

ESPACIOS VECTORIALES

Definición: Si n es un entero positivo, entonces una n -ada ordenada es una sucesión de n números reales $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. El conjunto de todas las n -adas ordenadas se conoce como espacio n dimensional y se denota por R^n

Cuando $n = 2$, o bien, 3 , es común usar los términos "pareja ordenada" y "terna ordenada" en lugar de 2-ada y 3-ada ordenadas. Cuando $n = 1$, cada n -ada ordenada consta de un número real y, por tanto, R^1 se puede concebir como el conjunto de los números reales. Para este conjunto, es común escribir R en lugar de R^1 .

Es posible encontrar, en el estudio del espacio tridimensional que el símbolo (a_1, a_2, a_3) tenga dos interpretaciones geométricas diferentes. Puede interpretarse como un punto, en cuyo caso a_1, a_2 y a_3 son las coordenadas o se puede interpretar como un vector, en cuyo caso a_1, a_2 y a_3 son las componentes. Por tanto, se concluye que una n -ada ordenada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ se puede concebir como un "punto generalizado" o como un "vector generalizado", y como desde el punto de vista matemático no tiene importancia, se puede describir una n -ada como R^n .

Definición: Se dice que dos vectores $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en R^n son iguales si

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

La suma $u + v$ se define como

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Si K es cualquier escalar, el múltiplo escalar ku se define por

$$Ku = (ku_1, ku_2, \dots, kun)$$

Las operaciones de adición y multiplicación escalar dadas en esta definición se denominan operaciones estándares sobre R^n

El vector cero en R^n se define como el vector

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

El vector negativo o inverso de u se denota $-u$ y se define

$$-u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

Se define la sustracción de vectores en R^n por $v - u = v + (-u)$ o en términos de las componentes

$$v - u = v + (-u) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

$$= (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \dots, v_n - u_n)$$

Espacio Vectorial Trivial

Sea $V = \{0\}$, Es decir V consiste sólo en el número 0 como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) + 0 = 0$, se ve que V es un espacio vectorial. Con frecuencia se le da el nombre de espacio vectorial trivial

Teorema

Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ son vectores en R^n y k y l son escalares, entonces

a) $u+v = v+u$

b) $u + (v + w) = (u + v) + w$

c) $u+0 = 0+u = u$

d) $u + (-u) = 0$ es decir, $u - u = 0$

e) $k(lu) = (kl)u$

f) $k(u + v) = ku + kv$

g) $(k + l)u = ku + lu$

h) $lu = u$

Con este teorema se pueden manipular los vectores en R^n sin expresarlos en términos de componentes, casi de la misma manera como se manipulan los números reales.

Por ejemplo, para despejar x en la ecuación vectorial $x+u=v$, se puede sumar u a ambos miembros y proceder como sigue:

$$(x+u)+(-u) = v + (-u)$$

$$x + (u - u) = v - u$$

$$x + 0 = v - u$$

$$x = v - u$$

Definición.

Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ son vectores cualesquiera en

R^n , entonces el producto euclidiano interior $u \cdot v$ se define por

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

Teorema

Si u , v y w son vectores en R^n y k es un escalar cualquiera, entonces:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

c) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

d) $v \cdot v \geq 0$. Además, $v \cdot v = 0$ si y solo si $v = 0$

Se probará el caso (b)

Demostración (b).

Sean $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

Entonces $(u+v) \cdot w = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n)$

$= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \dots + (u_n + v_n)w_n$

$= (u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n)$

$= u \cdot w + v \cdot w$

$v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$ Además la igualdad se cumple si y sólo si $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$, es decir si y solo si $v = 0$.

Ejemplo

Si V_1 y V_2 son vectores no colineales en R^3 con puntos iniciales en el origen, entonces $\text{lin}\{V_1, V_2\}$, el cual consta de todas las combinaciones lineales $k_1 V_1 + k_2 V_2$, es el plano determinado por V_1 y V_2

De modo análogo, si v es un vector diferente de cero en R^2 o R^3 , entonces $\text{lin}\{v\}$, el cual es el conjunto de todos los múltiplos escalares kv , es la recta determinada por v

