

Apunts Bàsics de Regulació Automàtica

Diagrames de Block i funcions de transferència

Funcions de Transferència

$$G(s) = Y(s)/U(s) \text{ sortida } Y(s) = L[y(t)] \text{ entrada } U(s) = L[u(t)]$$

Normalment la funció de transferència s'obté a partir de l'equació diferencial

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0) U(s)$$

$$G(s) = Y(s)/U(s) = b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 / s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

Propietats de la funció de transferència

- definida solament per un sistema linial invariant amb el temps
- Es la transformada de Laplace de la resposta a l'impuls
- Relació entre la transformada de Laplace de la sortida i la de l'entrada
- Totes les condicions inicials del sistema són iguals a 0
- Es independent de l'entrada del sistema
- S'expressa en la variable complexa s de Laplace
- Es estrictament pròpia si $n > m$, pròpia si $n = m$ i impròpia si $n < m$

Polinomi característic

Es defineix com la equació que s'obté al igualar el polinomi de $G(s)$ a 0

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

Ens serveix per determinar l'estabilitat dels sistemes

Diagrames de blocks

S'utilitzen per a modelitzar sistemes. Estudiar les relacions de causa-efecte dels sistemes

Si es coneixen les lleis matemàtiques que governen el sistema

Els elements bàsics d'un diagrama de blocks són:

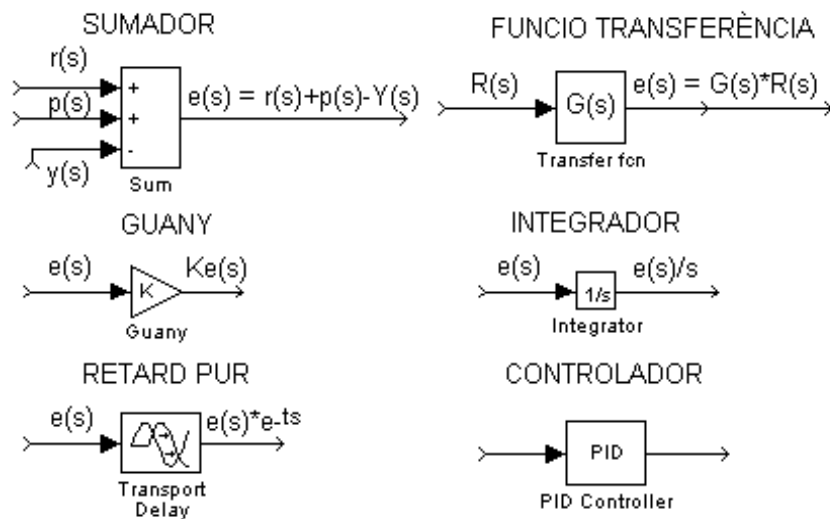
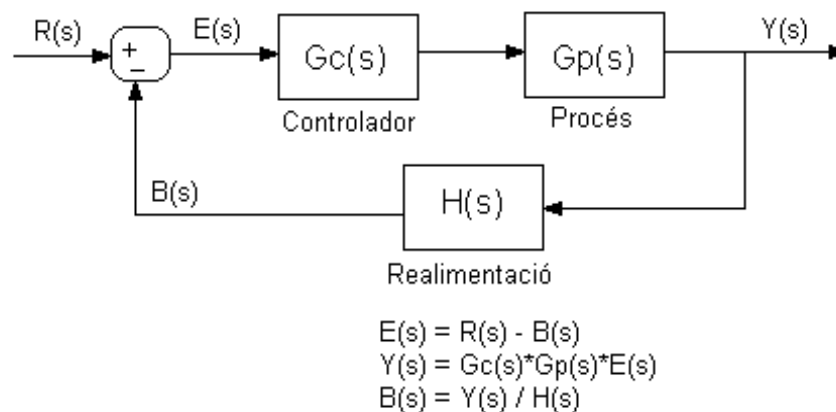


Diagrama de Blocs model en realimentació



Llaç obert

Es agafa la funció de transferència sense considerar la realimentació

$$G(S) = Y(S) / E(S) = G_c(s) * G_p(s)$$

Llaç tancat

Es considera la realimentació llavors la funció de transferència en llaç tancat és

$$M(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)}$$

Simplificació de diagrames de Blocks

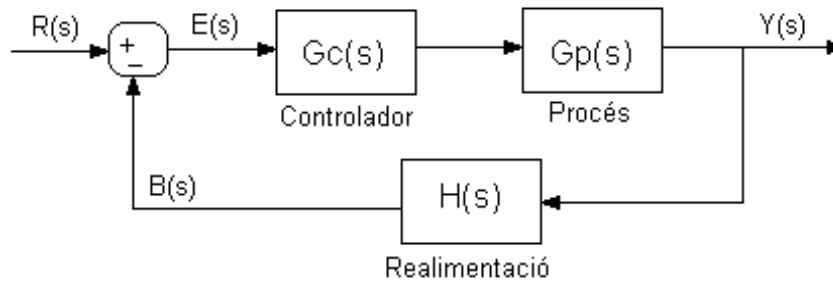
Normalment ens cal determinar $G(s)$ i $M(s)$ en un sistema de control en el qual hi ha moltes més coses: En general la funció de transferència total ens permet simplificar el sistema però perdem molta informació de com es comporta el sistema per dintre.

Totes les realimentacions es simplifiquen aixins:

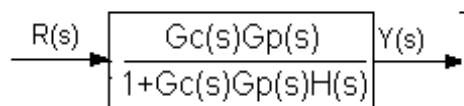
$$M(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$

$$R(S) \frac{1}{1+G(S)H(S)}$$

Les funcions de transferència i guanys es treuen multiplicant:



Simplificat queda:



Estabilitat de Sistemes de control linial

El primer requeriment per un sistema és la ESTABILITAT

Estabilitat absoluta Simplement és saber si és o no és estable

Estabilitat relativa Si un sistema és estable saber com d'estable n'és

Relació entre arrels del polinomi característic i l'estabilitat

$$G(S) = L(g(t)) = \int_0^\infty g(t)e^{-stdt}$$

Si una o més arrels estan a la part negativa del pla complex llavors:

$$|e^{-st}| < 1 \text{ Però}$$

Si només una de les arrels està a la part positiva del pla complex llavors:

$$|e^{st}| \text{ Això tendeix a } \infty, \text{ que viola els requisits de l'estabilitat.}$$

Per tant:

Una arrel no pot estar al semiplà dret del pla complex o no pot tenir part real positiva.

Criteri de Hurwitz

$$F(S) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

On tots els coeficients són reals, perquè no presenti arrels amb parts reals positives:

- Tots els coeficients han de tenir el mateix signe
- Tots els determinants de Hurwitz han de ser positius

Els determinants de Hurwitz es formen com segueix

$$D_1 = a_{n-1} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

El criteri de Routh consisteix en arreglar aquests determinants

Tabulació de Routh Per una equació de 6è grau

$$F(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^6 \quad a_6 \quad a_4 \quad a_2 \quad a_0$$

$$s^5 \quad a_5 \quad a_3 \quad a_1 \quad 0$$

$$s^4 \quad \underline{a_5 a_4 - a_6 a_3} = A \quad \underline{a_5 a_2 - a_6 a_1} = B \quad a_0 \quad 0$$

$$a_5 \quad a_5$$

$$s^3 \quad \underline{A a_3 - a_5 B} = C \quad \underline{A a_1 - a_5 a_0} = D \quad 0 \quad 0$$

$$A \quad A$$

$$s^2 \quad \underline{BC - AD} = E \quad a_0 \quad 0 \quad 0$$

$$C$$

$$s^1 \quad \underline{ED - C a_0} = F \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$E$$

$$s^0 \quad a_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Perque un sistema sigui estable cal que tots els coeficient de la 1era columna, o sigui

a_6, a_5, A, C, E, F han de ser tots positius

A més el nº de intercanvis de signe en aquests elements indica el nº d'arrels amb parts positives que té l'equació.

Casos especials en la tabulació de Routh

Es poden presentar les següents dificultats aplicant la tabulació de Routh:

- El primer element de qualsevol dels renglons de la taula de Routh és 0
- Tots els elements d'una fila de la taula de routh són 0

En el primer cas es reemplaça el 0 per un numero petit arbitrari

Exemple:

S4 1 2 3

S3 1 2 0

S2 0 3 En aquí reemplaçem el 0 pel n° arbitrari

S2 3

S1 2 -3 / = -3/ 0 es comporta com si fos un 0 al numerador

S0 3

El segon cas es dona si una o vàries d'aquestes condicions poden existir

- L'equació té almenys 2 arrels d'igual magnitud i signes contraris
- L'equació té un o més parells d'arrels imaginàries
- L'equació té parells d'arrels complexes simètriques amb el punt (0,0)

Per arreglar-ho es fa el següent:

- $A(s) = 0$ utilitzant els coeficients de la fila que es troba dalt de la renglera de 0s
- Agafar la derivada $dA(s)/ds = 0$
- Reemplaçar la renglera de 0s pels coeficients de $dA(s)/ds = 0$

Exemple 2on Cás

S5 1 8 7

S4 4 8 4

S3 6 6 0

S2 4 4 0

S1 0 0 $A(s) = 4s^2 + 4s$

$dA(s)/ds = 8s$

S1 8 0 Son els coeficients de $dA(s)/ds$

S0 4

L'ús de la taula de Routh s'utilitza per determinar la línia d'estabilitat tractant la K com si fós un paràmetre

També s'utilitza per determinar el valor crític de paràmetres perquè un sistema sigui estable, quan nosaltres desconexem alguns dels paràmetres.

