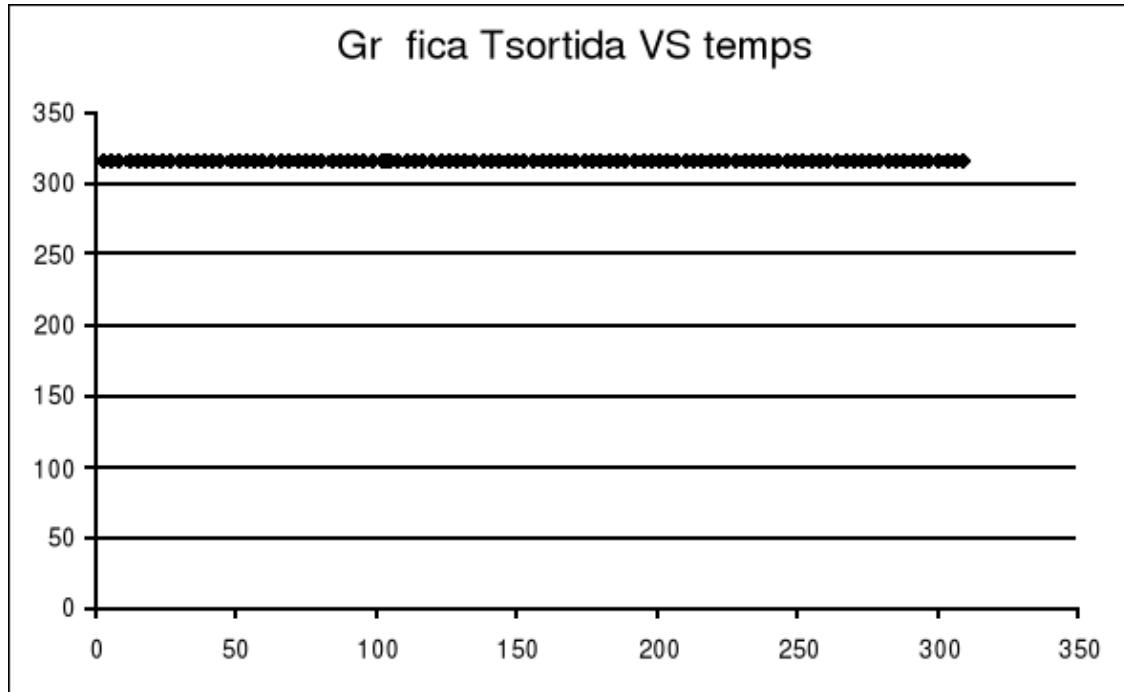


CONTROL DE LA TEMPERATURA EN 1 DIPÒSIT

Gràfiques del Bescanviador de calor

$Q = 12 \text{ m/s}$ (constant)



Gràfiques del Dipòsit d'aigua

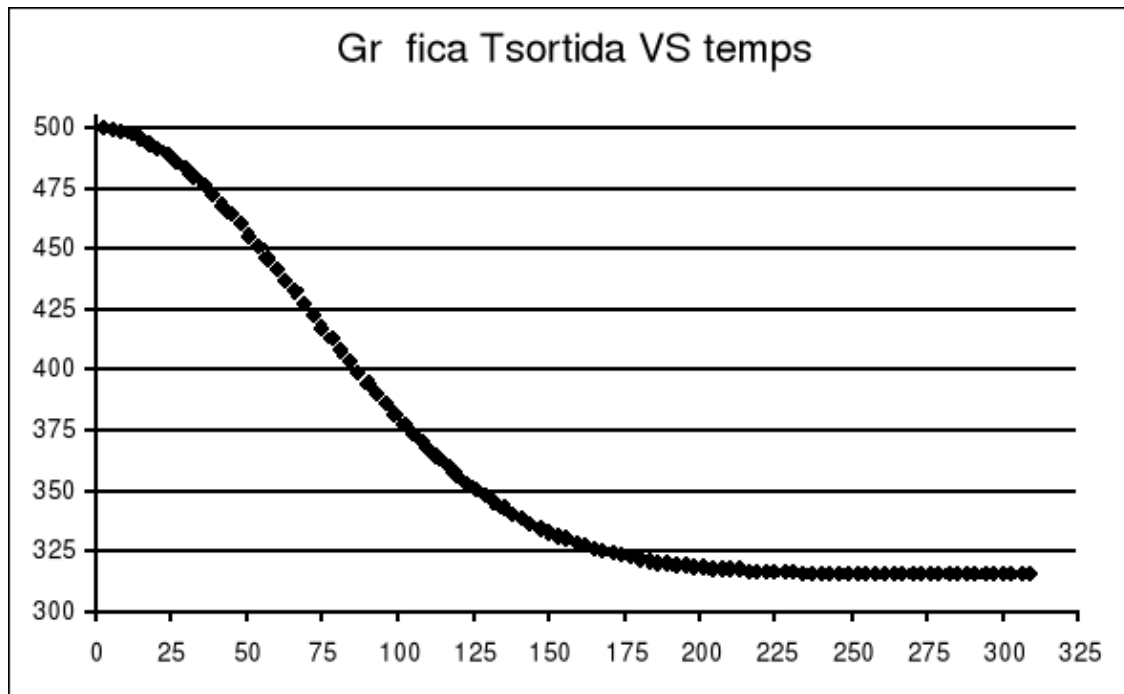
Les variables són

$CP = 4180 \text{ KJ/KgK}$, Densitat aigua = 1000 kg/m^3 , $T_{\text{ambient}} = 298^\circ\text{K}$

Cabal primari = 25 l/s , Cabal secundari = 12 l/s , constant dissipació = 7000

Volum dipòsit = 20000 l, Temperatura aigua entrada = 353°K

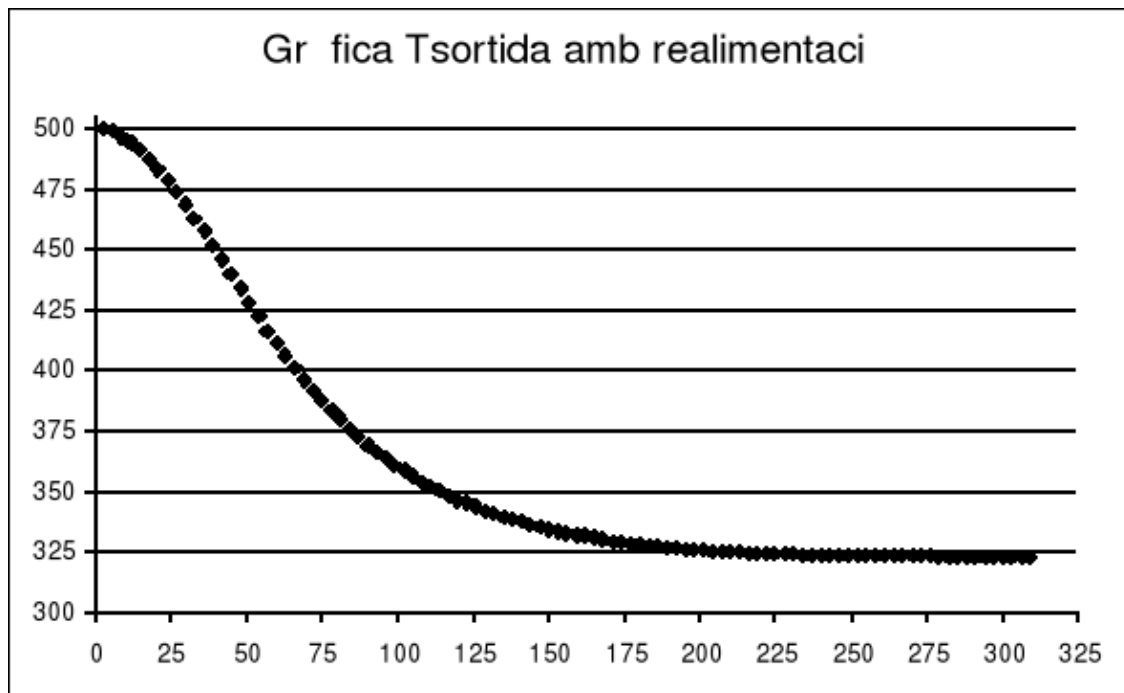
El cabal és constant (després es farà per un cabal que no és constant)



Gràfica amb un control del procés, la temperatura de consigna de 323°K, el controlador utilitzat té la següent expressió:

$k \cdot (T_{\text{dipòsit}} - T_{\text{consigna}})$ la k es calcula perquè el cabal de la bomba no

$T_{\text{dipòsit2}}$ ens superi els 25 l/s (màxim possible) $k=35000$ per temperatura inicial de 500°K i consigna de 323°K



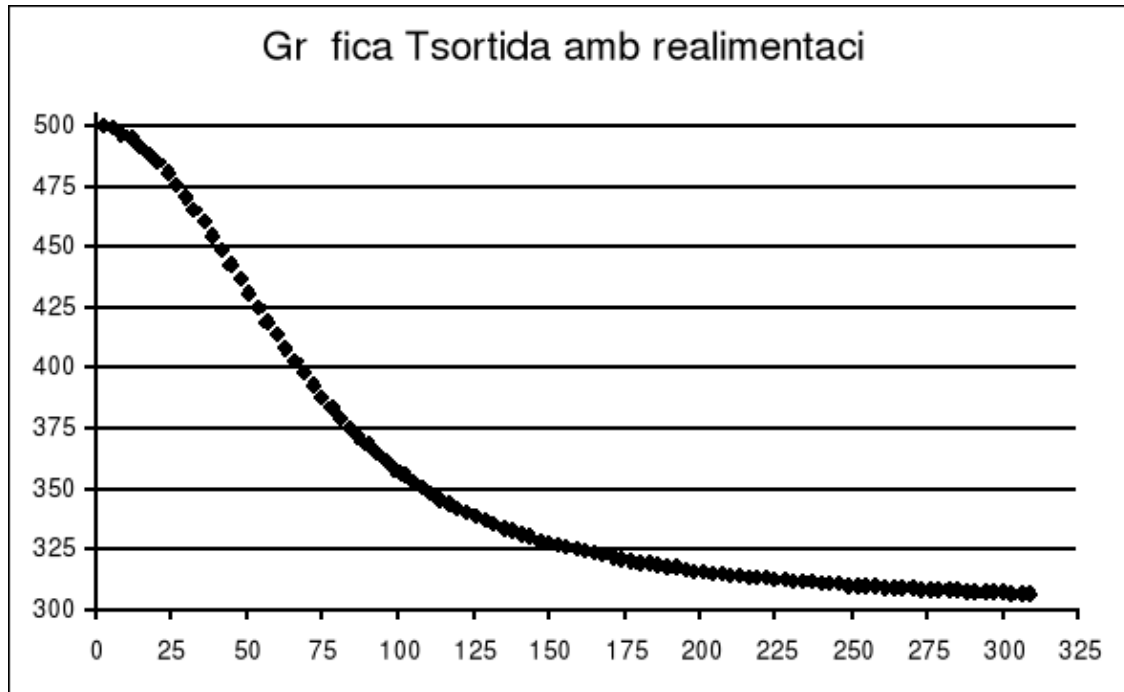
El controlador d'abans només serveix per temperatures entre les temperatures ambient i a uns 420°K aproximadament, a més baixes hi ha un moment en què la temperatura esdevé constant i no s'aproxima a la de consigna. Això és degut a les pròpies lleis de la termodinàmica.

