INTRODUCCIÓN

En el presente informe se expondrá un trabajo de investigación didáctica que estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos. Específicamente nos interesa analizar los procedimientos que utilizan los niños de primaria para resolver situaciones problemáticas que comprometen el significado de fracciones.

Se trata de realizar un análisis que permita identificar los aciertos y errores de los alumnos y ayude a reflexionar sobre las situaciones didácticas necesarias para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

La enseñanza de las fracciones es una de las tareas más difíciles para los maestros de educación primaria. Las dificultades, que se manifiestan en el alto porcentaje de niños que fracasan en aprender este concepto, abarcan tanto la comprensión conceptual como la destreza de cálculo y han sido constatadas por numerosos investigadores de distintos países. Ello ha motivado la realización de estudios que tratan de detectar el origen de las dificultades para proponer soluciones, buscando aproximaciones alternativas para la enseñanza de las fracciones.

Así, uno de los aspectos que determinan el fracaso, es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar. Se sabe que la enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio en las reglas de cálculo, dejando de lado una gran variedad de situaciones que están vinculadas con el significado de las fracciones. Entre la pluralidad de opiniones al respecto parece ser una creencia bastante general la necesidad de proporcionar a los niños una adecuada experiencia con las muchas posibles interpretaciones de las fracciones si se quiere que lleguen a comprender el concepto. En particular es necesario incorporar ciertos aspectos y características de las fracciones que no han sido prácticamente considerados hasta muy recientemente. Entre ellos se deben incluir los aspectos que potencian el papel de las fracciones como razón, como transformación, como cociente de números naturales en situaciones de reparto, su vinculación con los decimales, etc.

Según otros estudios Otro elemento que explica el fracaso es la ignorancia, por parte de los maestros, tanto de los esquemas de conocimiento que necesitan los alumnos para darle significado a las fracciones, como de los modelos de conocimiento implícito de los niños sobre las fracciones. Más aún los docentes plantean a los niños de manera prematura el uso del lenguaje convencional y los algoritmos sin reconocer que se necesitan ciertos esquemas (de partición, de equivalencia, conservación del área, etcétera) para darle sentido al lenguaje simbólico y las reglas de cálculo. Los saberes aprendidos sólo sirven en el contexto escolar y no funcionan como herramientas para resolver problemas.

MARCO TEÓRICO

1.- Didáctica.

Desde el punto de vista didáctico se pretende detectar cierto tipo de errores generalizados en los alumnos y que son la causa de la aparición de obstáculos el origen de los cuáles puede ser epistemológico, ontológico o didáctico.

Es importante analizar en primer lugar la perspectiva de obstáculo o error dentro del proceso enseñanza-aprendizaje:

– Desde un posicionamiento tradicional el análisis de error se hace en términos de falta, de anomalías. El docente se limita a hacer la constatación de que el alumno no ha adquirido el sentido del saber y la

responsabilidad del error es atribuida al alumno *por no haber escuchado, no haber aprendido*. La forma de remediarlo se limita a alentar al alumno a que preste más atención, a repetir las explicaciones, proponer más ejercicios y problemas-tipo.

– Desde un posicionamiento conductista se considera necesario, para que el alumno aprenda, disponer de etapas intermedias, yendo de lo simple a lo complejo, recortando las competencias globales en competencias elementales. Desde esta perspectiva se distinguen distintos tipos de errores: un alumno demuestra dominio del saber-hacer (completa una tabla de proporcionalidad), pero no reconoce la necesidad de aplicarlo en la resolución de un problema (razonamiento); otro alumno, demuestra dominio del saber (enuncia las propiedades de la mediatriz), pero carece de disponibilidad (no tiene la capacidad de aplicar ese saber para probar que un triángulo es isósceles).

En este sentido, se lleva a cabo una intervención diferenciada: así- para los errores de saber, se pedir que el alumno vuelva a aprender sus lecciones; para los errores de saber-hacer, se le propondrán ejercicios de entrenamiento graduales; para los errores de disponibilidad, se multiplicará el número de los problemas-tipo; para los errores de lógica o razonamiento, se "intentará" explicar nuevamente los procedimientos, o "mostrarlos aplicados" en situaciones más simples, atendiendo a la "madurez" del alumno.