Anàlisi de sistemes de Control en el domini del temps

Errors en l'estat estacionari, precisió

- resposta a un esglaó (error de posició)

$$R(t) = K * U_s(t) \quad R(S) = K/s$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(S)H(S) \quad \text{per } s \rightarrow 0 \quad \text{Ess} = 1/(1+K_p)$$

- resposta a una rampa (error de velocitat)

$$R(t) = K t * U_s(t) \quad R(S) = K/s^2$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} S * G(S)H(S) \quad \text{per } s \rightarrow 0 \quad \text{Ess} = 1/K_v$$

- resposta a una paràbola (error d'acceleració)

$$R(t) = K t^2 * U_s(t) \quad R(S) = K/S^3$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} S^2 * G(S)H(S) \quad \text{per } s \rightarrow 0 \quad \text{Ess} = 1/K_a$$

Tipus	Error Posicio	Error Veloc.	Error Accel.
O	$R/(1+K_p)$	Infinit	Infinit
I	No en te	R/K_v	Infinit
II	No en te	No en te	R/K_a
III	No en te	No en te	No en te

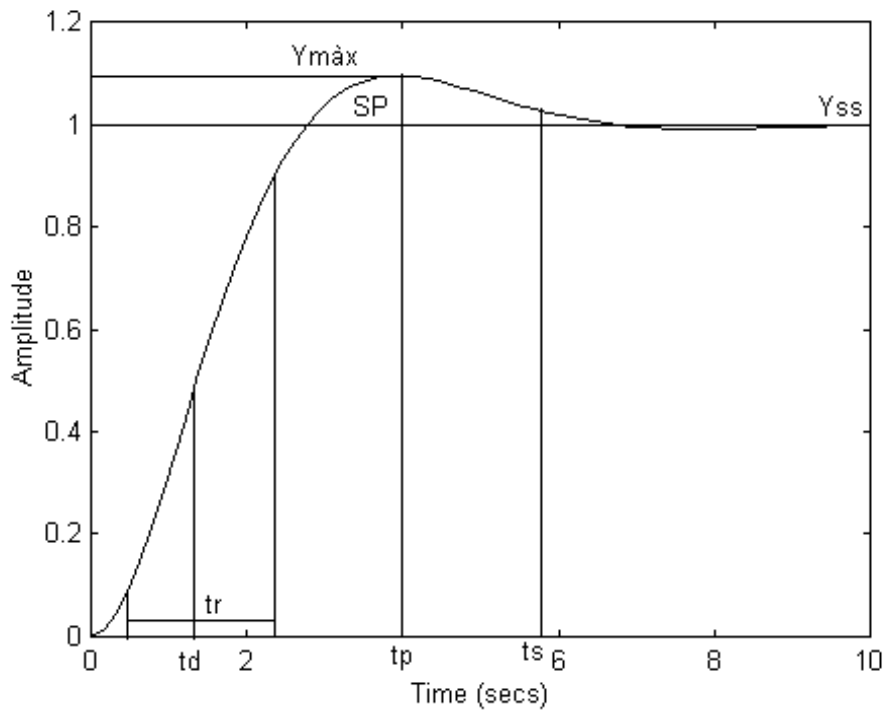
R = Magnitud de l'entrada $RU(s)$ en cas d'un esglaó

El tipus del sistema el determina el nº d'integradors que té el sistema.

Especificacions en el domini del temps

- Sobrepic màxim $Y_{ss} - Y_{màx}$ en %
- Temps de retard T_d , es el temps que tarda a aconseguir el 50% del valor final
- Temps d'alçament T_r , temps que tarda d'anar al 10% – 90% del valor final
- Temps d'assentament T_s , temps de permanència a una banda del X %

Normalment s'agafa un 5% o un 2%



Resposta d'un sistema prototipus de 2on ordre

$$G(S) = \frac{n^2}{s^2 + 2\zeta n s + n^2}$$

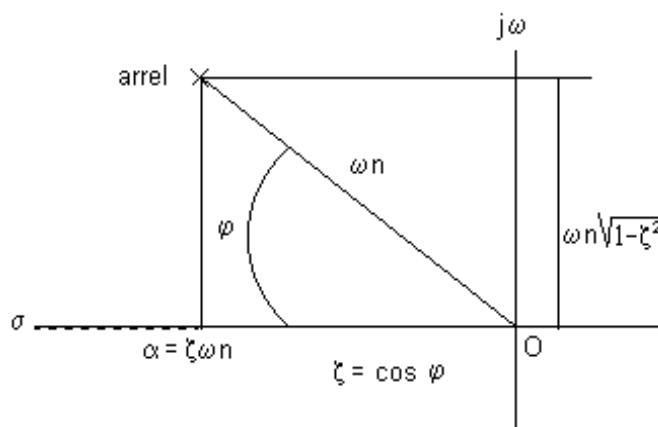
$$s^2 + 2\zeta n s + n^2$$

La solució d'aquest sistema ens dona les arrels que són:

$$= -\zeta n \pm j n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\alpha \pm j d \text{ on } d = \text{freqüència esmorteïda}$$

- n = Distància radial de les arrels a l'origen del pla s
- ζ = La part real de les arrels
- d = La part imaginària de les arrels
- $\cos \varphi$ = Cosinus de l'angle entre la línia radial de les arrels i l'eix negatiu

$$\zeta = \cos \varphi$$



Tipus de sistemes segons el paràmetre

- subesmorteït $0 < \zeta < 1$ $s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
- Críticament esmorteït $\zeta = 1$ $s_1, s_2 = -\omega_n$
- Sobreesmorteït $\zeta > 1$ $s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$
- No esmorteït $\zeta = 0$ $s_1, s_2 = \pm j \omega_n$
- Subesmorteïment negatiu $-1 < \zeta < 0$ $s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ $\omega_n > 0$
- Sobreesmorteïment negatiu $\zeta < -1$ $s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ $\omega_n > 0$

Calcul de les especificacions en el domini del temps

Sobrepic màxim i temps de pic

Tpic = _____ temps quan es presenta el sobrepic

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$SP = 100 \cdot \exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right] \quad SP = y_{\text{màx}} - y_{\text{ss}}$$

- Si reduïm l'esmorteïment, reduïm el sobrepic

Temps de retard i temps d'aixecament

$$\omega_n t_d = 1 + 0.7 \quad (t_d = \text{temps retard} = \text{temps que assolim el 50\% del valor})$$

$$\omega_n t_d = 1.1 + 0.125 \zeta + 0.469 \zeta^2$$

$$\omega_n t_r = 0.8 + 2.5 \zeta \quad (t_r = \text{temps d'aixecament} = \text{temps que passem del 10 a 90\% del valor})$$

$$\omega_n t_r = 1 - 0.4167 \zeta + 2.917 \zeta^2$$

- t_r i t_d proporcionals a ω_n i inversament a ω_n
- Si disminuïm ω_n augmentarem t_r i t_d

Temps d'assentament

$$\omega_n t_s = \frac{-1}{\zeta} \ln[0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}] \quad \text{temps d'assentament a una banda del 5\%}$$

- té una discontinuïtat per $\zeta = 0.691$ (sobrepic del 5%)
- Per $\zeta > 0.691$ t_s és inversament proporcional a ω_n i ζ
- Per $\zeta < 0.691$ t_s és proporcional a ω_n i inversament proporcional a ζ

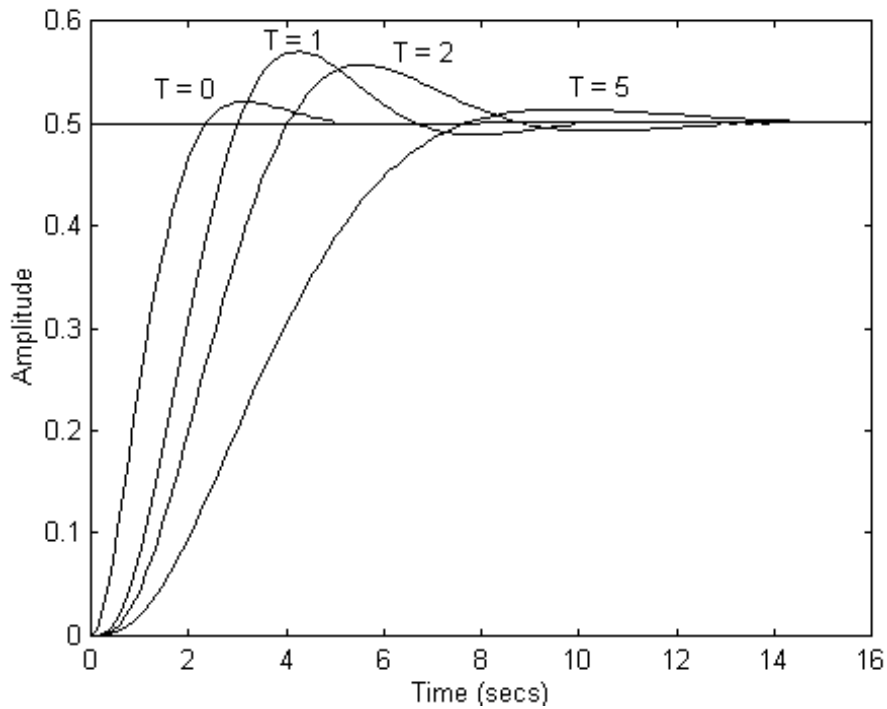
Efecte d'afegir un pol a la funció de transferència (llaç obert)

$G(s) = \frac{n_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$G(s) = \frac{n_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$(Ts+1)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$



L'adició del pol ens afecta de la següent manera:

- Generalment: Augment del sobrepic i temps de pic
- Augment del temps d'establiment
- Inestabilització del sistema

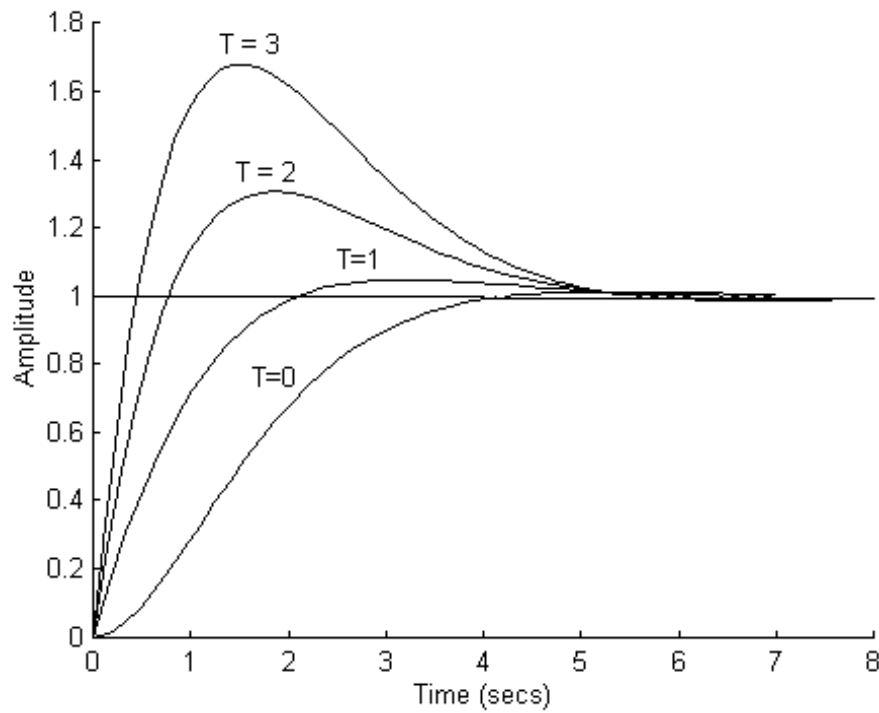
Efecte d'afedir un zero a la funció de transferència (llaç obert)