Ara es fa la mateixa gràfica per una temperatura de consigna de 296°K, menor que la ambiental

La k s'ha calculat aproximadament per no sobrepassar el cabal de la bomba

I és de 30600 (això s'aconsegueix amb un dàrlington) per una temperatura inicial de 500°K.

Com es pot apreciar no s'aconsegueix una temperatura de 296°K sinó que és d'uns 302°K al cap d'uns 2000 increments de temps (a la taula es mostren només 400 increments de temps)



JUSTIFICACIÓ DE LES GRAFIQUES

Les gràfiques han estat obtingudes a partir de les següents taules de valors de l'excel: les dades són les següents...

Constants i dades de partida:

Densitat de l'aigua (suposada constant) = 1000 kg/m³

Calor específic aigua (suposat constant) = 4180 KJ/Kg°K

Temperatura ambient (T3) = 298°K (25°C)

Temperatura circuit primari bescanviador (T4) = 353°K (80°C)

Cabal del circuit primari bescanviador (Q3) = 25 l/s

Cabal del circuit secundari bescanviador (Q4) = 12 l/s

Constant de dissipació k = 7000 W/K

Volum del dipòsit = 20000 litres

BESCANVIADOR DE CALOR

L'equació que regeix el bescanviador de calor és:

$$W_3 + W_4 = W_1 + W_2$$

$$Q_3(T_3 - T_2) = Q_4(T_2 - T_4) \text{ d'on s'ha d'aïllar } T_2 \text{ (Temperatura entrada)}$$

DIPOSIT

L'equació que regeix la temperatura de sortida és:

$$cV(dT_4/dt) = cQ_2T_2 - cQ_2T_4 - k(T_4 - T_a)$$

$$\text{llavors canviant la derivada per } T(t+(t_1-t_0)) = T(t) + (t_1-t_0)*dT/dt$$

Les taules que han sortit, per 100 increments de temps de 3 unitats són:

La temperatura de consigna en aquest cas es de 333°K

Rest a es el cabal que s'introdueix en la realimentació

t	i	Q4	T2	T4 (K)	Rest a
					*
3	1	25	325,5	500	24,78
6	2	24,78	325,378	498,702	24,7265
9	3	24,73	325,349	496,773	24,6453
12	4	24,65	325,304	494,237	24,5355
15	5	24,54	325,242	491,127	24,396
18	6	24,4	325,164	487,483	24,2253
21	7	24,23	325,067	483,351	24,0223
24	8	24,02	324,952	478,785	23,7855
27	9	23,79	324,815	473,84	23,5137
30	10	23,51	324,658	468,578	23,206
33	11	23,21	324,477	463,06	22,8616
36	12	22,86	324,271	457,348	22,4805
39	13	22,48	324,041	451,504	22,0628
42	14	22,06	323,784	445,586	21,6095
45	15	21,61	323,5	439,649	21,1221
48	16	21,12	323,188	433,745	20,6026
51	17	20,6	322,848	427,918	20,0538
54	18	20,05	322,481	422,209	19,4788
57	19	19,48	322,086	416,65	18,8813
60	20	18,88	321,665	411,269	18,2652
63	21	18,27	321,219	406,087	17,6345
66	22	17,63	320,749	401,12	16,9935
69	23	16,99	320,257	396,379	16,3463

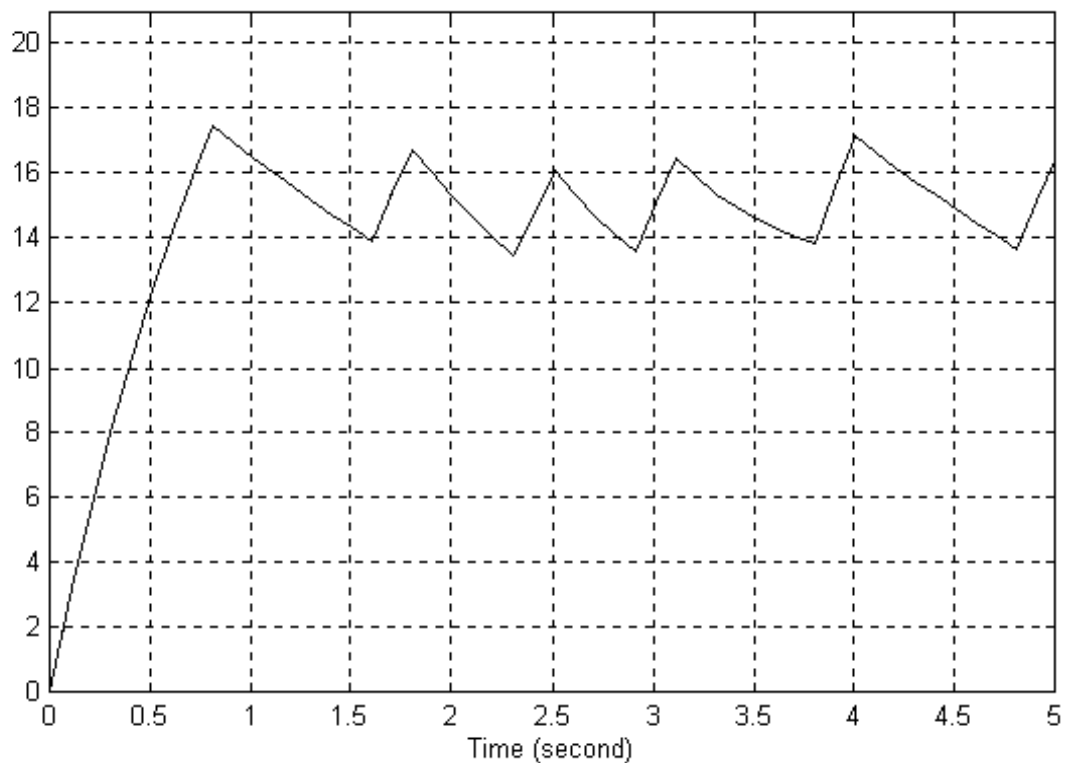
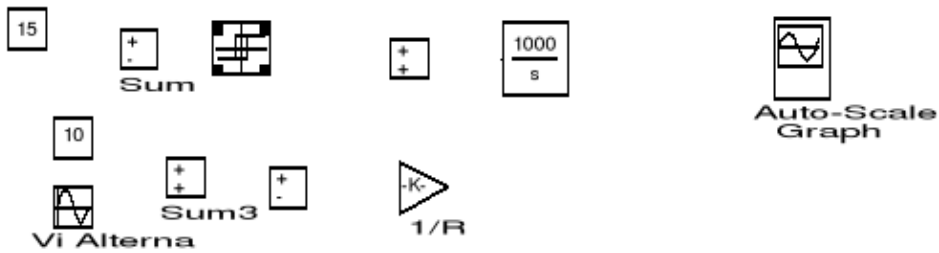
72	24	16,35	319,744	391,869	15,6967
75	25	15,7	319,213	387,591	15,0486
78	26	15,05	318,667	383,546	14,4051
81	27	14,41	318,106	379,727	13,7695
84	28	13,77	317,534	376,13	13,1441
87	29	13,14	316,953	372,746	12,5314
90	30	12,53	316,364	369,566	11,9331
93	31	11,93	315,77	366,58	11,3506
96	32	11,35	315,174	363,779	10,7852
99	33	10,79	314,576	361,152	10,2377
102	34	10,24	313,979	358,688	9,70862
105	35	9,709	313,384	356,378	9,19838
108	36	9,198	312,793	354,213	8,70712
111	37	8,707	312,207	352,183	8,23485
114	38	8,235	311,628	350,278	7,78146
117	39	7,781	311,056	348,492	7,34671
120	40	7,347	310,492	346,817	6,93031
123	41	6,93	309,937	345,245	6,53187
126	42	6,532	309,393	343,769	6,15099
129	43	6,151	308,86	342,383	5,78722
132	44	5,787	308,339	341,082	5,44009
135	45	5,44	307,829	339,861	5,10911
138	46	5,109	307,333	338,714	4,7938
141	47	4,794	306,849	337,636	4,49367
144	48	4,494	306,38	336,625	4,20822
147	49	4,208	305,924	335,674	3,93697
150	50	3,937	305,483	334,783	3,67944
153	51	3,679	305,056	333,945	3,43516
156	52	3,435	304,644	333,16	3,20366
159	53	3,204	304,247	332,423	2,9845
162	54	2,985	303,866	331,732	2,77723
165	55	2,777	303,499	331,085	2,58141
168	56	2,581	303,148	330,479	2,39661
171	57	2,397	302,811	329,911	2,2224
174	58	2,222	302,49	329,38	2,05838
177	59	2,058	302,184	328,885	1,90413
180	60	1,904	301,893	328,422	1,75925
183	61	1,759	301,616	327,99	1,62335
186	62	1,623	301,354	327,587	1,49604
189	63	1,496	301,105	327,212	1,37693
192	64	1,377	300,871	326,863	1,26565
195	65	1,266	300,65	326,54	1,16183
198	66	1,162	300,443	326,239	1,06511

201	67	1,065	300,247	325,96	0,97512
204	68	0,975	300,065	325,702	0,89153
207	69	0,892	299,894	325,464	0,81399
210	70	0,814	299,734	325,243	0,74218
213	71	0,742	299,586	325,04	0,67576
216	72	0,676	299,448	324,853	0,61443
219	73	0,614	299,319	324,68	0,55788
222	74	0,558	299,201	324,522	0,50583
225	75	0,506	299,091	324,377	0,45798
228	76	0,458	298,989	324,244	0,41406
231	77	0,414	298,896	324,122	0,37381
234	78	0,374	298,81	324,011	0,33699
237	79	0,337	298,732	323,909	0,30336
240	80	0,303	298,659	323,817	0,27267
243	81	0,273	298,593	323,733	0,24473
246	82	0,245	298,533	323,656	0,21933
249	83	0,219	298,478	323,587	0,19626
252	84	0,196	298,428	323,524	0,17535
255	85	0,175	298,383	323,468	0,15643
258	86	0,156	298,342	323,416	0,13933
261	87	0,139	298,305	323,37	0,1239
264	88	0,124	298,271	323,329	0,11
267	89	0,11	298,241	323,291	0,0975
270	90	0,097	298,214	323,258	0,08627
273	91	0,086	298,189	323,227	0,07621
276	92	0,076	298,167	323,201	0,06719
279	93	0,067	298,147	323,176	0,05914
282	94	0,059	298,13	323,155	0,05195
285	95	0,052	298,114	323,136	0,04554
288	96	0,046	298,1	323,119	0,03984
291	97	0,04	298,087	323,104	0,03477
294	98	0,035	298,076	323,09	0,03028
297	99	0,03	298,067	323,078	0,0263
300	100	0,026	298,058	323,068	0,02278
303	101	0,023	298,05	323,059	0,01967
306	102	0,02	298,043	323,05	0,01693
309	103	0,017	298,037	323,043	0,01452

Pràctica de regulació automàtica

Circuit electric

El circuit electric d'aquesta figura és el de la pràctica:



ESTUDI D'UN SISTEMA REALIMENTAT

• OBJECTIU

Els objectius de la pràctica són:

- Familiaritzar-se amb el Matlab
- Utilitzar les eines per l'anàlisi freqüencial i temporal de sistemes lineals
- Aplicar aquestes eines a l'anàlisi d'un sistema realimentat.