Vemos que en las dos concepciones descritas hasta ahora, los errores son considerados como accidentes que se puede evitar si el alumno escuchara mejor, se entrenara más, si mejorara su razonamiento, o bien, si el docente mejorara sus explicaciones, dispusiera de ejercicios mejor graduados, etc.

Ahora bien, si situamos nuestras prácticas docentes dentro de la concepción constructivista de los saberes, el error es la expresión de una forma de conocimiento. Parafraseando a Brousseau, *"el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía a su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela como erróneo, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos ni imprevisibles; están constituidos como obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido"*.

Dicho de otro modo, un error manifiesta la distancia al saber o la presencia de un saber diferente y no la ausencia de saber. Y, así- como una respuesta correcta no da garantía absoluta acerca de la disponibilidad de un saber por parte del alumno, tampoco el error es prueba absoluta de ausencia de saber.

Frente a esta concepción, es necesario hacer un análisis profundo sobre diversas producciones del alumno, que nos permita: plantear hipótesis sobre los procesos que dieron origen al error; reflexionar acerca de la frecuencia con que aparece el error y la coherencia entre los errores detectados.

Una vez concluido este análisis, nos resta pensar en dispositivos que pongan en juego prácticas que impliquen nuevas "mediaciones entre el alumno y el saber". Al respecto, Charnay define como *remediación* todo acto de enseñanza cuyo objetivo es permitir que el alumno se apropie de los conocimientos (saber, saber-hacer,...) después que una primera enseñanza no le ha permitido hacerlo en la forma esperada.

Pero antes de elaborar dispositivos de *remediación*, cabe preguntarnos:

¿Los errores detectados fueron cometidos por una cantidad considerable de alumnos? ¿Dificultan la adquisición de nuevos conocimientos?. De ser así-, se hace necesario pensar en plantear dispositivos de *remediación*.

Tengamos en cuenta que se habla de "dispositivos" de *remediación* más que de situaciones porque no son algunas actividades aisladas las que les permitirán al alumno remediar sus errores sino más bien un encadenamiento de situaciones. Por lo tanto, la elaboración de un dispositivo de *remediación* supone,

además de la elección de las actividades, la gestión de dichas actividades. Todo ello depende del análisis precedente. De ello se desprende que la gestión de las actividades de remediación será muy diversa. Puede responder, por ejemplo, a los siguientes interrogantes:

¿Dónde serán desarrolladas las actividades de remediación? (en el aula, fuera del aula, en la escuela, en la casa)

¿Para quién se elaboran? (para todos los alumnos, para un grupo de alumnos)

¿En qué tiempo se llevarán a cabo? (actividades puntuales propuestas en un determinado momento, o bien regularmente a lo largo del año).

¿Cómo? (todos los alumnos tienen las mismas actividades; las actividades son personalizadas; los alumnos trabajan en forma individual, en grupos homogéneos o en grupos heterogéneos).

Por último, se realiza la evaluación del dispositivo de remediación. Aquí el docente trata de saber si el alumno ha modificado sus procedimientos y sus respuestas, es decir, si el dispositivo es operacional. De ser así, interviene para ayudar al alumno en la toma de conciencia de los progresos realizados. En caso contrario, deberemos retomar el análisis de los errores y proponer concebir nuevas situaciones de remediación.

Por otro lado y en conexión directa con el tratamiento de los errores anteriormente expuesto, el presente estudio puede considerarse que se ubica en lo que se viene denominando línea de la psicogénesis de los contenidos matemáticos, que se fundamenta en la psicología genética de J. Piaget, en la didáctica constructivista y en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

Para la psicología genética el conocimiento consiste en actuar sobre los objetos y transformarlos.

La transformación del objeto puede ser física y conceptual, y esto último es lo más importante para la psicología genética. Por ejemplo, los niños al interactuar con materiales a repartir, transforman los objetos de manera física: los fracturan, pero lo más relevante es que el concepto de la relación parte-todo se transforma, de ser interpretada con la ayuda de los números enteros a la cuantificación de dicha relación de manera fraccionaria.