INDEPENDENCIA LINEAL

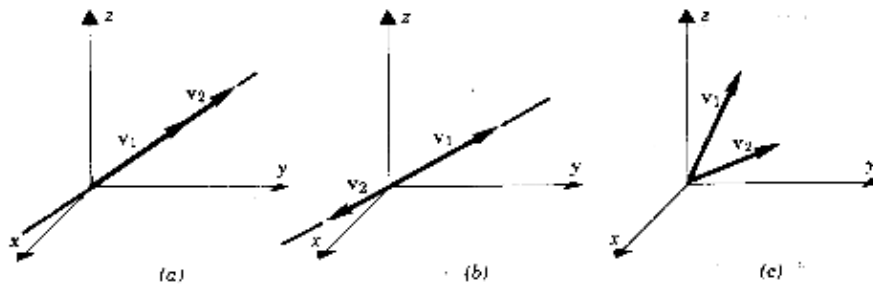
Se sabe que un espacio vectorial es generado por un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, si cada vector en V es una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_r$. Los conjuntos generadores resultan útiles en una gran diversidad de problemas ya que, a menudo, es posible estudiar un espacio vectorial V estudiando primero los vectores en un conjunto generador S luego extendiendo los resultados hacia el resto de V . Por tanto, conviene mantener el conjunto generador S tan pequeño como sea posible. El problema de encontrar los conjuntos generadores más pequeños para un espacio vectorial depende de la noción de independencia lineal.

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores, entonces la ecuación vectorial $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$ tiene al menos una solución, a saber,

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Si esta es la única solución, entonces S recibe el nombre de conjunto linealmente independiente. Si hay otras soluciones entonces se dice que S es un conjunto linealmente dependiente.

•



Linealmente dependientes.

- Linealmente dependientes.
- Linealmente independientes.

Se deduce, que dos vectores en R^2 o en R^3 son linealmente dependientes si y solo si están sobre la misma recta que pasa por el origen

Teorema

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V , entonces todo conjunto con mas de n vectores es linealmente dependiente.

Demostración

Sea $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ cualquier conjunto de m vectores en V , donde $m > n$. Se desea demostrar que S' es linealmente dependiente. Supuesto que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base, cada w_i se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S , por ejemplo,

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

•

•

•

•

$$w_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \dots + a_{nm}v_n$$

Para demostrar que S' es linealmente dependiente, se deben hallar los escalares $k_1, k_2, \dots, k_m$, no todos cero, tales que

$$k_1w_1 + k_2w_2 + \dots + k_mw_m = 0$$

Al aplicar las ecuaciones anteriores se puede volver a escribir como

$$(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_ma_{1m})v_1$$

$$+ (k_{1a21} + k_{2a22} + \dots + k_{ma2m})V_2$$

$$+ (k_{1an1} + k_{2an2} + \dots + k_{manm})V_n = 0$$

Por tanto, el problema de probar que S' es un conjunto linealmente dependiente

Se reduce a demostrar que existen $k_1, k_2, \dots, k_m$, no todos cero, que satisfacen

$$(k_{1a11} + k_{2a12} + \dots + k_{ma1m})v_1 = 0$$

$$(k_{1a21} + k_{2a22} + \dots + k_{ma2m})V_2 = 0$$

$$(k_{1an1} + k_{2an2} + \dots + k_{manm})V_n = 0$$

Dado que hay mas incognitas que ecuaciones, la demostración queda completa ya que haciendo uso del teorema que garantiza la existencia de soluciones no triviales

Teorema

DOS bases cualesquiera para un espacio vectorial de dimensión finita tiene el mismo número de vectores.

Demostración

Sean $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ dos bases para espacio vectorial de dimensión finita V . Dado que S es una base y S' es un conjunto linealmente independiente, el teorema anterior implica que $m \leq n$. De modo analogo, dado que S' es una base y S es linealmente independiente se tiene $n \leq m$, por tanto $m=n$

Ejemplo

La base estándar para $\mathbb{R}^n$ contiene n vectores Por consiguiente, toda base para $\mathbb{R}^n$ contiene n vectores.

CONCLUSIÓN

El estudio de los vectores, sus magnitudes y propiedades son de gran utilidad como estudios básicos en diversas ciencias que dan paso a estudios mas avanzados y producen bienes al servicio del hombre basados en ciencia y tecnología, como es el caso por citar uno de los medios de transporte, afortunadamente no todos debemos dedicarnos al estudio avanzado del álgebra lineal para disfrutar de sus beneficios.