• INTRODUCCIÓ TEÒRICA

Les característiques dinàmiques d'un sistema realimentat (anell tancat) es poden obtenir a partir de l'estudi d'aquest sistema en anell obert

• ESTUDI PREVI

Repasar els següents temes:

- resposta temporal
- Funcions de Transferència de sistemes lineals
- Llaç tancat / Llaç obert
- Diagrames de blocs
- Sistemes 1 entrada–1 sortida, sistemes multivariables
- Funcions de transferència de sistemes discrets
- Estabilitat
- **Determinants de Hurwitz**

Aquests determinants són un mètode algebraic per determinar si un sistema és o no és estable mitjançant el seu polinomi característic. Són la base del criteri de Routh–Hurwitz

• Tabulació de Routh–Hurwitz

Mètode algebraic que proporciona informació sobre l'estabilitat absoluta d'un sistema linial i invariant amb el temps que té una equació característica amb coeficients constants. El criteri prova si les arrels de l'equació característica està en el semiplà dret s. També indica el n° d'arrels que estan sobre l'eix jW i en el semiplà dret. Es basa en tabular els supíndexs de les potències

• Criteri de Nyquist

Es un mètode semigràfic que proveix informació sobre la diferència entre el n° de pols i zeros de la funció de transferència en llaç tancat que estan en el semiplà dret del pla s mitjançant la observació del comportament de la gràfica de Nyquist de la funció de transferència en llaç tancat.

• Diagrama de Bode

Aquest diagrama és una gràfica de la magnitud de la funció de transferència en llaç $G(jW)H(jW)$ en dB i de la fase $G(jW)H(jW)$ en graus, en funció de la freqüència Wm la estabilitat del sistema en llaç tancat es pot determinar observant el comportament d'aquestes gràfiques

• Solució de les arrels del polinomi característic

Solucionar les arrels del polinomi característic obtenim el valor exacte d'aquestes arrels, si tenen la part real positiva el sistema és inestable i si son totes a la part negativa real el sistema és estable. També hi ha els marginalment estables que són els integradors

- Precisió
- resposta a un esglaó (error de posició)

$$R(t) = K * U_s(t) \quad R(S) = K/s$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(S)H(S) \quad \text{per } s=0 \quad E_{ss} = 1/1+K_p$$

- resposta a una rampa (error de velocitat)

$$R(t) = Kt * U_s(t) \quad R(S) = K/s^2$$

$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$ per $s \rightarrow 0$ $E_{ss} = 1/K_v$

- resposta a una paràbola (error d'acceleració)

$R(t) = K t^2 \cdot U_s(t)$ $R(s) = K/s^3$

$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$ per $s \rightarrow 0$ $E_{ss} = 1/K_a$

- **REALITZACIÓ**
- ***MATERIAL NECESSARI***

Matlab amb Control System Toolbox

- ***ÚS DEL MATLAB***

Per fer la pràctica cal saber utilitzar les principals funcions de control. Estudiarem un sistema d'exemple. La funció de transferència a considerar serà:

$H(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$

den $s^2 + 2s + 3$

4.2.1 STEP I IMPULSE

Resposta a un esglaió de sistemes lineals continus en el temps.

STEP(A,B,C,D,IU) dibuixa la resposta temporal del sistema lineal

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

A un esglaió aplicat a l'entrada IU, T permet dir l'espai de temps a considerar

$[Y,X] = \text{STEP}(A,B,C,D,IU,T)$ ó $[Y,X,T] = \text{STEP}(A,B,C,D,IU)$ retorna

la sortida i l'estat de la resposta a les matrius Y i X respectivament

T serveix per determinar el n° de temps.

$[Y,X] = \text{STEP}(\text{NUM},\text{DEN},T)$ ó $[Y,X,T] = \text{STEP}(\text{NUM},\text{DEN})$ calcula la resposta

temporal de la funció de transferència: $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$

on NUM i DEN contenen els coeficients dels polinomis de s

per definir el vector de Temps ho fem de la següent manera:

t = temps inicial: increments de temps: temps final ex: $t = 0:0.1:10$;

4.2.2 LSIM

Simulació de sistemes lineals continus en el temps a entrades arbitràries LSIM(A,B,C,D,U,T) dibuixa la resposta temporal del sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

a l'entrada U. La Matriu U ha de tenir tantes columnes com les entrades. Cada fila de U correspon a un nou punt de temps i U ha de tenir la llargada de (T) files.

LSIM(A,B,C,D,U,T,X0) pot utilitzar-se si existeixen condicions inicials

LSIM(NUM,DEN,U,T) dibuixa la resposta temporal de la funció de transferència: $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$

Per definir una rampa:

$T = 0:0.1:10$; (variació en l'espai de temps i llavors)

$U = k*t$ (rampa); $U = k*t^2$ (paràbola); $U = f(t)$ (qualsevol cosa)

4.2.3 BODE

Diagrama de Bode (resposta freqüencial) del sistema lineal continu en el temps

BODE(A,B,C,D,IU) fa el diagrama de Bode a l'entrada IU a totes les sortides dels estats del sistema (A,B,C,D).

IU representa l'índex de les entrades del sistema i especifica quina entrada s'usa per la resposta freqüencial. Les freqüències són escollides automàticament

BODE(NUM,DEN) dibuixa el diagrama de Bode de la funció de transferència: $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$

BODE(NUM,DEN,W) utilitza un vector de freqüències donat en rad/s on s'avaluarà el diagrama de Bode.

$W = 0:0.1:10$ per freqüències entre 0–10 amb increment 0.1

$W = \text{LOGSPACE}(-2,2)$ Marge de freqüències entre –100 i 100 rad/ss

4.2.4 ALTRES FUNCIONS

RLOCUS (num,den)

Calcula i dibuixa les localitzacions de les arrels de:

$$H(s) = 1 + K * \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} = 0$$

Den (s)

Per una selecció de guanys K per dibuixar una funció però es possible especificar el vector K fent Rlocus (num,den,k)

PZMAP (num,den)

Dibuixa el diagrama de pols-zeros de sistemes lineals continus en el temps.

En aquest cas computa els pols i zeros de la funció de transferència $G(S) = \text{num}/\text{den}$

Si el sistema té més d'una entrada, llavors els 0s de transmissió són computats

$[R,K] = \text{RLOC FIND}(\text{NUM},\text{DEN})$

S'utilitza per seleccionar un punt de la localització d'arrels de la funció de transferència $G(s) = \text{num}(s)/\text{den}(s)$. La funció ens serveix per trobar els guanyos de localitzacions d'arrels per una sèrie d'arrels donades

$[\text{num},\text{dem}] = \text{SERIES}(\text{num1},\text{den1},\text{num2},\text{den2})$

Determina el polinomi que s'obté quan es connecten dues funcions de transferència $G_i(s) = \text{num}_i/\text{den}_i$ quan estan connectats en sèrie

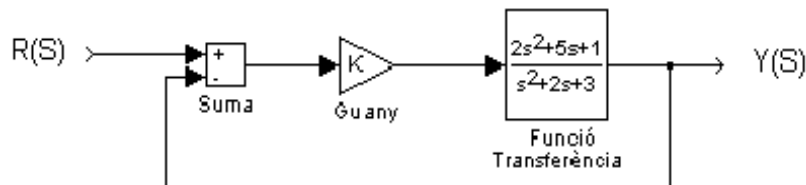
$[\text{num},\text{dem}] = \text{PARALLEL}(\text{num1},\text{den1},\text{num2},\text{den2})$

Determina el polinomi que s'obté quan es connecten dues funcions de transferència $G_i(s) = \text{num}_i/\text{den}_i$ quan estan connectats en paral·lel

$\text{CLOOP}(\text{num},\text{den},\text{func})$

Produeix la funció de transferència en llaç tencat d'un sistema amb realimentació. La funció $H(s) = \text{func}$ i $G(S) = \text{num}/\text{den}$. Per fer una realimentació unitària cal que func sigui -1.

4.3. ESTUDI D'UN SISTEMA REALIMENTAT



El procés realimentat que es proposa té la següent estructura de dalt:

El Guany és un paràmetre K que cal determinar perquè el sistema sigui estable.

La funció de transferència del procés a controlar és de tercer ordre:

$$G(s) = \frac{0'5}{(s+10)(s^2 + 0'1789s + 0'05)}$$

4.3.1 DOMINIS FREQUENCIALS I TEMPORALS

Representeu gràficament la localització dels pols i els zeros de $G(s)$ mitjançant la funció PZMAP. En base a això determineu si hi ha dominància d'un parell de pols respecte el tercer pol i valoreu la possibilitat de reduir l'ordre del sistema.

Per fer el producte de polinomis hem fet:

Num1 = 1; num2 = 0'5; den1 = [1 10]; den2 = [1 0.1789 0.05] i llavors

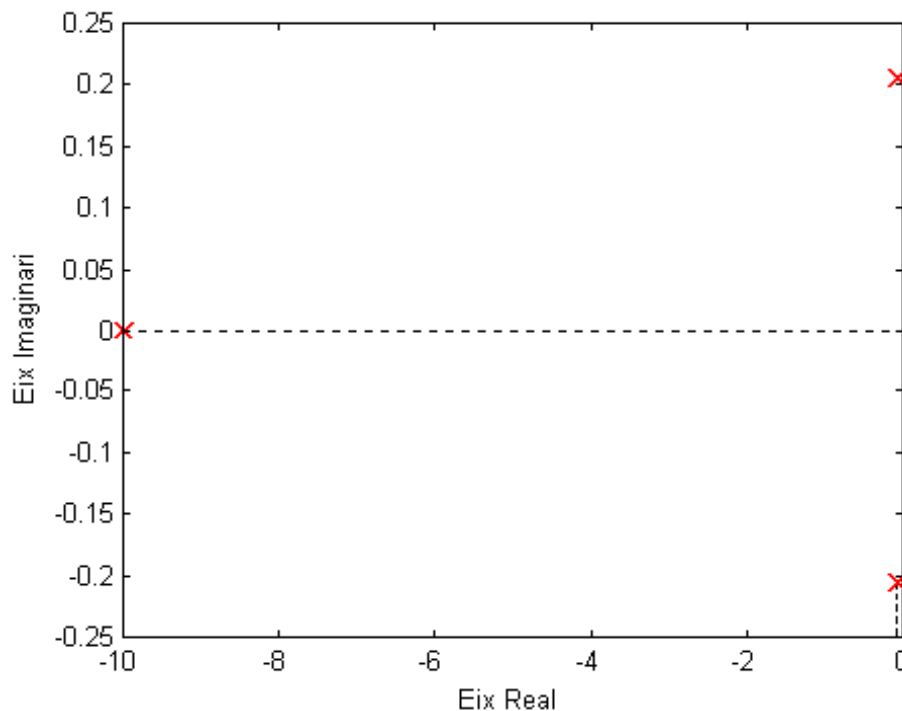
[num,den] = Series (num1,den1,num2,den2)

La funció que transferència que hem obtingut és:

$$G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 0.5}$$

$$1s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 0.5$$

>> PZMAP (num,den)



Aquí podem veure que els 2 pols imaginaris estan molt a la vora de 0 encanvi el pol real està molt lluny, per tant podem considerar que el pol a $s+10$ és recessiu i per tant, podem simplificar la funció de transferència a una de 2on ordre

Segons el que s'ha exposat abans podem simplificar la funció de transferència sempre hi quan tinguem en compte que el valor final de la simplificació ha de ser el mateix que el de la funció original sinó no seria una simplificació vàlida:

$G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 0.5}$ Simplificant el pol $s+10$ ens queda:

$$1s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 0.5$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

$$s \rightarrow 0 \quad 0.5$$

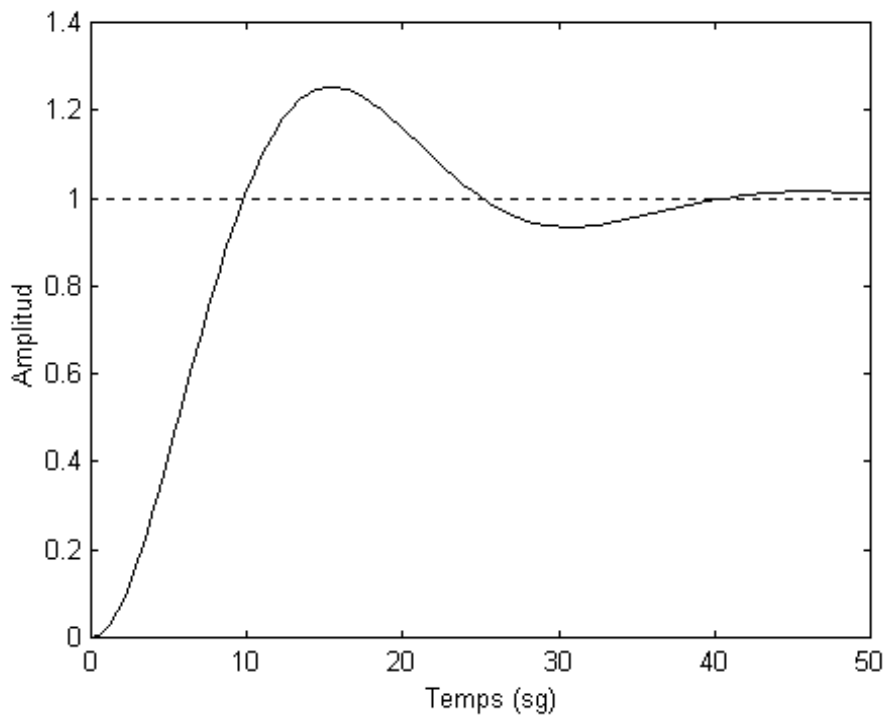
$$G_p(s) = \frac{0.05}{s^2 + 1.839s + 0.5}$$

$$s^2 + 0.1789s + 0.05$$

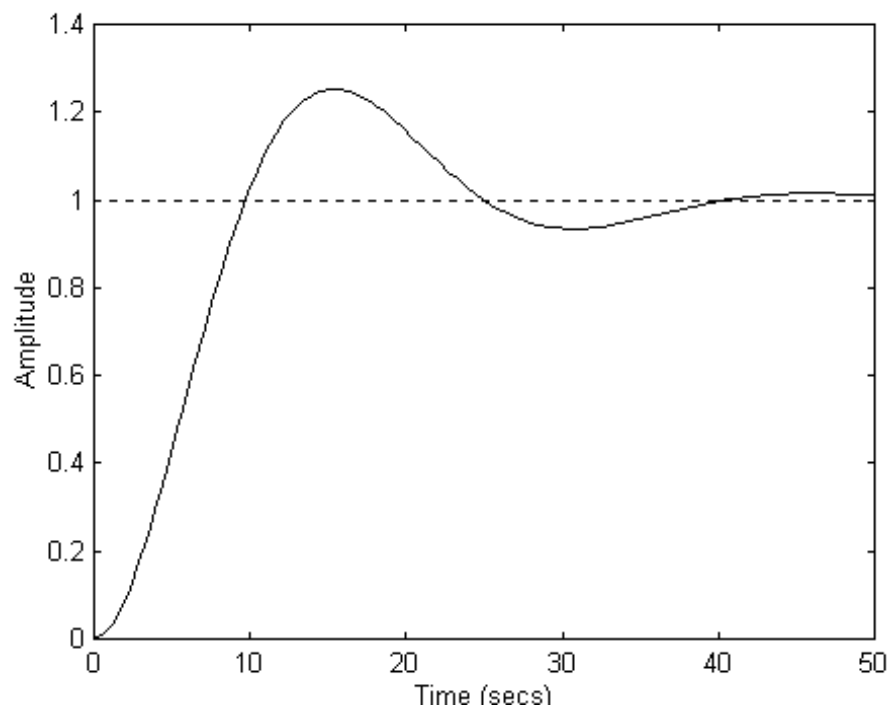
Comproveu que és possible la reducció comparant les respostes a un esglaió del sistema original i del sistema reduït

Amb num = [0.5] i den = [1 10.1789 1.839 0.5] fem:

>> STEP (num,den) i ens queda la següent resposta:

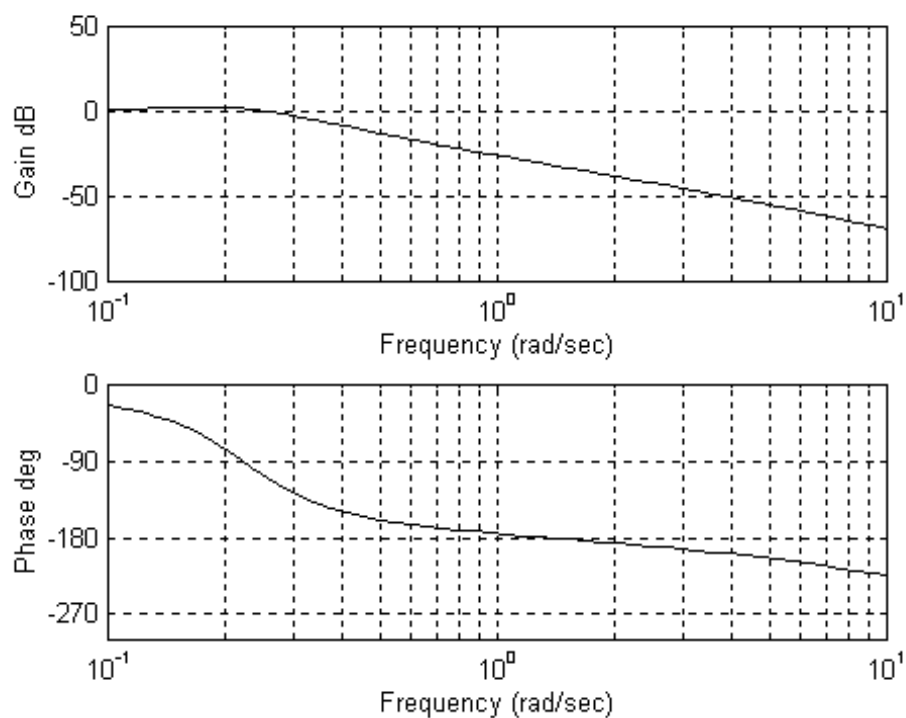


I fem el mateix pel sistema reduït; num = [0.05], den = [1 0.1789 0.05]

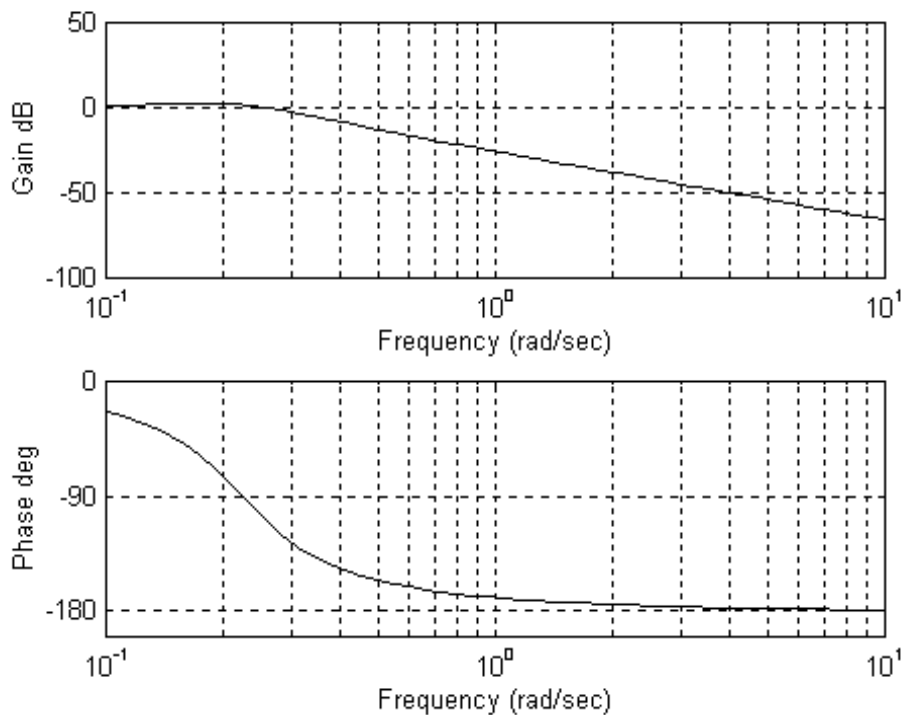


Representeu també el diagrama de Bode del sistema original. Compareu-lo amb l'anterior i indiqueu en quin marge de freqüències és vàlida la reducció de l'ordre del sistema.

El diagrama de Bode del sistema original és:



I el diagrama de Bode del sistema simplificat és:



Veient els diagrames de Bode podem dir que la simplificació és vàlida per totes les freqüències compreses entre 10 i -10 Hz, i també per totes les altres freqüències:

En el sistema realimentat, però, aquest sistema simplificat ja no ens serà vàlid. **4.3.2 ANALISI DE L'ESTABILITAT**

Cal calcular amb el controlador enllaç obert. Aneu variant el guany de K del controlador i determinar el guany crític Klim pel qual el marge de guany es 0 (Bode) i el marge de fase és 0.

També es possible fer-ho amb Rlocus o RlocFind

Primerament s'introdueix el numerador i denominador i llavors per tancar l'anell es fa servir la ordre Cloop.

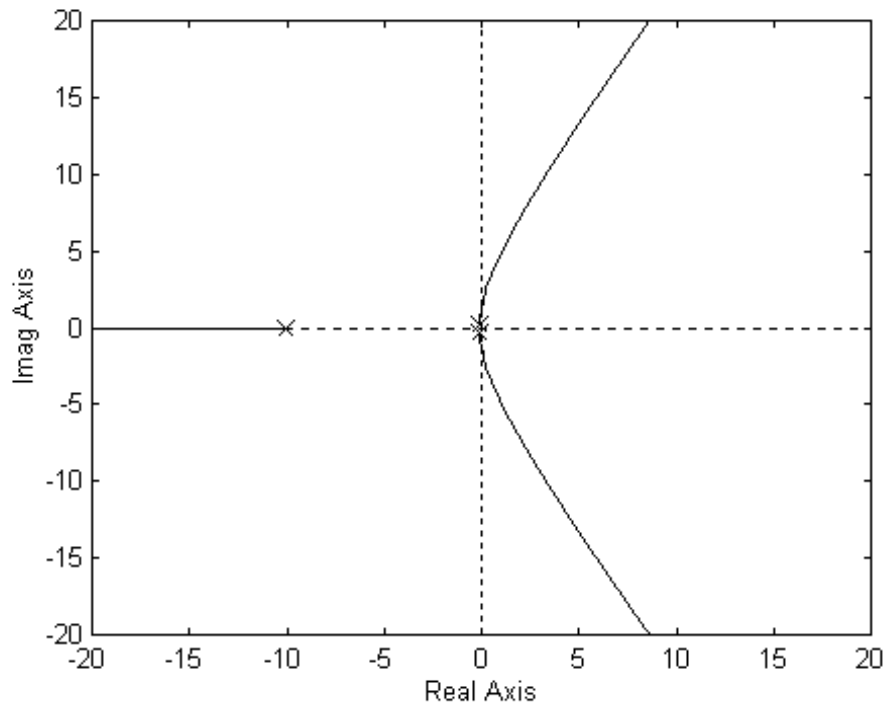
Per $K = k$, obtenim la següent $Y(S)/R(S) = M(S)$

$$M(S) = \frac{0.5k}{S^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + (0.5+0.5k)}$$

$$S^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + (0.5+0.5k)$$

Ara caldria analitzar del polinomi característic quin valor de k fa que els 2 pols complexos tinguin part real 0, es quan el sistema comença a inestabilitzar-se

Fent Rlocus amb el sistema en anell tancat obtenim



Hauriem de trobar el punt on els 2 pols complexes tenen part real 0, podem fer-ho amb:

$[r,k] = \text{rlocus}(\text{num}, \text{den})$ i mirant la matriu podríem obtenir el resultat desitjat.

