_{i=0}^n w_i d_i^2$$

Mediante la w_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) nos permite introducir en la función valores que nos permitirán variar el grado de importancia que tienen los distintos datos. En el caso de que no se aprecie variación en las importancias, la w será 1

Para llegar al caso general utilizaremos el caso de líneas rectas.

$P_1(x) = a_0 + a_1x$ donde a_0 y a_1 se eligen de tal manera que la suma de los cuadrados minimice el error de todos los datos. Lo ahora mencionado lo podemos representar de la siguiente forma:

$$D(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2$$

Para que tengamos unos mínimos deberemos derivarlo con respecto a a_0 y a_1 , realizando algunas simplificaciones después para que el resultado sea más visual. Estas son las ecuaciones obtenidas:

$$a_0 \sum_{i=1}^n w_i + a_1 \sum_{i=1}^n w_i x_i = \sum_{i=1}^n w_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n w_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i$$

Consideraremos que el factor de importancia w es igual para todos los casos, siendo entonces su valor 1. Las ecuaciones anteriormente escritas las podemos representar mediante la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} A_{1,1} & A_{1,2} & a_0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & a_1 \end{matrix} = \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \end{matrix}$$

A continuación explicaremos que es cada elemento de la matriz:

$$A_{1,1} = \sum_{i=1}^n w_i$$

$$A_{1,2} = A_{2,1} = \sum_{i=1}^n x_i w_i$$

$$A_{2,2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n y_i w_i$$

$$Z_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i$$

Lo que deberíamos hacer a continuación sería resolver los valores de a_0 y a_1 lo cual no tiene ningún misterio.

A partir del caso de líneas rectas ahora podemos generalizar para un conjunto de n datos. Siguiendo los mismos pasos que para el caso de líneas rectas, obtendremos la expresión que minimice la suma de los cuadrados de las distancias de error de todos los datos, derivándolo a continuación con respecto $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Desarrollando estas ecuaciones obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0 \sum_{i=1}^n 1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

... ..

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i$$

Ahora tenemos un sistema de $m+1$ ecuaciones lineales, para $m+1$ coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ (las incógnitas) siendo m el grado de la misma.

Se puede deducir que los coeficientes son: $C_{ij} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j}$

Siendo los términos independientes: $b_i = \sum_{k=0}^n y_k x_k^i$

A continuación introduciremos el programa que utilizaremos para resolver los ejercicios de aproximación por mínimos cuadrados.

PROGRAMA

program min_cuad;

const

limite=7;

type

```
matriz=array [1..limite+1,1..limite] of real;
```

```
var
```

```
m:matriz;
```

```
procedure introducir_datos (var m:matriz);
```

```
var
```

```
i:integer;
```

```
begin
```

```
for i:=1 to limite do
```

```
begin
```

```
writeln ('Introduce el valor de x',i,:');
```

```
readln (m[1,i]);
```

```
writeln ('Introduce el valor de y',i,:');
```

```
readln (m[2,i]);
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure calcular (var m:matriz);
```

```
var
```

```
i:integer;
```

```
a12,z1,a22,z2,a11,d,a0,a1:real;
```

```
begin
```

```
for i:=1 to limite do
```

```
begin
```

```
m[3,i]:=m[1,i];
```

```
m[4,i]:=m[2,i];
```

```
m[5,i]:=sqr(m[1,i]);
```

```
m[6,i]:=(m[1,i]*m[2,i]);
```

```
writeln ('Introduce la influencia del punto ',i);
```

```
readln (m[7,i]);
```

```
end;
```

```
a12:=0;
```

```
z1:=0;
```

```
a22:=0;
```

```
z2:=0;
```

```
a11:=0;
```

```
for i:=1 to limite do
```

```
begin
```

```
a11:=a11+(m[7,i]);
```

```
a12:=a12+(m[3,i]*m[7,i]);
```

```
z1:=z1+(m[4,i]*m[7,i]);
```

```
a22:=a22+(m[5,i]*m[7,i]);
```

```
z2:=z2+(m[6,i]*m[7,i]);
```

```
end;
```

```
d:=(a11*a22)-(a12*a12);
```

```
a0:=((a22*z1)-(a12*z2))/d;
```

```
a1:=((a11*z2)-(a12*z1))/d;
```

```
writeln ('P(x)= ',a0,'+',a1,'x');
```

```
end;
```

```
begin
```

```
introducir_datos (m);
```

```
calcular (m);
```

```
end.
```

```
DATOS: 1
```

i	x	y	w
1	0.1	0.61	1
2	0.4	0.92	1
3	0.5	0.99	1
4	0.7	1.52	1
5	0.7	1.47	1
6	0.9	2.03	1