$G(S) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$G(S) = \frac{(Ts+1)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$



- Disminueix el temps d'aixecament
- Augmenta el sobrepic màxim
- Té l'efecte oposat del d'adició d'un pol

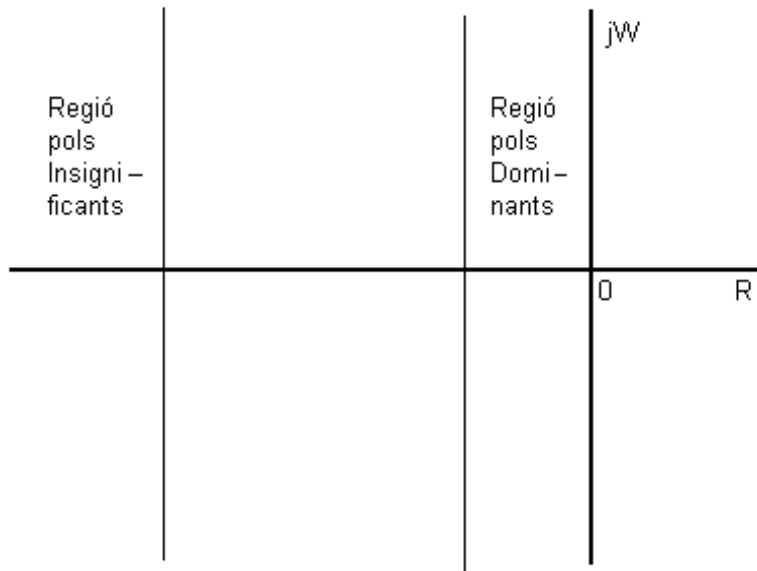
Els zeros i pols molt pròxims tenen efectes contraposats i es poden menystenir els seus efectes.

Pols dominants de les funcions de transferència

Pol dominant Es aquell que té un efecte molt significatiu en la resposta transitòria

Pol insignificant No tenen pes específic en la resposta transitòria

Els pols que estan vora l'origen fan créixer la resposta transitoria i decauran molt lentament en canvi que els pols que estan lluny cauen molt ràpidament.



Entre les 2 regions : Insignificants i dominants hi ha una distància D

D = Magnitud real 5 a 10 vegades major que els pols dominants.

Esmorteïment relatiu

Un sistema de 3er ordre o més que té pols dominants exemple:

$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)}$ Té 2 pols dominants a $1 \pm j = 0.707$

$R(s) = (s+10)(s^2+2s+2)$ El pol real es a 10 D = 10

Es pot dir que $r=0.707$ (esmorteïment relatiu)

Per despreciar el pol insignificant cal tenir en compte:

- El valor final Y_{ss} ha de ser el mateix que el del sistema simplificat

$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)} = \frac{20}{(s/10 + 1)(s^2+2s+2)} = \frac{20}{(s^2+2s+2)}$

$R(s) = (s+10)(s^2+2s+2) \cdot 10(s/10 + 1)(s^2+2s+2) = 10(s+10)(s^2+2s+2)$

Simplificació de sistemes

Es desitjable en sistemes d'ordre alt poder-los simplificar a un ordre més baix que la seva resposta transistòria sigui similar.

$M_H(s) = \text{Sistema d'ordre superior} = \frac{K(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ms^m)}{1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ns^n}$

$1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ns^n$

$M_L(s) = \text{Sistema ordre inferior} = \frac{K(1+c_1s+c_2s^2+\dots+c_qs^q)}{1+d_1s+d_2s^2+\dots+d_ps^p}$

$1+d_1s+d_2s^2+\dots+d_ps^p$

K es la mateixa per assegurar que es mantingui el valor final en el sistema d'ordre baix

Càlcul de ML(s)

$$MH(s) = \frac{1+m_1s+m_2s^2+\dots+m_us^u}{1+l_1s+l_2s^2+\dots+l_vs^v}$$

$$ML(s) = \frac{1+l_1s+l_2s^2+\dots+l_vs^v}{1+m_1s+m_2s^2+\dots+m_us^u}$$

$$MH(j\omega)^2 = \frac{1+e_2s^2+e_4s^4+e_6s^6+\dots+e_{2u}s^{2u}}{1+f_2s^2+f_4s^4+f_6s^6+\dots+f_{2v}s^{2v}} = 1$$

$$ML(j\omega)^2 = \frac{1+f_2s^2+f_4s^4+f_6s^6+\dots+f_{2v}s^{2v}}{1+e_2s^2+e_4s^4+e_6s^6+\dots+e_{2u}s^{2u}}$$

Per la condició que hem expressat a dalt:

$f_2 = e_2, f_4 = e_4, \dots \rightarrow$ El que resta es l'error que cometem

Iguant-ho obtenim que:

$$e_2 = 2m_2 - m_1^2$$

$$e_4 = 2m_4 - 2m_1m_3 + m_2^2$$

$$e_6 = 2m_6 - 2m_1m_5 + 2m_2m_4 - m_3^2$$

$$e_8 = 2m_8 - 2m_1m_7 + 2m_2m_6 - 2m_3m_5 + m_4^2$$

$$f_2 = 2l_2 - l_1^2 = e_2 = 2m_2 - m_1^2$$

$$f_4 = 2l_4 - 2l_1l_3 + l_2^2 = e_4 = 2m_4 - 2m_1m_3 + m_2^2$$

$$f_6 = 2l_6 - 2l_1l_5 + 2l_2l_4 - l_3^2 = e_6$$

$$f_8 = 2l_8 - 2l_1l_7 + 2l_2l_6 - 2l_3l_5 + l_4^2 = e_8 \text{ etc.}$$

Exemple: Simplificació sistema 3er grau a 2on grau

$$M(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{s^3+6s^2+12s+8} = \frac{1}{0.125s^3+0.75s^2+1.5s+1}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+12s+8}$$

Els pols están tots a $s+2$

$$ML(s) = \frac{1}{1+d_1s+d_2s^2}$$

$$1+d_1s+d_2s^2$$

$$M(s) = \frac{1+d_1s+d_2s^2}{1+m_1s+m_2s^2}$$

$$ML(s) = \frac{0.125s^3+0.75s^2+1.5s+1}{1+l_1s+l_2s^2+l_3s^3}$$

$$L_1 = 1.5, L_2 = 0.75, L_3 = 0.125$$

$$f_2 = 2l_2 - l_{12} = e_2 = 2m_2 - m_{12} \quad 1.5 - 1.52 = -0.02 = 2d_2 - d_{12}$$

$$f_4 = -2l_{13} + l_{22} = e_4 = m_{22} \quad 0.1875 = d_{22}$$

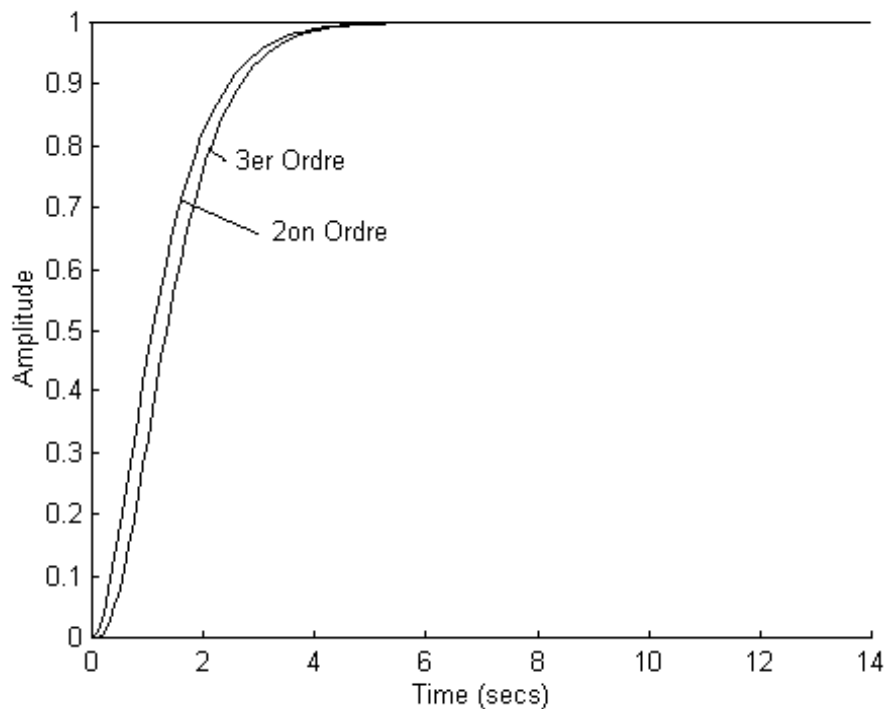
$$f_6 = -0.156 = \text{Error que cometem}$$

$$\text{Tenim que: } d_2 = 0.433; d_1 = 1.271$$

$$ML(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2} = \frac{1}{1 + 1.271s + 0.433s^2} = \frac{2.31}{s^2 + 2.936s + 2.31}$$

$$1 + d_1 s + d_2 s^2 = 1 + 1.271s + 0.433s^2$$

Comparació de les respostes dels 2 sistemes



L'aproximació es tan mes bona quanta més dominància de pols hi hagi.