R C1 C2

-10.0769 -0.0510 + 0.8992i -0.0510 - 0.8992i

-10.1912 0.0062 + 1.4016i 0.0062 - 1.4016i

Aproximant més obtenim els següents valors:

-10.1787 -0.0001 - 1.3554i -0.0001 + 1.3554i

-10.1792 0.0001 - 1.3572i 0.0001 + 1.3572i

Ja sabem ara que perquè sigui estable el polinomi ha de ser el producte d'això:

$$(s+10'179) (s^2+1'8393) = s^3 + 10'1789s^2 + 1'839s + 18'722$$

la k, per tant serà:

$$k = 18'222 \cdot 2 = 36'45 \text{ Aproximadament}$$

Localitzeu els pols introduint el controlador en anell obert, aneu variant el guany de K del controlador i determinar el guany crític Klim per al qual el marge de guany és 0 dB i el marge de fase és 0. Mirar els diagrames de Bode

Per $k = 1$, els guanys són els següents ; $0.5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 1)$

Per 0dB freq = 0.2 Hz ;phase deg = -125° (aprox)

Per k = 5, els guanys són els següents ; $2.5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 3)$

Per 0dB freq = 0.55 Hz, phase deg = -160° (aprox)

Per k = 10, els guanys són els següents ; $5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 5)$

Per 0dB freq = 0.72 Hz, phase deg = -166° (aprox)

Per k = 15, els guanys són els següents ; $7.5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 8)$

Per 0dB freq = 0.91 Hz, phase deg = -173° (aprox)

Per k = 20, els guanys són els següents ; $10/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 10)$

Per 0dB freq = 1.05 Hz, phase deg = -175° (aprox)

Per k = 30, els guanys són els següents ; $15/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 15)$

Per 0dB freq = 1.2 Hz, phase deg = -177° (aprox)

Per k = 40, els guanys són els següents ; $20/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 20)$

Per 0dB freq = 1.4 Hz, phase deg = -181° (aprox)

Per k = 35, els guanys són els següents ; $17.5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 18)$

Per 0dB freq = 1.3 Hz, phase deg = -179° (aprox)

Veient això podem establir que la k està entre 35–40, podem afinar més fent un bode entre les freqüències de 1.3 Hz i 1.4 Hz i intentar trobar el punt exacte on el guany és 0dB i la fase són -180° perquè si la fase és més petita llavors vol dir que hem entrat en els semiplans positius i que el sistema és inestable.

Fent $W = 1.3:0.001:1.4$ i un diagrama de Bode podem determinar el valor de W_n

Fent això obtenim una freqüència W_n de 1.3565 rad/s (aprox)

A partir de la freqüència natural podem trobar el valor de k com abans, tot hi que per fer-ho estem aproximant a un sistema de 2on grau com abans, però ho podem fer perquè el pol a $s+10$ és recessiu enfront els 2 pols complexos molt pròxims a 0.

$$W_n^2 = 0.5 + 0.5k \quad 18'4 = 0.05 + 0.05 k \quad k = 36'6$$

COMPROVACIÓ DEL VALOR DE K

Per comprovar el valor de K s'ha fer la tabulació de Routh–Hurwitz del sistema realimentant:

$$M(S) = \underline{0.5k}$$

$$S^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + (0.5+0.5k)$$

$$S3 \ 1.839$$

$$S2 \ 10.1789 \ 0.5+0.5k$$

$$S1 \ -0.5-0.5k + 18.719$$

$$10.1789$$

$$S0 \ 0.5 + 0.5 \ k$$

Estabilitat, tots els elements 1era columna han de ser positius

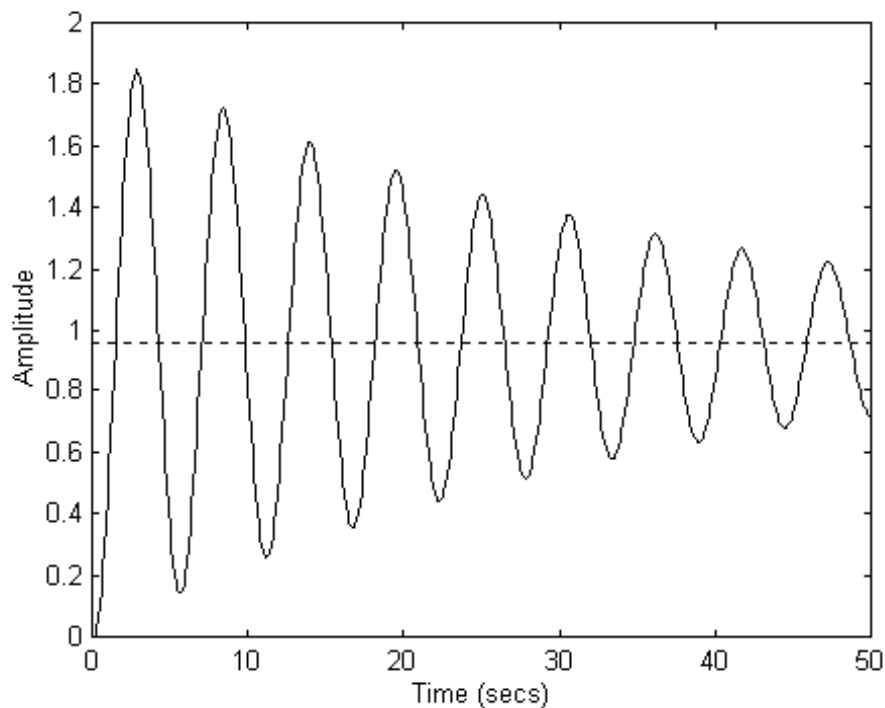
$$0.5 + 0.5k > 0 \quad k > -1 \text{ se suposa que el guany és positiu!!}$$

$$18.219 - 0.5k > 0 \quad k < 36.26$$

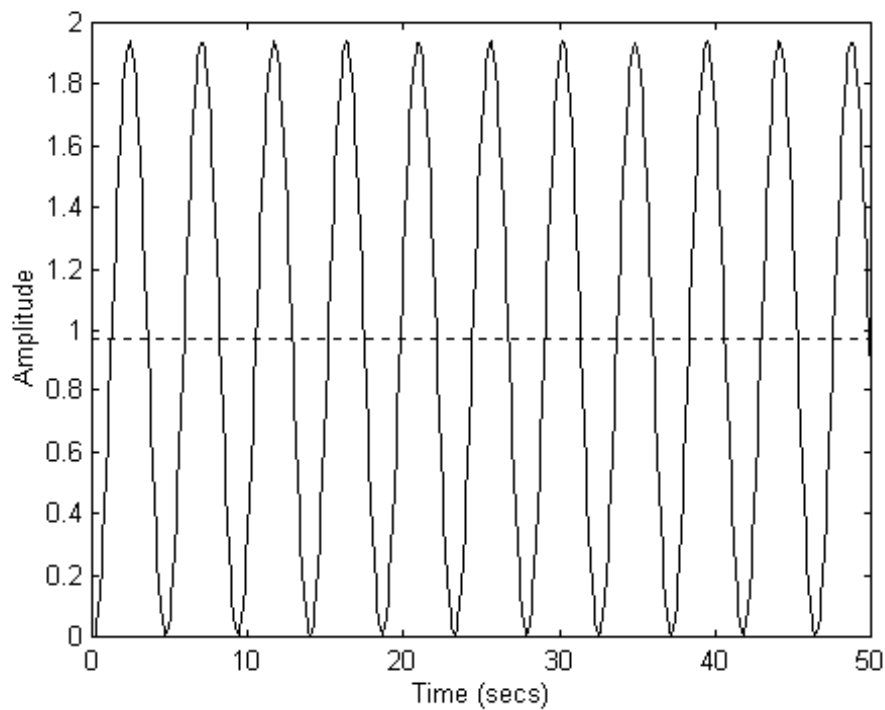
Comprovar que la resposta temporal en anell tancat per a guanys $K < K_{lim}$ és estable i que per a guanys $K > K_{lim}$ és inestable. Per tancar l'anell s'utilitza CLOOP. Representeu gràficament els pols i els zeros del sistema realimentat. Relacioneu la seva posició amb l'estabilitat

S'han agafat 3 valors de k

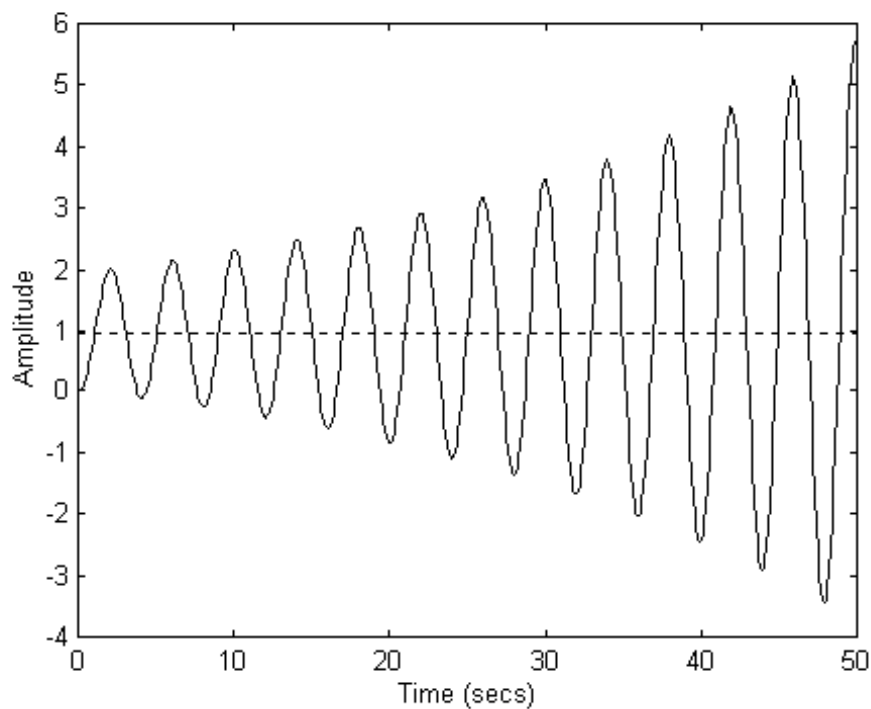
$K = 25$ la funció de transferència és $12.5/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 13)$