Algunas teorías de aprendizaje de las matemáticas adoptan la concepción de aprendizaje de la psicología genética, específicamente la idea de que los mecanismos de equilibración constituyen uno de los factores que explican el aprendizaje de nuevos conocimientos (Piaget, 1978). Para la psicología genética el aprendizaje no se concibe como una acumulación de conocimientos sino como un proceso donde los saberes previos se reorganizan en los nuevos conocimientos. La reorganización del conocimiento se vuelve necesaria, cuando unos esquemas entran en conflicto con otros o cuando las características del objeto de conocimiento presentan resistencias a ser

asimiladas por dichos conocimientos.

Esta teoría del aprendizaje surge fuera del aula y se ubica en una problemática epistemológica y psicológica, que por lo mismo, no considera las especificidades del aprendizaje en el contexto escolar, o sea, no aborda las complejas relaciones entre el alumno, el saber, los docentes y el medio. A pesar de lo anterior los principios epistemológicos de la psicología genética son pertinentes para analizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los contenidos escolares aunque no implique una aplicación directa de la teoría al campo educativo, sino una transformación del programa de investigación.

Por su parte las investigaciones de G. Vergnaud, se centran en analizar las adquisiciones de los contenidos

matemáticos. Para Vergnaud el significado de un contenido matemático no es independiente de las situaciones en que se funcionaliza, de los esquemas de acción que se ponen en juego y de los sistemas de significantes (dibujos, diagramas, escritura, etcétera) que se utilizan en la solución de problemas. Esta concepción es distinta a la que prevalece en la práctica escolar donde los contextos y la

acción de los niños son independientes del significado y no contribuyen a la construcción de los mismos

Vergnaud considera que un concepto está vinculado a una diversidad de situaciones, y a su vez una situación nos remite a varios conceptos, por ejemplo el de fracción está ligado a varias situaciones:

Cuando se reparten una o varias unidades a cierto número de personas. Por ejemplo repartir 3 chocolates a 4 personas.

Cuando se compara una longitud con otra y una de ellas se considera como unidad de medida. Por ejemplo, el largo de la mesa mide $\frac{3}{4}$ de metro, la unidad de medida es el metro, se fractura en cuatro, y tres de esas cuatro partes dan la medida del largo de la mesa.

Cuando se unen dos medidas fraccionarias. Por ejemplo, cuando se pregunta, ¿cuánto miden dos alambres si la longitud de uno es $\frac{2}{3}$ de metro y del otro $\frac{3}{4}$ de metro? Por otra parte, en lo que se refiere a la relación entre situaciones y conceptos; una que, por ejemplo, exprese relaciones multiplicativas, puede remitir a los conceptos de área, volumen, proporción, fracciones, etcétera.

2.- FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES.

Cuando pensemos en el desarrollo de secuencias de enseñanza que pretendan el aprendizaje de nociones relativas a las fracciones debemos tener en cuenta dos características principales:

– Los números fraccionarios son una estructura de una riqueza y complejidad que encuentran aplicaciones en una multiplicidad de contextos: la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana. En cada uno de estos contextos las fracciones se presentan con una diversidad de significados.

Kieren afirma que la expresión simbólica a/b puede modelar cuatro significados o ideas matemáticas: medida, cociente, operador multiplicativo y razón, agrega un quinto significado la relación parte-todo, pero señala que éste se puede encontrar presente en los otros cuatro significados, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes.

– Quizá como en ningún otro de los tópicos de la matemática elemental, al enseñar las fracciones se deben considerar simultáneamente objetivos a corto y largo plazo. A corto plazo, o sea en cada etapa de su actividad, el niño debe ir aprendiendo el uso que se hace de las fracciones en sus diferentes presentaciones, en los distintos contextos en que aparecen; a largo plazo, debe pasar a conocer la estructura y propiedades de los números racionales que generalizan, en un contexto abstracto, cada una de esas presentaciones.

La multiplicidad de interpretaciones (contextos, presentaciones) que se puedan hacer de las fracciones, suele llevar a una gran confusión sobre las diferencias o semejanzas de, por ejemplo, las parejas de números ($\frac{3}{4}$: tres cuartos), su escritura decimal (0.75) y su verdadero significado matemático como número racional. Por ello hay que seleccionar las interpretaciones apropiadas para desarrollar aquellos objetivos, sin olvidar que los de largo plazo son los fundamentales. Naturalmente, en cada caso se deberán tener en cuenta las estructuras cognitivas necesarias y proporcionar las secuencias de enseñanza (actividades) que contribuyan a la consolidación de estas mismas estructuras.