Construcció de diagrames de Bode

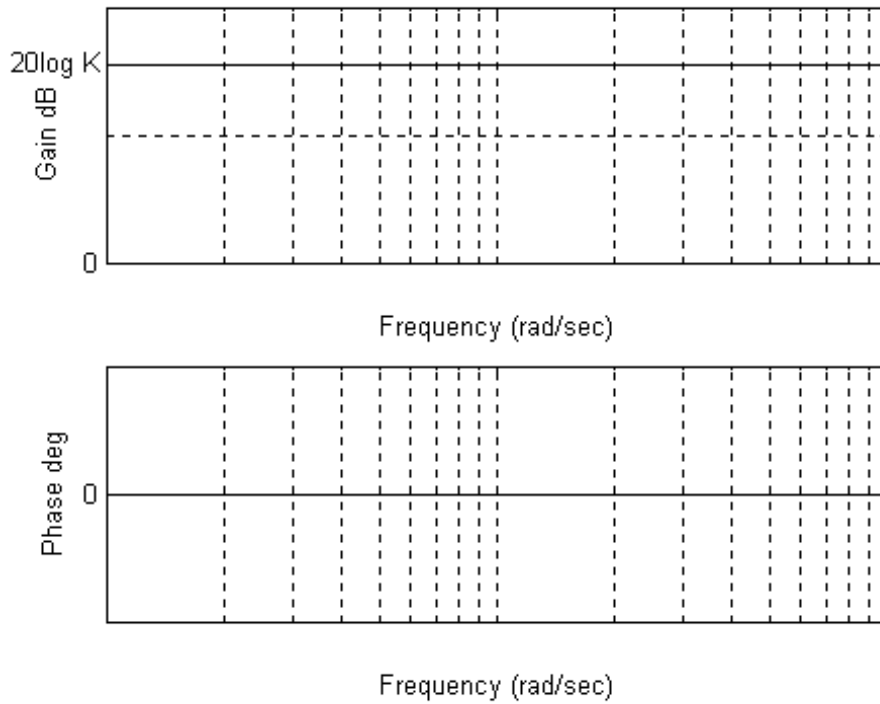
En els diagrames de Bode ens podem trobar aquests cinc tipus de factors simples:

- factors Constants K
- Pols i Zeros en el origen: $1/s$ ó s , integradors i derivadors
- Pols i Zeros a $s = -a$: Factors $(s+a)$
- Polts i zeros complexes: $(1 + 2\zeta n + n^2)$
- Retards purs e^{-Tds}

Constant real K

Totes les K's son positives, per tant; $K_{dB} = 20 \cdot \log K$

El seu diagrama de Bode és el següent:



Pols i zeros a l'origen, $1/s$ i s Integradors i derivadors

Integradors

El seu pendent és de -20 dB/dec i passen per 0 dB quan $\omega = 1$

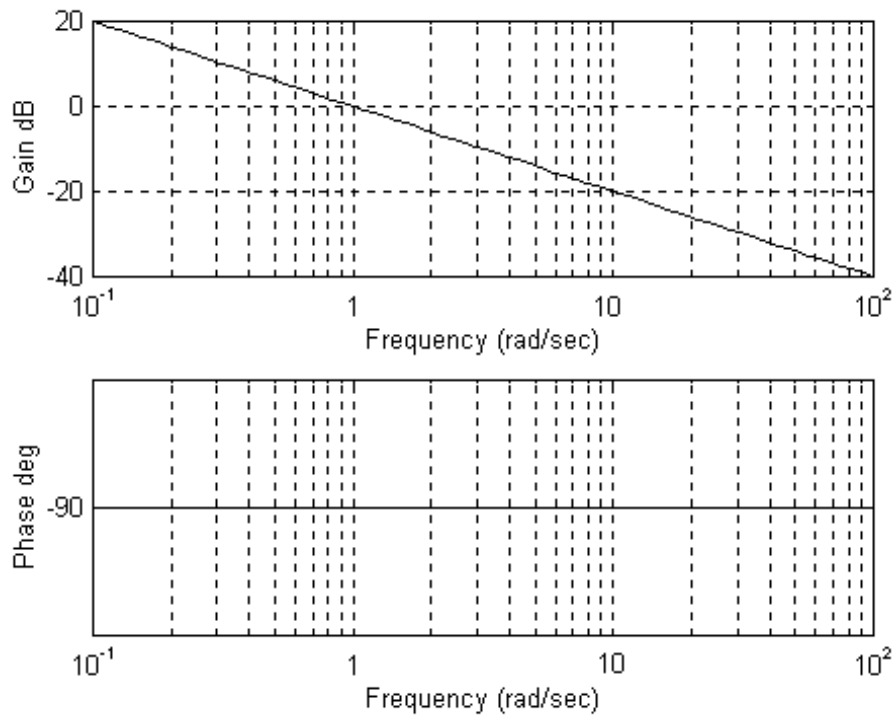
El seu defasatge és de -90°

Derivadors

El seu pendent és de 20 dB/dec i passen per 0 dB quan $\omega = 1$

El seu defasatge és de -90°

El diagrama de Bode per un integrador és:



Pol Simple

La funció del pol simple és $1/(Ts+1)$

Guany

Asíntotes | per $<1/T$ el guany és 0 dB

| per $>1/T$ Té un pendent de -20 dB/dec

Podem calcular-ho més acuradament si

$$\text{Guany} = 20 \cdot \log(1 + T^2)^{1/2}$$

Defasatge

| per $<1/10T$ el defasatge és 0°

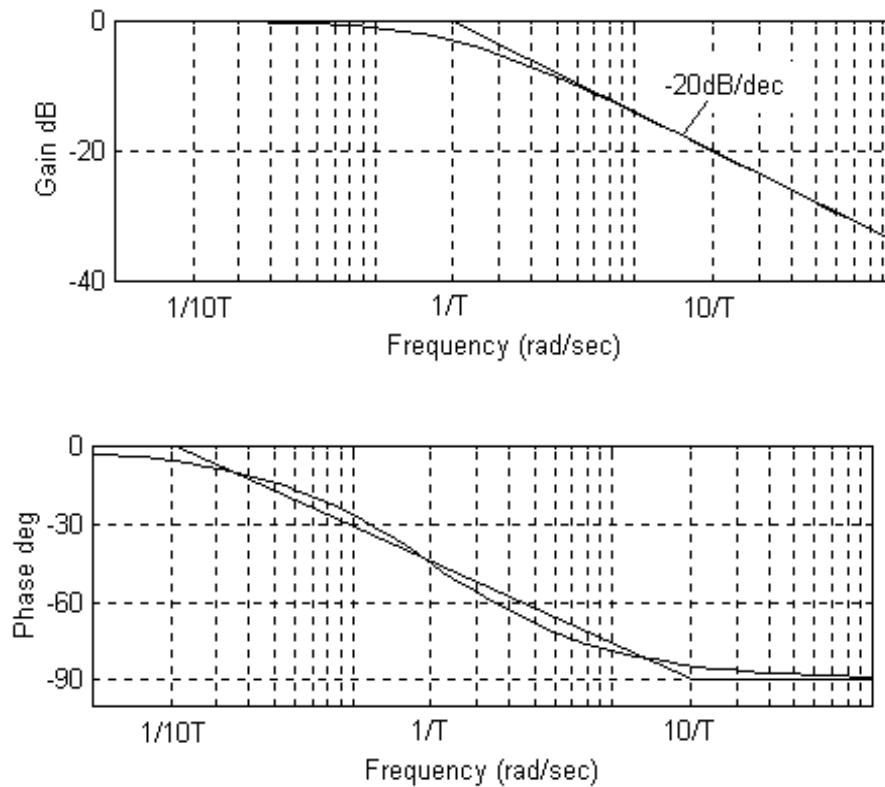
Asíntotes | per $>10/T$ el defasatge és -90°

| passa per -45° quan $\omega = 1/T$

Podem calcular-ho més acuradament

$$\text{Defasatge} = \arctg(T\omega)$$

El seu diagrama de Bode és el següent:



Els zeros simples són iguals tret que els pendents són positius i defasatges també.

Pols Complexes

La funció de transferència és:

$$n^2 / s^2 + 2 \zeta n + n^2$$

Tenim les següents característiques que hem de calcular

Freqüència Ressonància: $r = n(1-2\zeta^2)^{1/2}$

Magnitud Pic : $M_r = 1 / [2 (1-\zeta^2)^{1/2}]$

Ampla de Banda : $BW = n[(1-2\zeta^2) + (-4\zeta^2 + 2)^{1/2}]^{1/2}$

Guany

Asíntotes | per $\omega < 1/T$ el guany és 0 dB

| per $\omega > 1/T$ Té un pendent de -40 dB/dec

Ressonància | Si $\zeta < 0.707$ $M_r = 1 / [2 (1-\zeta^2)^{1/2}]$; $r = n(1-2\zeta^2)^{1/2}$

| Si $\zeta > 0.707$ No presenta pic de ressonància

Defasatge

| per $< n/10$ el defasatge és 0°

Asíntotes | per $> 10 \cdot n$ el defasatge és -180°

| passa per -90° quan $\omega = n$

El diagrama de Bode (Canviant esmoreïments) són els següents:

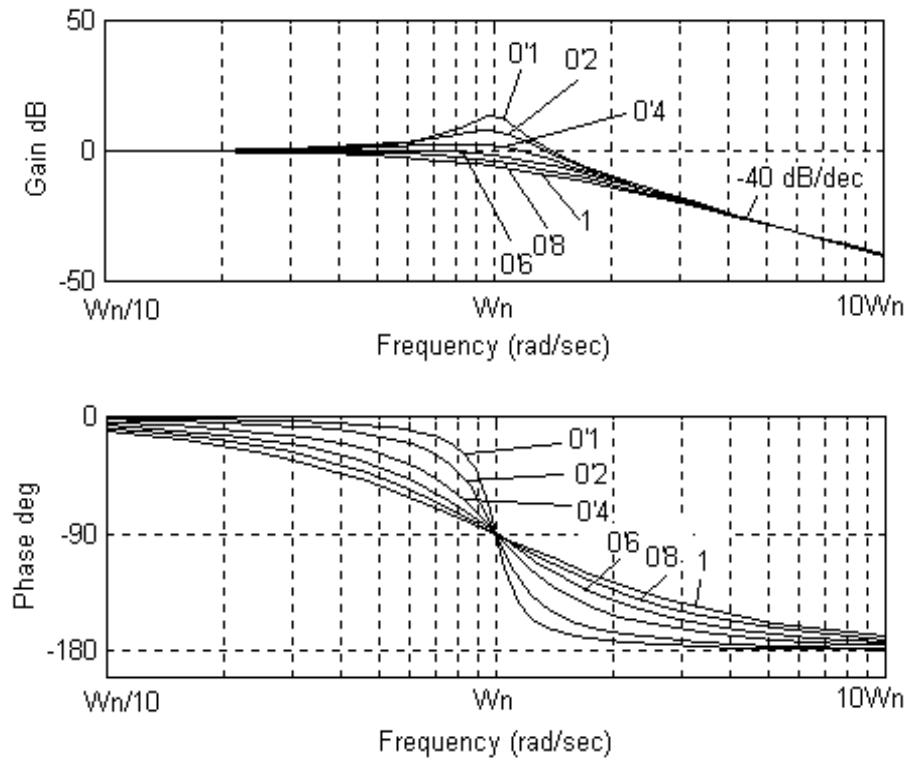
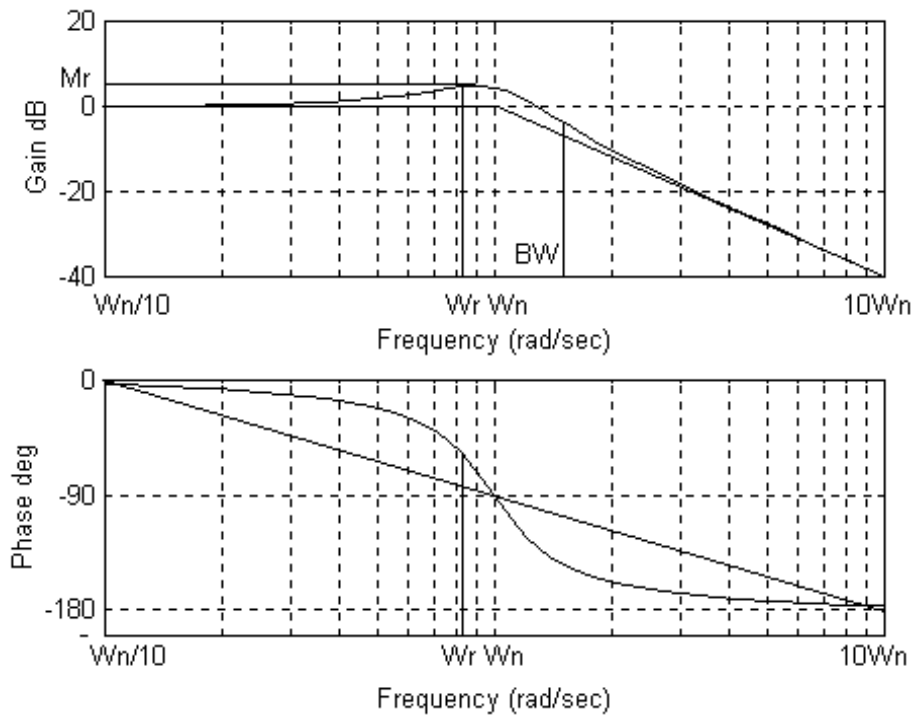
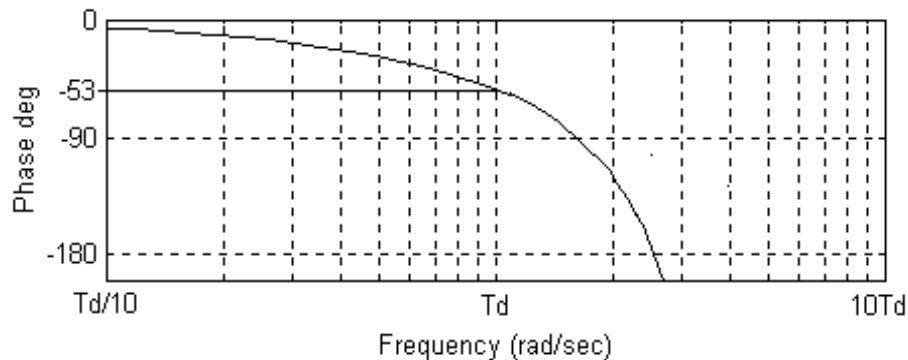


Diagrama de Bode d'un pol complex amb ressonància



Retard Pur e-Tds

El seu guany és 0 i el seu defasatge és aquest:



a $T_d/10$ (-5.3°), a T_d (-53°) a $10T_d$ (-530°)

Construcció del lloc geomètric de les arrels (Conceptes Bàsics)

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0 \quad K \text{ entre } (-, +)$$

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad n \text{ i } m = \text{Enters positius.}$$

Propietats Bàsiques:

En sistemes de Control

$$Y(S) = \underline{G(S)} = \underline{G(S)}$$

$$R(S) = \frac{1}{1+G(S)H(S)} = \frac{1}{1+KG(S)H(S)}$$

Condicció de magnitud

$$G(S)H(S) = -1/K \quad K \text{ entre } (-, +)$$

Condicions d'angle

$$G(S)H(S) = (2i + 1) \quad \text{per } K > 0 \text{ (no es contemplen } K \text{'s negatives)}$$

Construcció del lloc d'arrels

$$G(S)H(S) = \frac{K(s+Z_1)(s+Z_2) \dots (s+Z_m)}{(s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)}$$

$$(s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)$$

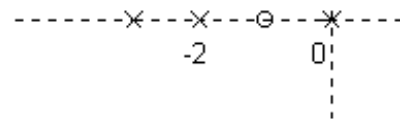
Punts on $K=0$ i $K=\infty$

$$K = 0 \text{ Solucionar el denominador característic } (s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)$$

$$K = \infty \text{ Solucionar el numerador } (s+Z_1)(s+Z_2) \dots (s+Z_m)$$

Així els pols són quan $K = 0$ i els Zeros quan $K = \infty$

$$\text{Exemple } K(s+1)/s(s+2)(s+3)$$



Angles de les asíntotes per K 's positives

M = Ordre del numerador

N = Ordre del denominador: llavors:

Hi haurà $[N-M]$ asíntotes que descriuen el comportament del lloc d'arrels per $s = \infty$

Per valors grans de s , els angles de les asíntotes seràn:

$$\theta_i = \frac{(2i + 1) \cdot 180^\circ}{N - M}$$

$$i = 0 \text{ a } [N-M-1]$$

Intersecció de les asíntotes (centroide)

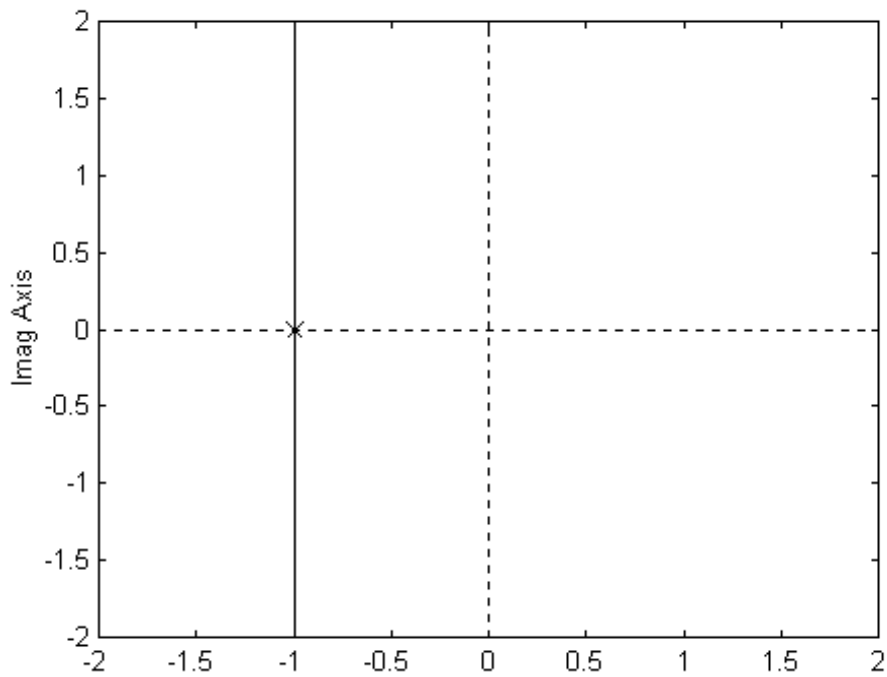
La intersecció de les $[N-M]$ asíntotes del lloc d'arrels la dóna la següent equació:

$$\sigma = \frac{\text{parts reals dels pols de } G(S)H(S) - \text{parts reals dels zeros de } G(S)H(S)}{N - M}$$

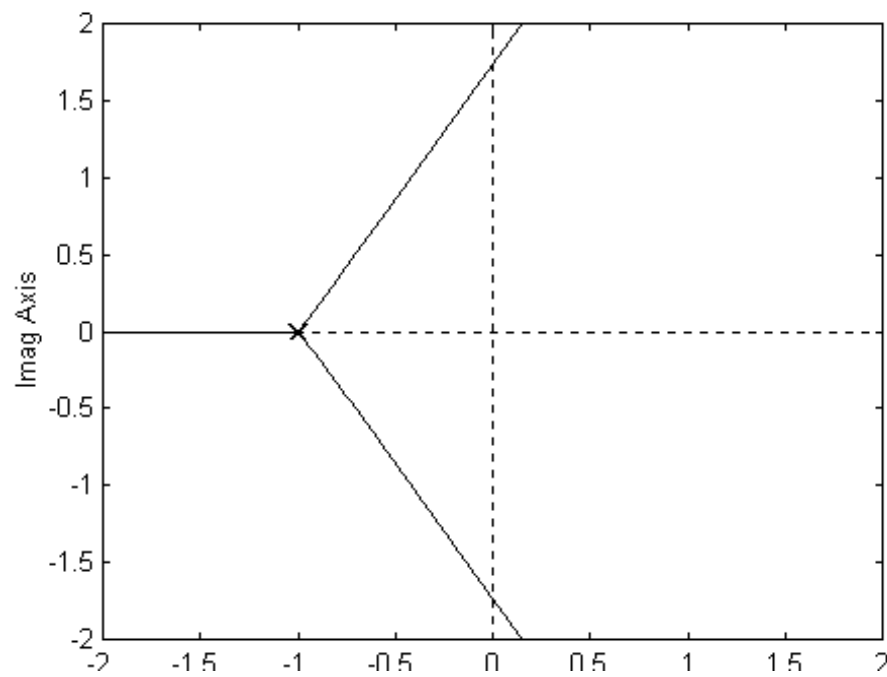
N - M

Examples:

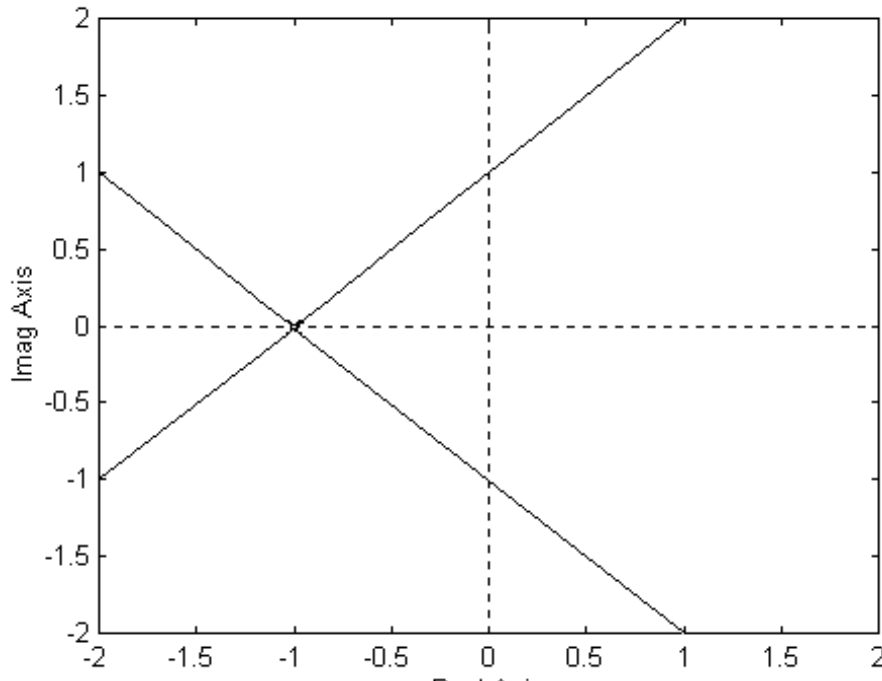
Nº zeros = 0; Nº pols = 2; asymptotes à 90 i 270°



Nº zeros = 0; Nº pols = 3; asymptotes à 60, 180 i 300°



Nº zeros = 0; Nº pols = 4; asymptotes à 45, 135, 225 i 315°



Anàlisi de l'estabilitat relativa amb el Diagrama de Bode

Marge de Guany i Marge de Fase

En el domini de la freq. es quantifica l'estabilitat amb el MG i MF

Marge de Guany

Un creuament de fase és quan la traza de Bode intersecta a -180°

p = Freq on hi ha el creuament de fase

$$\angle L(j p) = 180^\circ$$

El MG es la quantitat de guany en dB que es poden afegir al llaç abans que el sistema es torni inestable:

$$K_{\text{Lím}} = \text{MG} \quad \text{MG} = 20 \log (1/L(j p))$$

Si no hi ha creuament de fase llavors $\text{MG} = \infty$

Marge de Fase

Un creuament de guany és quan la traza de Bode intersecta a 0dB ó $L(j g)=1$

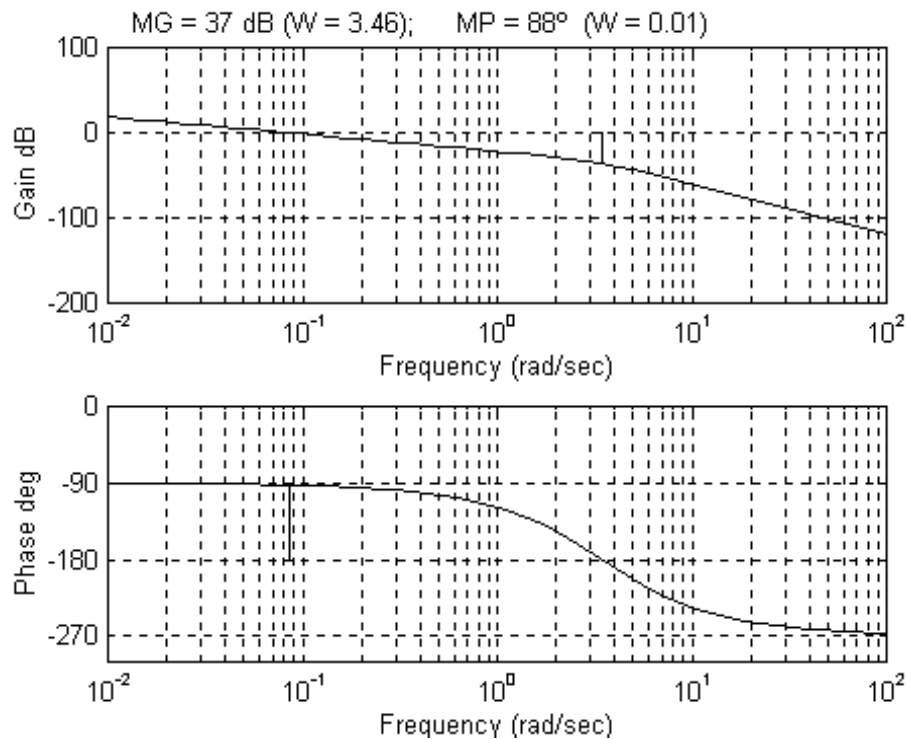
g = Freq on hi ha el creuament de guany

$$|L(j g)| = 1$$

el MP es l'angle en graus que la traza s'ha de girar al voltant de l'origen perquè el creuament de fase passi per -180°

$$\text{Llavors MP} = \angle L(j g) - 180^\circ$$

Si no hi ha creuament de fase llavors $MG = \infty$



Si hi ha retards purs cal recordar que $e^{-Tds} \approx 1 - Tds/2$

$1 + Tds/2$

O que quan $T = td$ l'angle es 53° , a $T = td/10$ l'angle és 5.3°

* Estabilitat: $K_{lím}$ (en dB) = MG

Un sistema es inestable si $MG > 0$ dB o $MP < 0^\circ$ **TIPUS DE CONTROLADORS**

Controlador PI

$$G_c(s) = K_p + K_i/s = K_p(1 + (K_i/K_p)s)/s$$

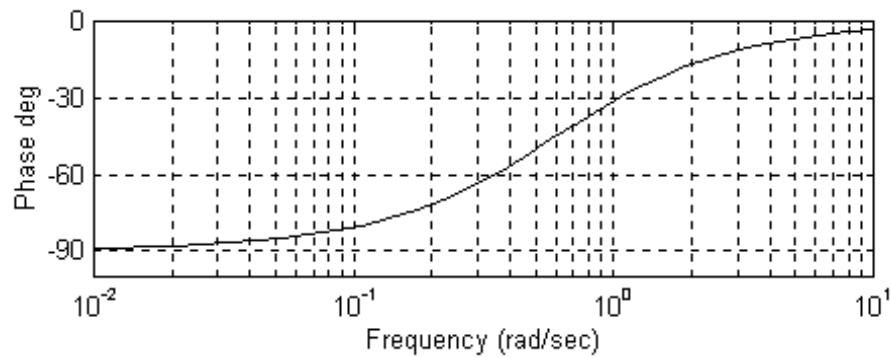
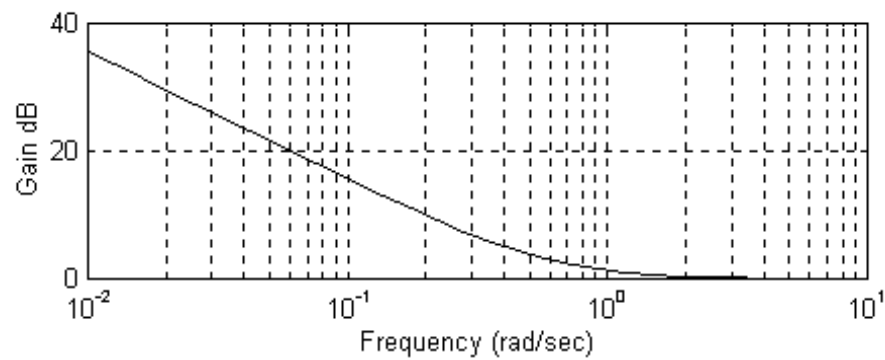
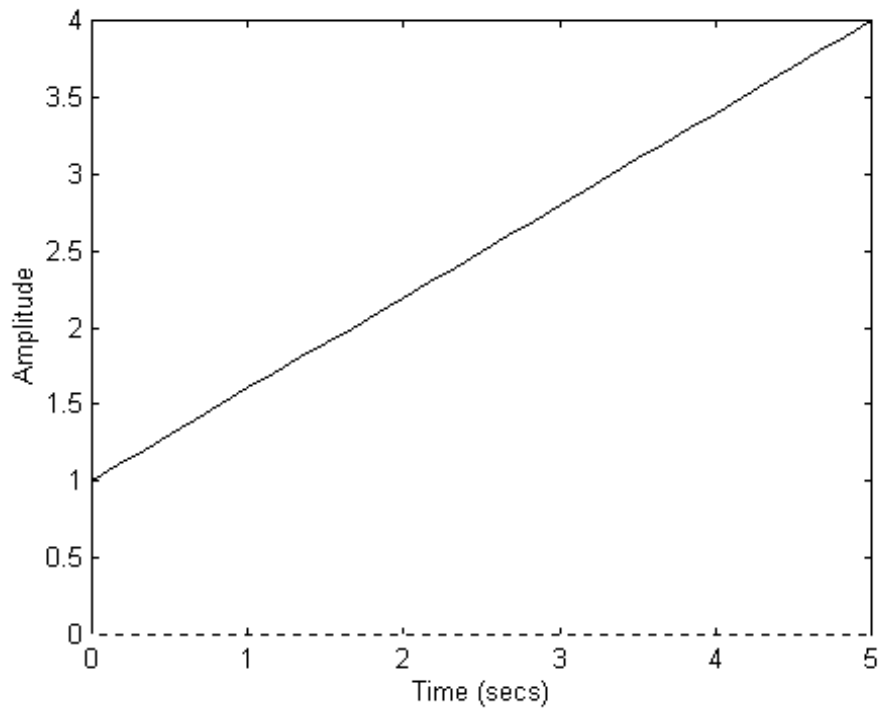
En el domini temporal:

$$G_c(t) = K_p * e(t) + K_i * \int e(t) dt$$

Com podem veure té un 0 a $-K_p/K_i$ i un pol a l'origen

Aventatges i desventatges del controlador PI

Resposta a una entrada graó d'un PI



- Ens augmenta el tipus del sistema en 1 (redueix l'error)
- Ens alenteix la resposta (Baixa BW, Pugen T_r, T_p, T_s)
- Si no es sintonitza bé pot inestabilitzar el sistema
- Es pot saturar a baixes freqüències (es filtre passa-baixos)
- Ens augmenta el sobrepic de la resposta (MP disminueix)