$K = 36.4$ la funció de transferència és $18.2/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 18.72)$



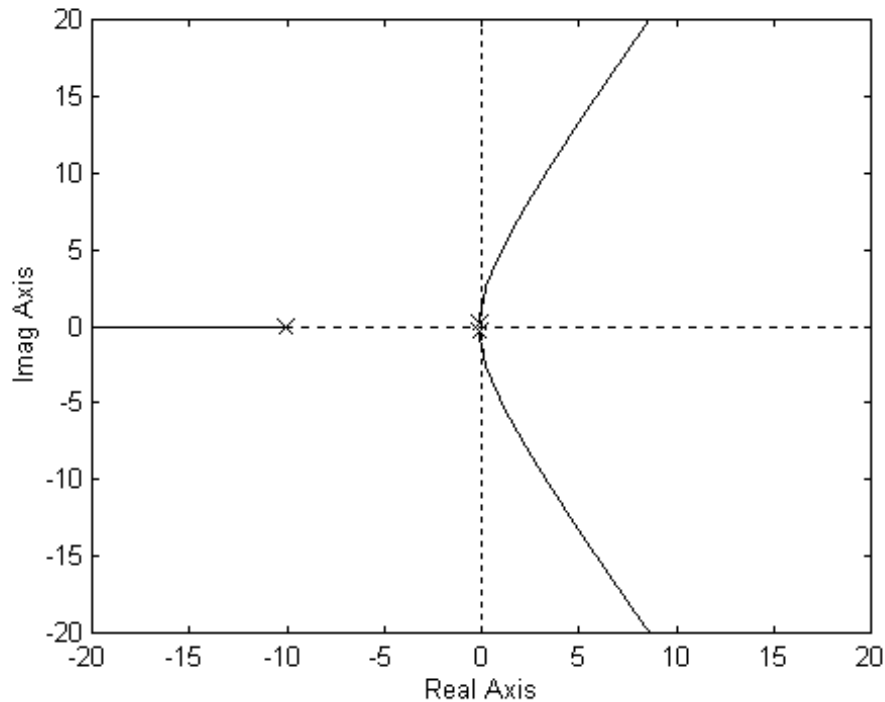
Per la $k = 36.25$ més o menys el sistema va oscil.lant des de 0 a 2 tot el temps sense esmorteir-se gens ni mica la senyal $K = 50$ la funció de transferència és $25/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 30)$



Com es pot veure en imatge, el sistema és inestable perquè creix contínuament fins a llegar a oscil.lar del "+" al "-"

Representació dels pols i zeros del sisema realimentat

Per fer-ho es fa servir la funció RLOCUS



Això és la representació dels pols del polinomi característic, el sistema serà estable sempre hi quan els pols estiguin a la part negativa del semiplà complex.

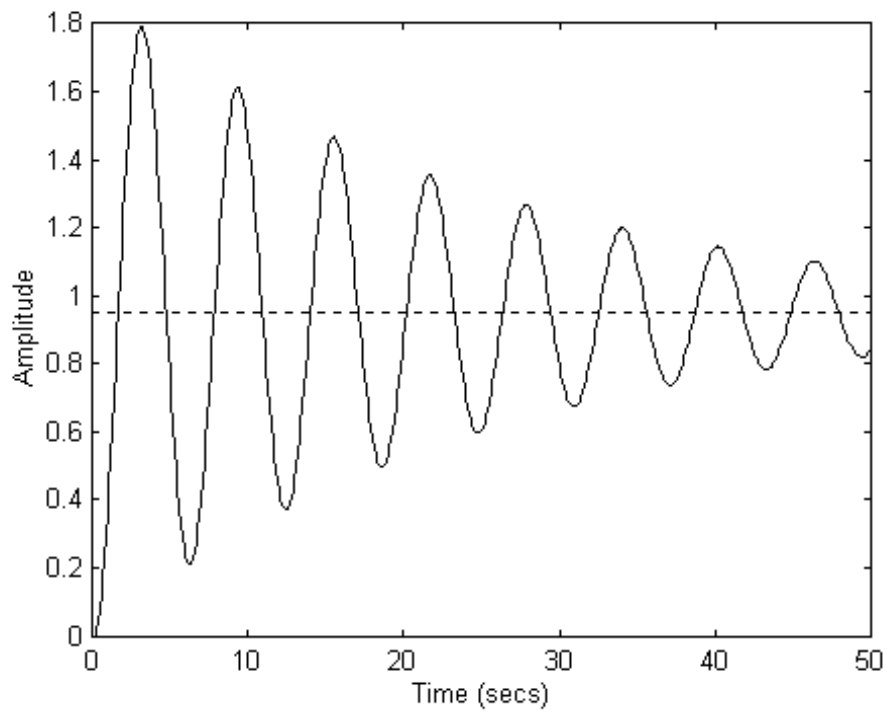
4.3.3. ESTUDI DEL RÈGIM ESTACIONARI

Amb el sistema amb enell tancat i un guany $K < K_{lim}$ observeu la resposta temporal a un esglaió, una rampa i a una paràbola. Comproveu que els errors de posició, velocitat i desplaçament es corresponen amb els d'un sistema de tipus 0.

Per fer-ho s'ha de fer servir la ordre LSIM i definir les funcions

Per un esglaió utilitzem la funció STEP (num,den) amb $k = 20$

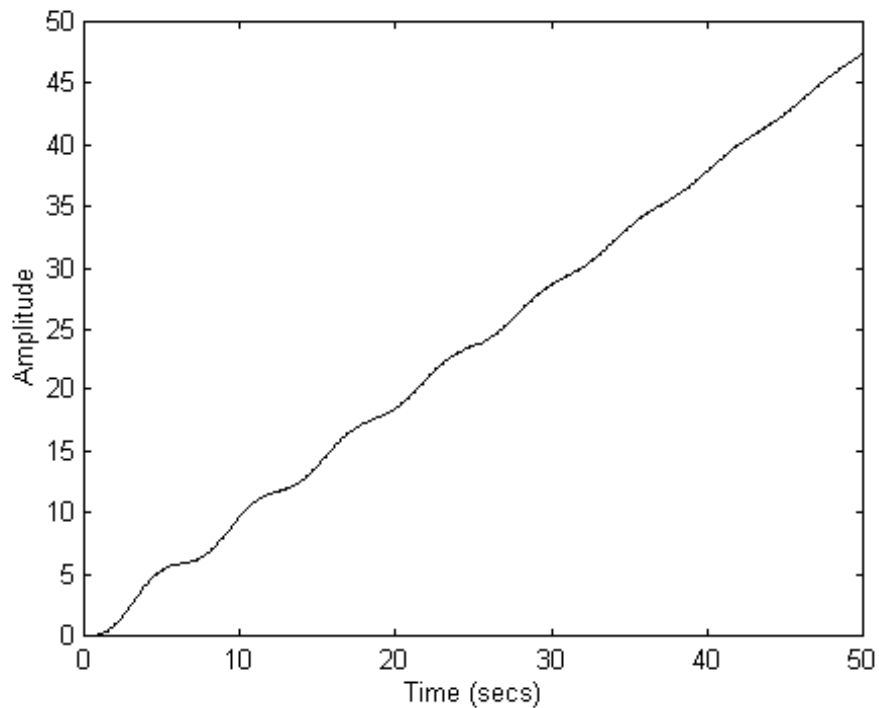
$M(s) = 10/(s^3 + 10.1789s^2 + 1.839s + 10^5)$ llaç tancat



La rampa no és unitària en la resposta sinó que s'estabilitza a 0.97, hi ha un error constant en la resposta.

Per definir una rampa hem de crear el vector t de temps i llavors un altre vector u que sigui una funció de 1er ordre de t , la rampa nostra serà $u = t$

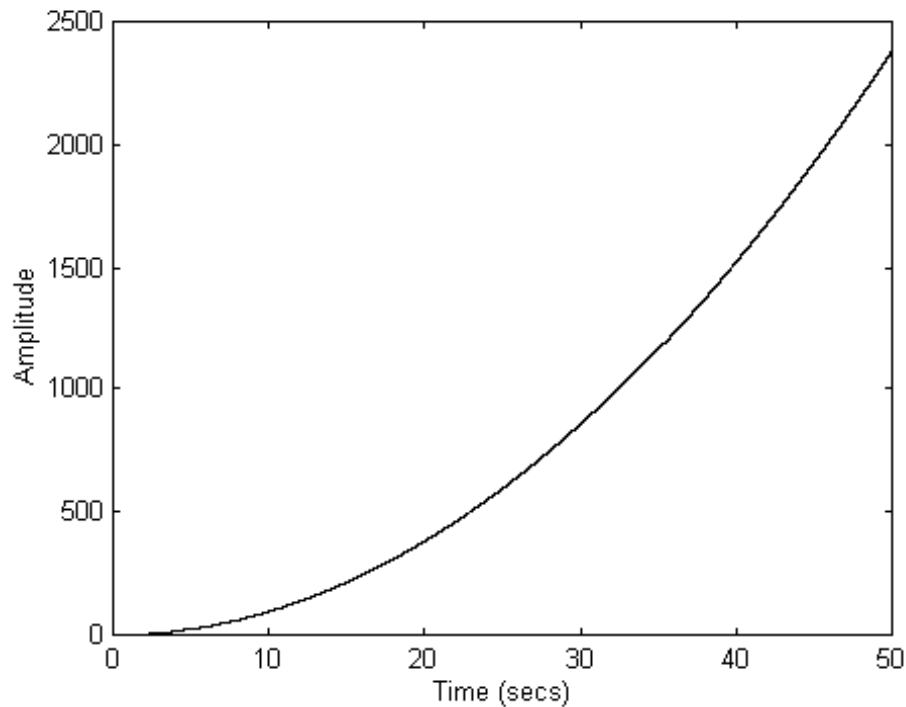
`LSIM (num,den,u,t)`



Com es pot veure aquí, l'error de velocitat en estat estacionari és infinit, perquè el sistema no se'ns accosta a la forma d'una rampa i a cada punt l'error es va fent cada cop més gran.