Como resultado hemos obtenido, un polinomio de primer grado, siendo su valor:
0.28616033755+1.764556962x

DATOS:2

i	w	x	y
1	1	-5	18
2	1	-3	7
3	1	1	0
4	1	3	7
5	20	4	16
6	1	6	50
7	1	8	67

El polinomio obtenido a partir de los datos introducidos ha sido: **8.8990918264+2.6402623613x**

Para el caso en el cual el grado del polinomio es superior a uno, mediante el programa que viene a continuación realizariamos la colocación en la matriz de los datos y utilizando el método de Gauss realizariamos los cálculos de a , y .

PROGRAMA

program min_cua2;

const

limite1=11;

limite2=7;

fila=3;

columna=4;

type

matriz=array [1..limite1,1..limite2] of real;

matriz1=array [1..fila,1..columna] of real;

var

```

m:matriz;

m1:matriz1;

i,j:integer;

procedure introducir_datos (var m:matriz);

var

i:integer;

begin

for i:=1 to limite2 do

begin

writeln ('Introduce el valor de x',i,:');

readln (m[1,i]);

writeln ('Introduce el valor de y',i,:');

readln (m[2,i]);

writeln ('Introduce el valor de w',i,:');

readln (m[3,i]);

end;

end;

procedure calcular (var m:matriz;var m1:matriz1);

var

i:integer;

a11,a12,a22,a23,a33,z1,z2,z3:real;

begin

for i:=1 to limite2 do

begin

m[4,i]:=m[3,i];

m[5,i]:=m[1,i];

```

```

m[6,i]:=sqr (m[1,i]);

m[7,i]:=m[6,i]*m[1,i];

m[8,i]:=sqr (m[6,i]);

m[9,i]:=m[2,i];

m[10,i]:=m[1,i]*m[2,i];

m[11,i]:=m[6,i]*m[2,i];

end;

a11:=0;

a12:=0;

a22:=0;

a23:=0;

a33:=0;

z1:=0;

z2:=0;

z3:=0;

for i:=1 to limite2 do

begin

a11:=a11+m[4,i];

a12:=a12+(m[3,i]*m[5,i]);

a22:=a22+(m[3,i]*m[6,i]);

a23:=a23+(m[3,i]*m[7,i]);

a33:=a33+(m[3,i]*m[8,i]);

z1:=z1+(m[3,i]*m[9,i]);

z2:=z2+(m[3,i]*m[10,i]);

z3:=z3+(m[3,i]*m[11,i]);

end;

```

```

m1[1,1]:=a11;

m1[1,2]:=a12;

m1[1,3]:=a22;

m1[1,4]:=-z1;

m1[2,1]:=a12;

m1[2,2]:=a22;

m1[2,3]:=a23;

m1[2,4]:=-z2;

m1[3,1]:=a22;

m1[3,2]:=a23;

m1[3,3]:=a33;

m1[3,4]:=-z3;

end;

begin

introducir_datos (m);

calcular (m,m1);

for i:=1 to fila do

begin

for j:=1 to columna do

write (m1[i,j], ' ');

writeln;

end;

end.

DATOS:3

```

i	w	x	y
1	1	-5	18
2	1	-3	7
3	1	1	0

4	1	3	7
5	20	4	16
6	1	6	50
7	1	8	67

Si quisieramos realizar un polinomio de grado 2, mediante el procedimiento anterior, obtendriamos la siguiente matriz:

Una vez de obtener esta matriz, utilizando el método de Gauss obtendremos los valores , y siendo la ecuación:

$$-3.4079+0.6964+1.0667$$

1