Controlador PD

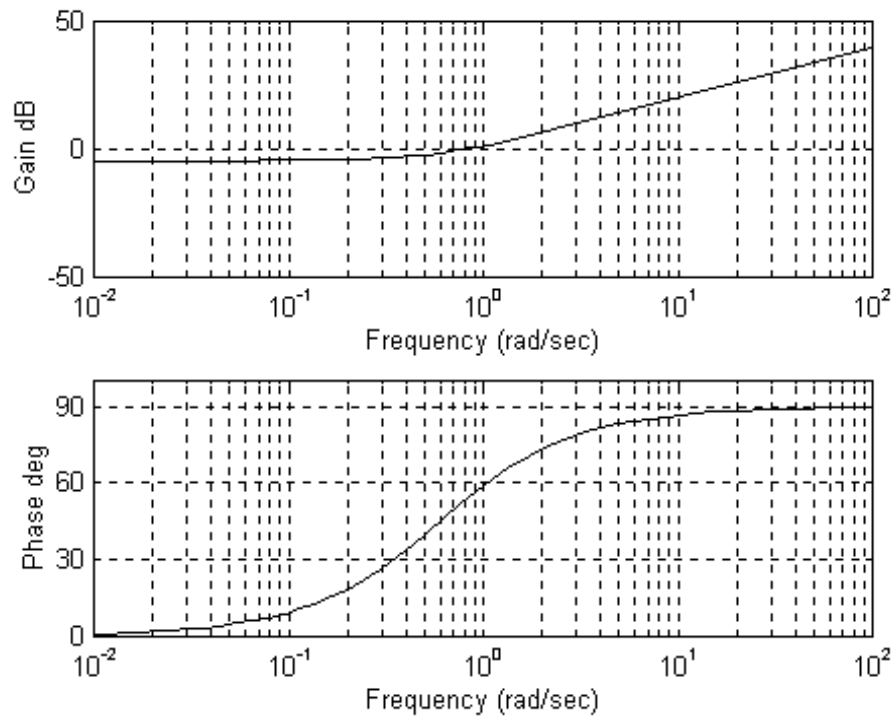
$$G_c(s) = K_p + K_d s = K_p [1 + (K_d/K_p)s]$$

En el domini temporal:

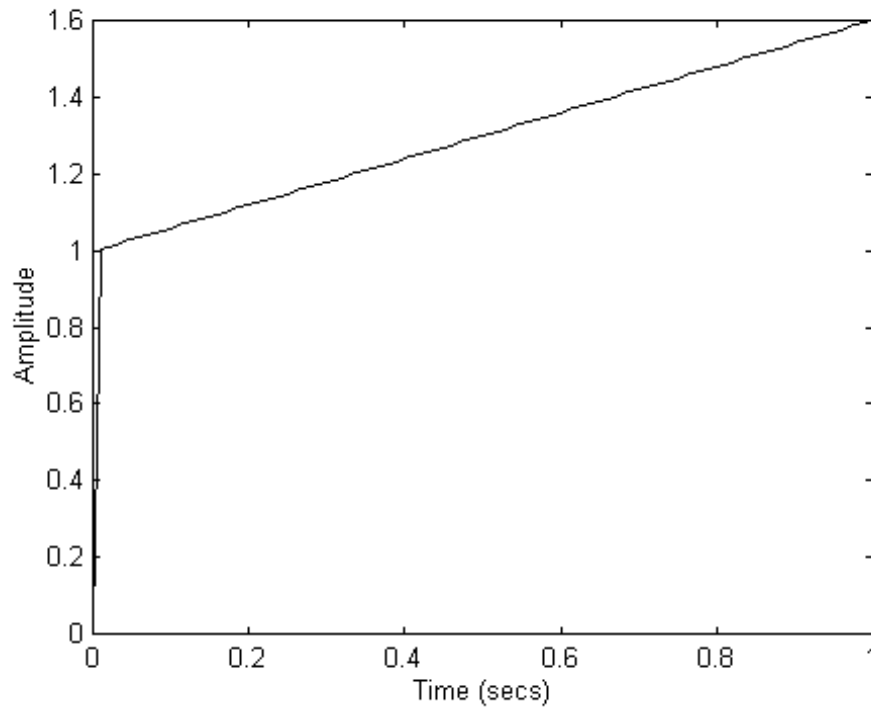
$$G_c(t) = K_p * e(t) + K_d * de(t)/dt$$

Com podem veure té un zero a $-K_p/K_d$ i cap pol

Aventatges i desventatges del controlador PI



Resposta a una entrada rampa d'un PD



- Redueix l'esmoreiment i el sobrepic
- Redueix temps d'aixecament i establiment, accelera el sistema
- Millora MG, MF i incrementa l'ampla de Banda
- Es pot saturar per altes freqüències (es un filtre passa alts)
- No funciona per sistemes poc esmoreïts o inicialment inestables
- No ens corregeix l'error (ens deixa el tipus del sistema tal qual)

Controlador PID

Es com una combinació d'un PI i un PD

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s = K_p(1 + (K_i/K_p)/s + (K_d/K_p)s)$$

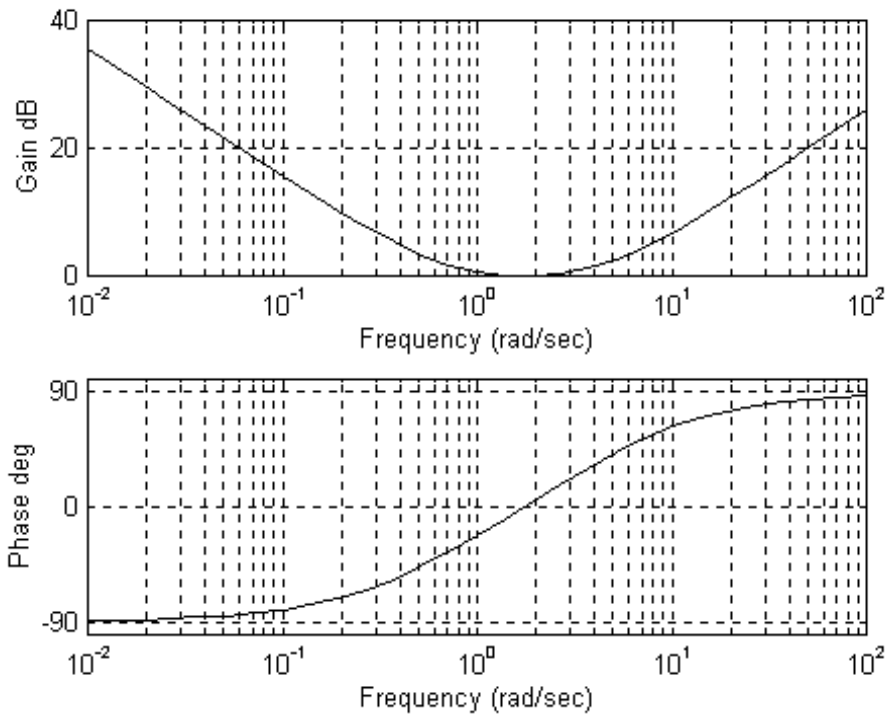
Veiem que té:

- 2 zeros (Poden ser reals o bé complexos)
- 1 pol a l'origen

Es com un entremig entre el PI i Pd, té els següents avantatges i inconvenients:

- Pot ajustar 3 especificacions al mateix temps: 3 paràmetres: K_p, K_i, K_d
- Es pot saturar a altes i baixes freqüències
- Augmenta en 1 el tipus d'un sistema però no l'alenteix
- Podem triar amb ell la posició del pol real perquè sigui insignificant
- Costa més de sintonitzar que un PI o un PD

La seva resposta freqüencial per $K_p = 1$, $K_d = 0.2$, $K_i = 0.6$ és aquesta:



A baixes freq ens disminueix MP (augmenta SP) i a altes es al revés

Podem fer moltes combinacions amb MP, MG i BW depenent d'on col·loquem els paràmetres.

Podem ajustar-los amb regim temporal o amb el diagrama de Bode

DISSENY DE CONTROLADORS

Disseny de controladors fent servir el mètode d'assignació de pols

El controlador que es proposa utilitzar per aconseguir controlar el nostre procés pot ser un controlador PID, PI, PD o P

En el cas d'un PID

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s$$

L'ajuste d'aquest controlador es farà fent servir el mètode **d'assignació de pols simple**

El disseny de controladors mitjançant el mètode d'assignació de pols simple consisteix en determinar el controlador a partir de la condició de què el sistema controlat tingui els pols en el lloc desitjat, sigui:

$$G_c(s) = N_c(s) / D_c(s)$$

La funció de transferència del controlador i sigui:

$$G_p(s) = N_p(s) / D_p(s)$$

La funció de transferència del procés a controlar, llavors la funció de transferència del sistema controlat suposant que la realimentació és unitària valdrà:

$$T(s) = \frac{N_c(s) \cdot N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$$

A partir de les especificacions de disseny determinarem la posició dels pols del sistema controlat i per tant el polinomi denominador $P(s)$ de la funció de transferència del sistema en llaç tancat $T(s)$. Igualment el polinomi desitjat amb el polinomi a ajustar determinarem els paràmetres del controlador

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = P(s) \text{ que es el polinomi desitjat}$$

Aquesta equació s'anomena **equació diofàntica**.

Exemple amb un controlador PD

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+100)} \quad M(s) = \frac{1000}{s^2+10s+1000}$$

$$s(s+100) \quad s^2+10s+1000$$

Especificacions:

- $SP < 5\% \Rightarrow \zeta = 0.707$
- $Tr = 0.05 \text{ sec} \Rightarrow Tr = 0.8 + 2.5 / n \Rightarrow n = 51.35$

Pols del nostre sistema: Pols Sistema controlat (especificacions)

$$s^2+10s+1000 \Rightarrow s^2 + 0.707 \cdot 51.35s + 51.35^2 = s^2+36.3s+2638$$

Per un PD:

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad G_c G_p = \frac{1000(K_p + K_d s)}{s(s+100)} \quad M(s) = \frac{1000(K_p + K_d s)}{s^2+10s+1000}$$

$$s(s+100) \Rightarrow s^2+(10+1000K_d)s+1000K_p$$

$$P(s) = s^2+36.3s+2638 = s^2+(10+1000K_d)s+1000K_p$$

$$K_d = 26.3/1000 = 0.0263; \quad K_p = 2638/1000 = 2.638$$

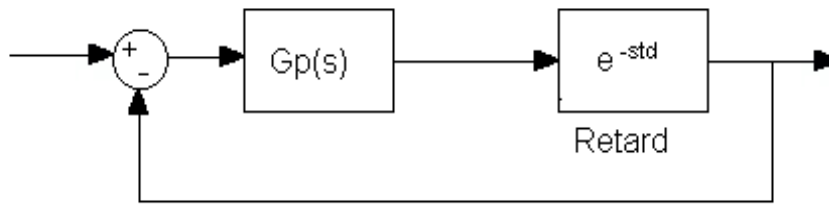
La funció de transferència total ens queda:

$$M(s) = \frac{2638+26.3s}{s^2+36.3s+2638} \text{ el zero està a } s=-100$$

$$s^2+36.3s+2638$$

Efecte inestabilitzador del retard

Si tenim en compte que els sistemes normalment tenen un retard present en el model del sistema observarem al simular el sistema controlat que el seu efecte és el desestabilitzar el sistema.