Per definir una paràbola hem de crear el vector t de temps i llavors un altre vector u que sigui una funció de 2on ordre de t , la rampa nostra serà $u = t.*t$

LSIM (num,den,u,t)

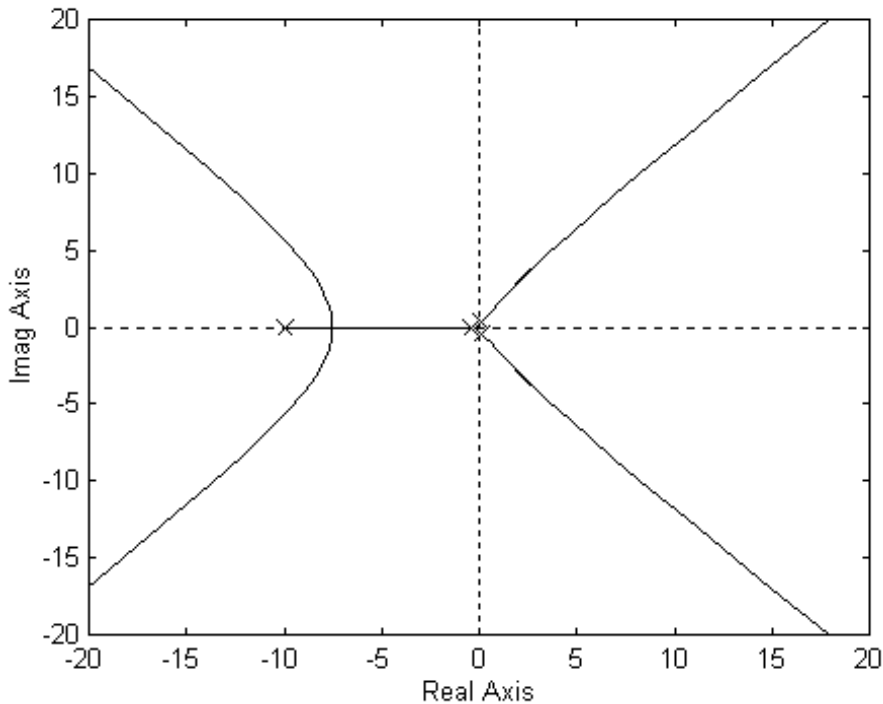


Com es veu a la gràfica, l'error d'acceleració per aquest sistema se'ns fa més gran cada cop que anem incrementant l'espai temporal, per tant, l'error és infinit, cosa que ens mostra que és un sistema de tipus 0 ja que els errors de velocitat i acceleració per aquest sistema són infinit i el de posició és una constant.

Afegiu al sistema un integrador. Busqueu la nova Klim i torneu a comprovar que els errors de posició, velocitat i acceleració es corresponen amb els d'un sistema de tipus I.

Utilitzeu la funció PZMAP per veure com canvien de posició els pols i els zeros del sistema realimentat.

$M(s) = 0.5k/s^4 + 10.1789s^3 + 1.839s^2 + 0.5s + 0.5k$ llaç tancat



A partir d'aquí podem determinar la K_{lim} pel sistema de 4t ordre.

Després d'haver examinat els vectors que ens ha proporcionat la funció RLOCUS hem pogut determinar quan els 4 pols estan tots al semiplà negatiu i, per tant, el sistema és estable. Els resultats són:

$$-10.0000 \quad -0.0344 + 0.2019i \quad -0.0344 - 0.2019i \quad -0.1102$$

$$-9.9999 \quad 0.0064 + 0.2268i \quad 0.0064 - 0.2268i \quad -0.1918$$

Interpolant:

$(s+10)*(s^2+0.0484)*(s+0.175)$ Calculant el terme independent i igualant:

$$K_{lim} = 2*10*0.0484*0.175 = 0.168$$

Així si $K > 0.168$ el sistema se'n torna inestable.

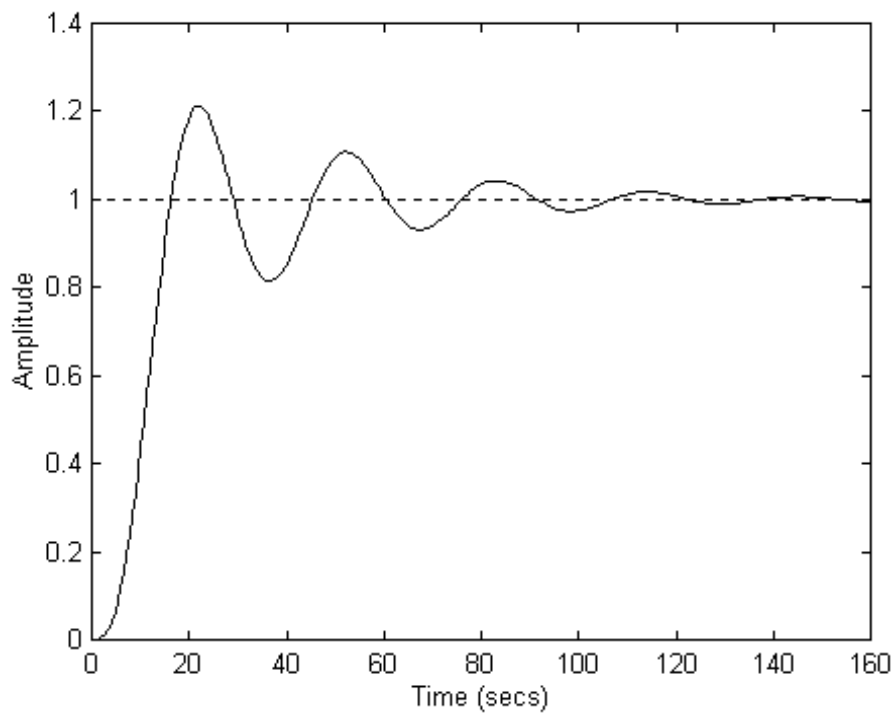
ERRORS EN ESTAT ESTACIONARI

Per un sistema qualsevol hem agafat un valor de k de 0.1

La seva funció de transferència en llaç tencat és la següent:

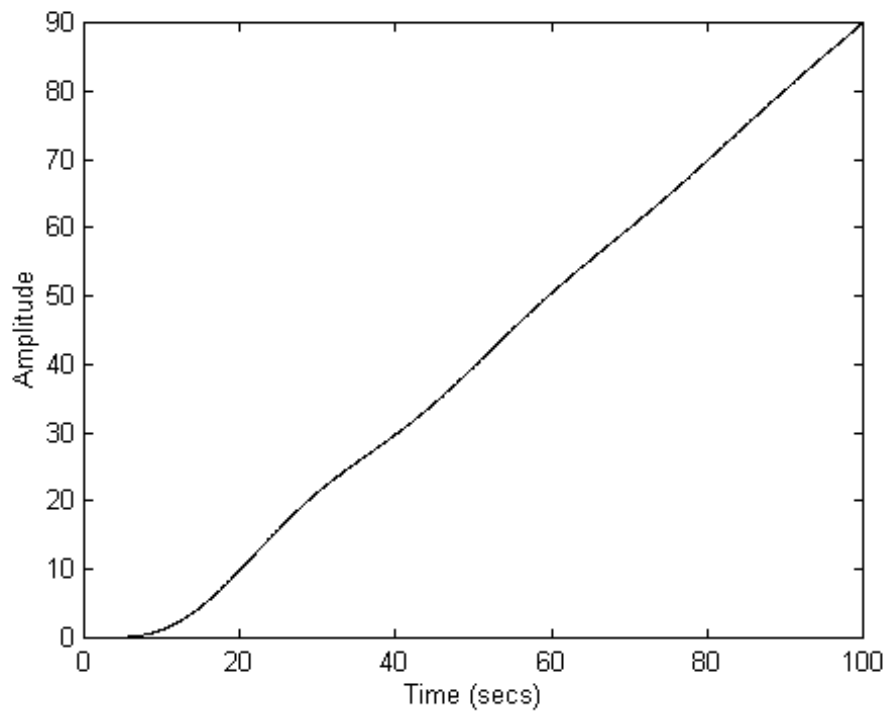
$$M(s) = 0.05/s^4 + 10.1789s^3 + 1.839s^2 + 0.5s + 0.05$$

Hem comprovat l'error de posició per una entrada de graó, la gràfica que ens surt de la resposta temporal per una entrada esglaó és la següent:

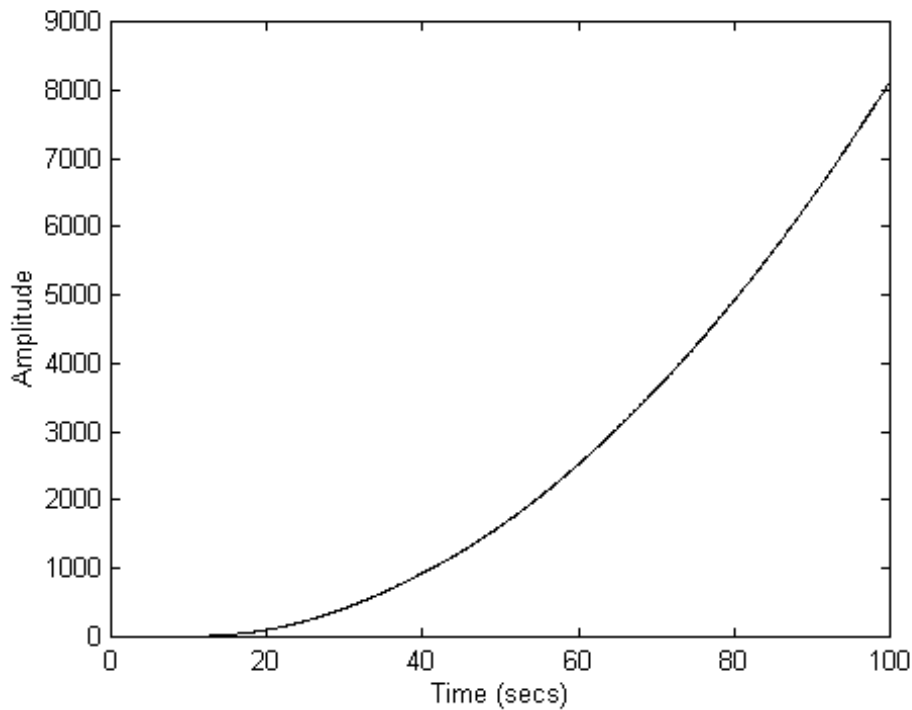


Es veu que l'error en aquest sistema és 0 ja que per una rampa unitària s'ens estabilitaza al valor de 1 que és el valor de la rampa unitària.

Per una entrada en forma de rampa, la resposta temporal és la següent:



Com es pot veure l'error en la funció rampa és constant i és d'unes 10 unitats, això vol dir que la constant d'error és 0.1 més o menys. Per una funció paràbola, si el sistema és de tipus I, hi hauria d'haver un error infinit, cosa que es pot comprovar mirant la gràfica de la resposta temporal a una paràbola.



Mirant aquesta gràfica podem apreciar que l'error a mesura que augmenta el temps s'ens va fent més gran, cosa que indica que l'error d'acceleració és infinit.

Per tant: Es un sistema d'ordre I

Amb els resultats obtinguts a l'apartat 4.2.1 i 4.2.2 comproveu que es compleixen els teoremes del valor inicial i final per entrades d'impuls, graó i rampa.