La capacidad de trasladar a situaciones distintas la aparente comprensión de cada interpretación de las fracciones es por demás difícil. El niño debe aprender a concebirlas como una división, a utilizarlas al

comparar características cuantitativas de diversos objetos (razones), a reconocer los resultados de fraccionamientos de diversos tipos de conjuntos, a distinguir escrituras fraccionarias que se utilizan para otras cosas. Y en medio de esa variedad, de esas y otras muchas situaciones, se debe lograr que el niño comprenda que se trata de la misma estructura matemática.

El aprendizaje y la enseñanza de las ideas relacionadas con los números racionales son particularmente problemáticas y existen discusiones sobre cómo introducir el tema entre los niños más pequeños y cómo recorrer el camino de la discusión y la consolidación de aspectos más avanzados entre los niños y adolescentes. Por ejemplo, es motivo de discusión la etapa en que hay que comenzar a hablar de los quebrados, si hay que enseñarlos o no en la escuela primaria y dónde enseñar los algoritmos operatorios (de la multiplicación y división, en particular).

Una primera confusión al estudiar los números, sus relaciones y operaciones, es que se habla de los 'números fraccionarios', en una secuencia conceptual que comienza con los 'números naturales' y termina con los 'números decimales'. Esta clasificación aparece en textos escritos para los maestros, no para los niños, pero a los maestros no se les debe inducir a creer que existe alguna clasificación de los números que obedece a esa división.

No hay, matemáticamente hablando, números fraccionarios y números decimales; hay representaciones fraccionarias y representaciones decimales de los números (rationales). Las representaciones decimales de los números racionales son esencialmente únicas, pero las representaciones fraccionarias son, muy evidentemente, no únicas porque por ejemplo $3/4$ y $6/8$ representan al mismo número racional. Es igualmente cierto que hay una única representación fraccionaria si no se pueden dividir numerador y denominador entre un número natural distinto de uno. En este sentido se puede considerar que $3/4$ es una 'mejor' representación de ese número (cuya representación decimal se escribe 0.75). Si numerador y denominador no se pueden dividir entre un mismo número distinto de uno, se dice que la fracción es irreducible (no se puede reducir, no se puede simplificar).

La escritura (notación) de las fracciones como dos números separados por una barra es convencional, y trata de destacar el carácter de división entre números enteros que tienen los números racionales; pero se pueden representar de otras maneras; por ejemplo $3/4$ se podrá escribir (3,4).

Así presentadas las cosas, todos los números racionales se definen por parejas de números enteros, con la convención de que dos parejas (a,b) y (c,d) [b y d no pueden ser cero] representan al mismo número racional si $a * d = b * c$, donde * representa el producto usual entre números. En términos de fracciones, eso mismo se puede escribir como $a/b = c/d$ dado que esta igualdad se satisface si y solo si, nuevamente $a * d = b * c$. Por tanto, diferentes parejas o fracciones representan un mismo número racional. Más aún, cualquier número racional se puede representar de infinitas maneras, puesto que el número $(a * k)/(b * k)$ con cualquier natural k representa a/b (que corresponde al caso $k=1$). Por último, en lugar de la barra / se suele usar el símbolo de dos puntos : , o sea, a/b es lo mismo que $a:b$.

Por tanto, podemos decir que dos pares de números enteros $a/b = (a,b)$ y $c/d = (c,d)$ representan al mismo número racional si luego de simplificaciones dan la misma pareja o, lo cual desde el punto de vista operatorio es más sencillo, si $a*d = b*c$. Así, $3/4 = (3,4)$ y $6/8 = (6,8)$ representan un mismo número porque $3*8 = 4*6$. Esta relación entre pares de números verifica ciertas propiedades muy elegantes que permiten asegurar que la identificación entre los pares realizada de esa manera ($a*d = b*c$) es coherente y no da lugar a confusiones; se dice que la relación es de equivalencia.

No es que los complejos conceptos fraccionarios (unidad, significado de cada término, diferentes significados de la fracción, porcentajes, etc.) se aprendan mediante juegos, pero es cierto que hay experiencias fundamentales y que la práctica de ciertos juegos ayuda a superar importantes dificultades.