Si determinem la funció de transferència del sistema realimentat veurem que el retard apareix com un terme més del denominador. Normalment l'efecte d'aquest terme és desestabilitzar el sistema realimentat.

$$T(S) = \frac{G_p(s) * e^{-std}}{1 + G_p(s) * e^{-std}}$$

$$1 + G_p(s) * e^{-std}$$

Per a poder estudiar l'efecte inestabilitzador del retard del sistema utilitzarem cal utilitzar els diagrames de Bode, el que fa el retard es canviar-nos el marge de Fase.

Disseny de controladors empíricament: Ziegler–Nichols

Hi ha mètodes empírics que ens permeten ajustar controladors: Ziegler–Nichols.

Ajust en llaç tancat

El procediment consisteix en:

- Col·locar controlador P amb guany petit i obtenir la resposta a un esglaió
- Augmentar la K fins a obtenir una resposta oscil·latòria mantinguda
- Anotar guany crític (K_{pc}) i període d'oscil·lació T_c

Segons Ziegler–Nichols els paràmetres del controlador són:

K		T_i	T_d
PID Controler	$0.6K_{pc}$	$0.5 * T_c$	$0.125 T_c$
PI Controler	$0.45K_{pc}$	$T_c / 1.2$	
P Controler	$0.5K_{pc}$		

On la funció de transferència el controlador PID és:

$$G_c(s) = K(1 + 1/T_i s + T_d s)$$

Ajust en llaç obert

El procediment s'utilitza en sistemes 1er ordre amb retard, consisteix en:

- Obtenir la resposta en llaç obert del sistema amb retard
- Anotar L = temps retard i T = constant de temps

Nomes funciona si $T/L \geq 4$ ó més. Entre 3 i 4 funciona amb reparos

Segons Ziegler–Nichols el paràmetres del controlador seràn:

K		Ti	Td
PID Controler	1'2T/L	2L	0'5L
PI Controler	0'9T/L	L/0'3	
P Controler	T/L		

Controladors d'avanç i atrasament de fase

S'utilitzen perquè la seva resposta és físicament real

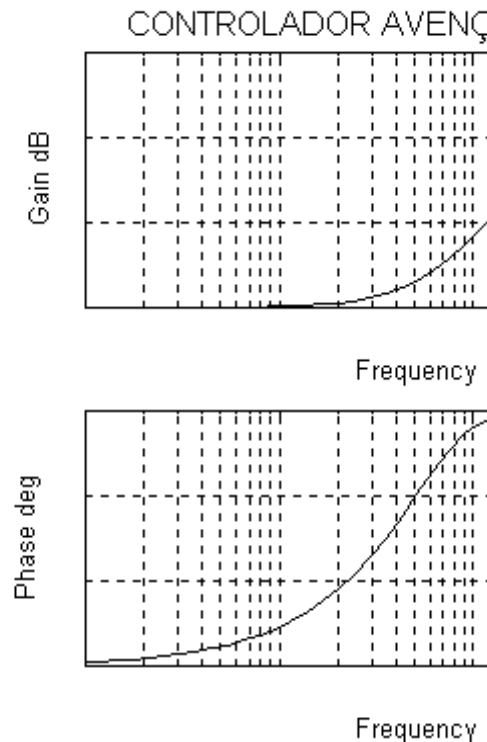
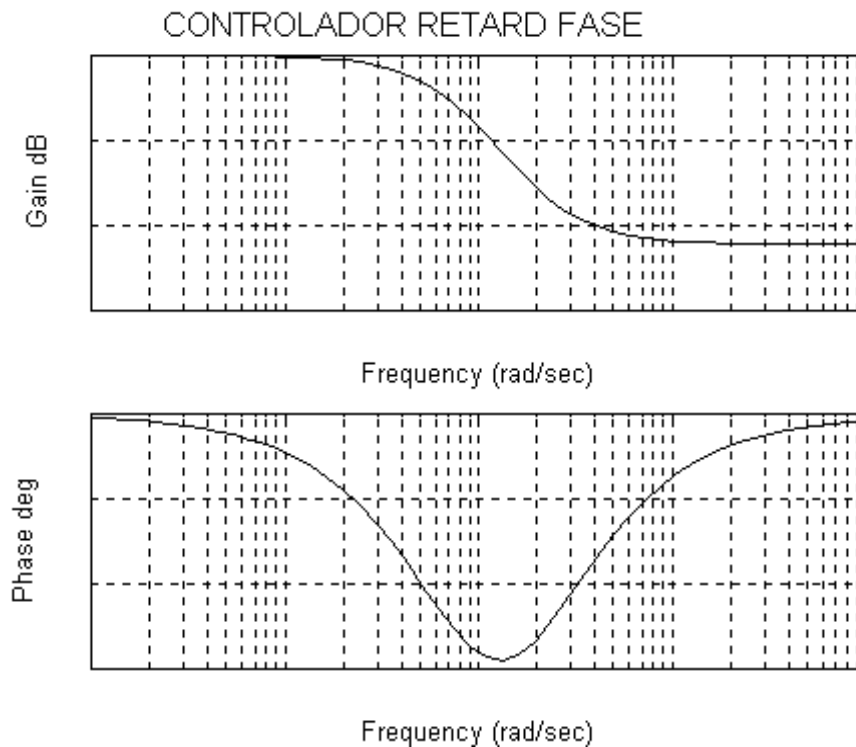
$G_c(s) = \frac{s+Z1}{s+P1} = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ Presenten un pol a $s+P1$ i un zero a $s+Z1$

$s+P1$ $1+Ts$

Avanç de Fase $P1 > Z1$ a < 1

Retard de Fase $P1 < Z1$ a > 1

La seva resposta freqüencial és: Es sintonitzem utilitzant els diagrames de Bode



Disseny dels controladors Avanç–Retard fase

Per sintonitzar–los calen 2 especificacions, Normalment MP (Sobrepic) i error.

- dibuixar Bode per $K = 1$ de $G_p(s)$
- Mirar MP i comparar–lo amb el desitjat
- " $G_c(j) = G_p(j) - MP$ "

$$n = 1/a * T \text{ Freq. tall del sistema}$$

Si coneixem l'angle $\angle G_c(j) = m$ obtenim a com:

$$a = (1 + \sin m) / (1 - \sin m) \text{ m l'escollim segons els especificacions}$$

el guany del controlador en alta freq és: $GF = 20 * \log a$

Cal ajustar perquè la freq. Estigui a $-GF/2$, llavors utilitzar la fórmula

$$n = 1/a * T \text{ Per determinar la T}$$

Perquè sigui efectiu el valor de T ha de ser petit.

Filtres de cancelació de zeros

Normalment al dissenyar controladors PI, PD i PID cal mirar on cauen els 0s

CASOS:

- 0's insignificants Estàn a $D > 10$, el controlador funciona
- 0's a $5 < D < 10$ podem despreciar els efectes tot hi que afecten poc
- 0's pròxims a pòls del controlador, cancelen els afectes, cal eliminar-los
- 0's dominants. Cal eliminar-los perquè ens afecten la resposta
- altres casos: Cal avaluar l'efecte dels 0s

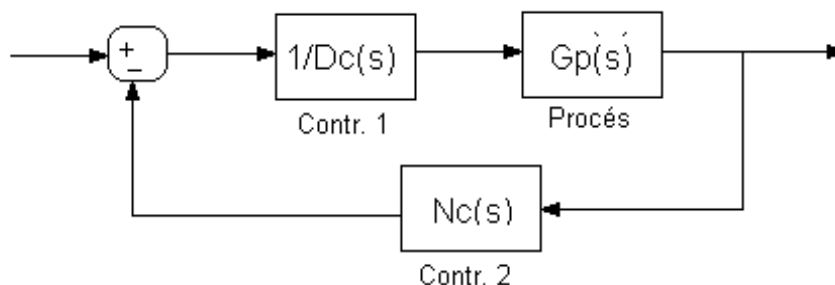
Per eliminar els 0's hem de dissenyar filtres que permetin eliminar-los

Assignació de pòls completa

Per evitar aquesta addició d'un zero que fa que la resposta no es correspongui exactament amb la desitjada hem de variar lleugerament l'estructura del sistema de control. Simplement restructurant la posició del controlador dins del sistema de control com es mostra a la figura la funció de transferència ens queda:

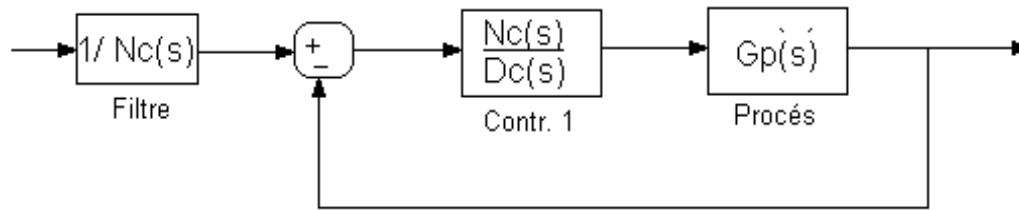
$$T(s) = \frac{N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad N_p(s) = \text{num. Procés}, D_p(s) = \text{den. Procés}$$

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) \quad N_c(s) = \text{den. controlador} \quad D_p(s) = \text{den. contr.}$$



Filtre de Muesca

Una altra forma de treure els 0's és fer un controlador és utilitzar un pre-filtre a l'entrada per suavitzar la senyal i que ens ajudi a cancel.lar els 0's



Possibles problemes a tenir en compte

- Linealització de processos no lineals, aproximació de processos complexos
- Errors de precisió, modelització. Estadística dels paràmetres
- Variacions de les propietats dinàmiques del sistema i que els pols es moguin
- Paràmetres controlador limitats pels components físics disponibles
- Perturbacions variables en el sistema

...

Això fa que la cancel·lació de pols/zeros sigui pràcticament impossible