La funció de transferència pels apartats de STEP, IMPULSE i LSIM és

$\frac{2s^2+5s+1}{s^2+2s+3}$ A impulsos, graons i rampes la resposta és:

Teorema valor inicial a esglaos

Per un sistema estable qualsevol es compleix que

Valor inicial $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot R(S) \cdot M(s) = \text{Valor inicial}$ On $R(S) = \text{Entrada}$

Esglaó $s \rightarrow \infty$ $M(S) = \text{Funció de transferència}$

Teorema Valor Final

Per un sistema estable qualsevol es compleix que:

Valor final $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(S) \cdot M(s) = \text{Valor final}$ On $R(S) = \text{Entrada}$

Esglaó $s \rightarrow 0$ $M(S) = \text{Funció de transferència}$

VALORS INICIALS I FINALS A UN IMPULS

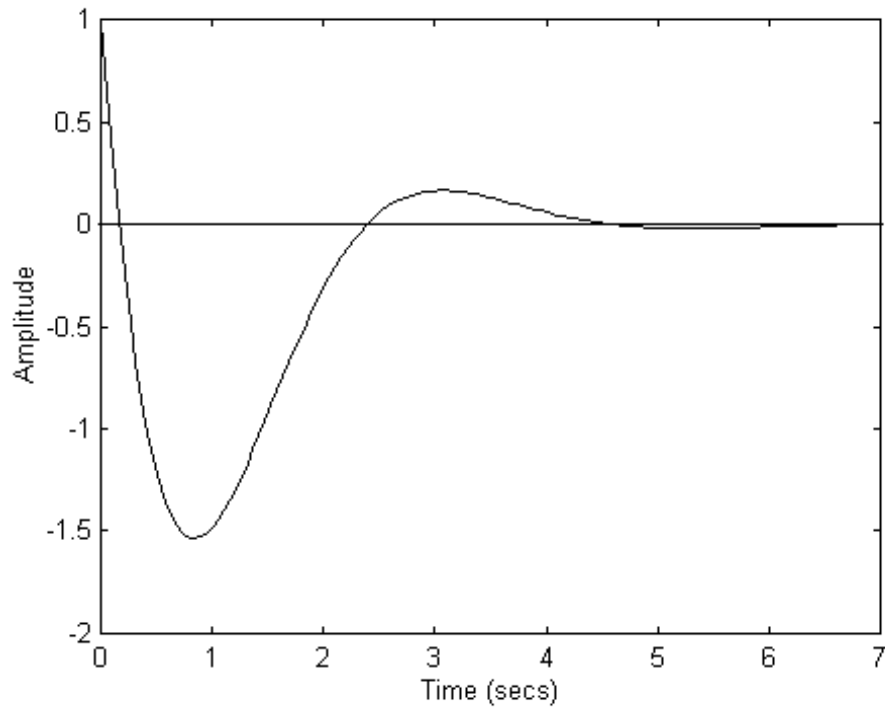
$$R(S) = 1 \quad M(S) = \frac{2s^2+5s+1}{s^2+2s+3}$$

$$V.I. = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s^2+5s+1)}{s^2+2s+3} = \infty$$

$$s \rightarrow \infty \quad s^2+2s+3$$

$$V.F. = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(2s^2+5s+1)}{s^2+2s+3} = 0$$

$$s \rightarrow 0 \quad s^2+2s+3$$



VALORS INICIALS I FINALS A UN ESGLAÓ

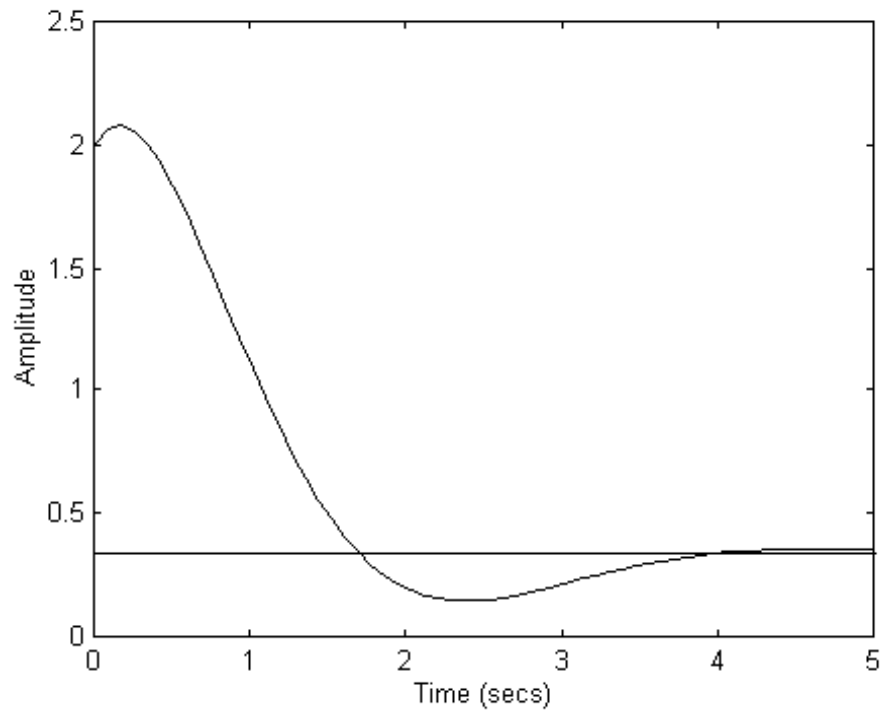
$$R(S) = 1/s \quad M(S) = \frac{2s^2+5s+1}{s^2+2s+3}$$

$$V.I. = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(2s^2+5s+1)}{s^2+2s+3} = 2$$

$$s \rightarrow \infty \quad s^2+2s+3$$

$$V.F. = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s^2+5s+1)}{s^2+2s+3} = \frac{1}{3}$$

$$s \rightarrow 0 \quad s^2+2s+3$$



VALORS INICIALS I FINALS A UN A RAMPA

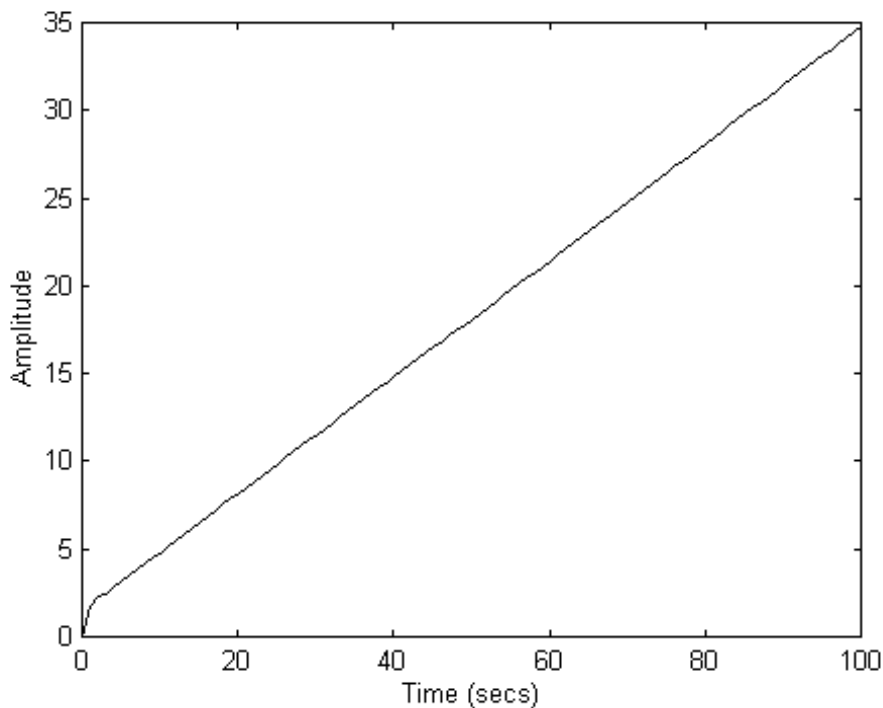
$$R(S) = 1/s^2 \quad M(S) = (2s^2 + 5s + 1) / (s^2 + 2s + 3)$$

$$V.I. = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(2s^2 + 5s + 1)}{s^2 + 2s + 3} = 0$$

$$s \rightarrow \infty \quad s^2(s^2 + 2s + 3)$$

$$V.F. = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s^2 + 5s + 1)}{s^2 + 2s + 3} = \frac{1}{3}$$

$$s \rightarrow 0 \quad s^2(s^2 + 2s + 3)$$



PRÀCTIQUES DE REGULACIÓ AUTOMÀTICA (EI)

DISSENY DE SISTEMES DE CONTROL

• OBJECTIU

Els objectius de la pràctica són:

- Obtenir el model d'un sistema a partir de característiques de la seva resposta

temporal

- Obtenir un controlador de tipus K per a un sistema de forma que la resposta

temporal del sistema controlat obeeixi uns paràmetres determinats

- Veure que no és assolible qualsevol conjunt d'aquest paràmetres

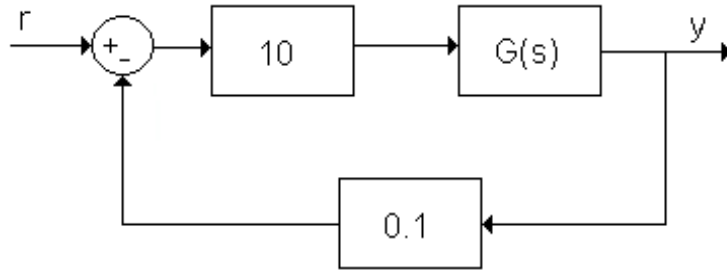
• INTRODUCCIÓ TEÒRICA

Donat un sistema de segon ordre qualsevol, si es té el seu model podem saber algunes de les característiques de la seva resposta a un esglaió. De la mateixa forma, si coneixem aquestes característiques, podem obtenir el model del sistema.

Des del punt de vista de servosistema, ens interessa que un controlador posat sobre un sistema faci que aquest segueixi la consigna mantenint uns paràmetres de precisió, velocitat, estabilitat, etc. A més, ens interessa que aquests paràmetres es mantinguin davant de perturbacions, variacions de càrrega, etc. Aquest és el punt de vista del regulador.

• ESTUDI PREVI

• MODEL DEL SISTEMA



Un sistema $G(s)$ desconegut es controla actualment de la forma indicada a la figura I. Sabem que davant un esglaió unitari $u(t) = u_s(t)$, la sortida del sistema controlat, que estava estabilitzada a 0, comença a augmentar, passa de 10 al cap de 0.55 s, arriba a un màxim de 12 i finalment s'estabilitza a 10. Suposant que la funció Y/R ($n=0$) és de segon ordre (pendent inicial de 0°), es demana:

- Trobar aquesta funció de transferència
- Trobar la funció de transferència en llaç obert

Sabem que un sistema genèric de 2on ordre té la següent funció de transferència:

$$M(s) = \frac{k \cdot n^2}{s^2 + 2 \zeta n s + n^2}$$

$$s^2 + 2 \zeta n s + n^2$$

M'estàn demanant un sistema que tingui un sobrepic de 20% i d'un temps de retard (aproximadament) de 0.55s, aplicant les fórmules podem treure ,

Sobrepic

$$SP = 100e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$1.6094 = 3.1416 / \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{elevant al quadrat} \quad 2.59 = 9.87 / 1 - \zeta^2$$

$$(9.87 + 2.59 \zeta^2) = 2.59 \quad \zeta^2 = (2.59/12.46) \quad \zeta = 0.456$$

Temps de retard

$$Tr = \frac{1 - 0.4167 + 2.917 \zeta}{n^2} = \frac{1 - 0.4167 \cdot 0.456 + 2.917 \cdot 0.456^2}{n^2} = \frac{1.4165}{n^2}$$

$$n^2 = 1.4165 / 0.55$$

$$0.55 = \frac{1.4165}{n^2} \quad n = 2.575$$

$$n = 2.575$$

l'equació del sistema en llaç tancat és:

$$s^2 + 2 \zeta n s + n^2 = s^2 + 2 \cdot 0.456 \cdot 2.575 s + 2.575^2 = s^2 + 2.348 s + 6.63$$

és $G/(s^2 + 2.348s + 6.63)$ si el guany és 10 $G = 66.3$

Per calcular el llaç obert cal fer la següent operació

$M(S) = K \cdot G(S) / 1 + K \cdot G(S)H(S)$ on $K = 10$; $H(S) = 0.1$

$M(S) = \frac{10G(S)}{1 + G(S)}$ $M(S) + M(S)G(S) = 10G(S)$ $G(S) = \frac{M(S)}{1 + G(S)}$

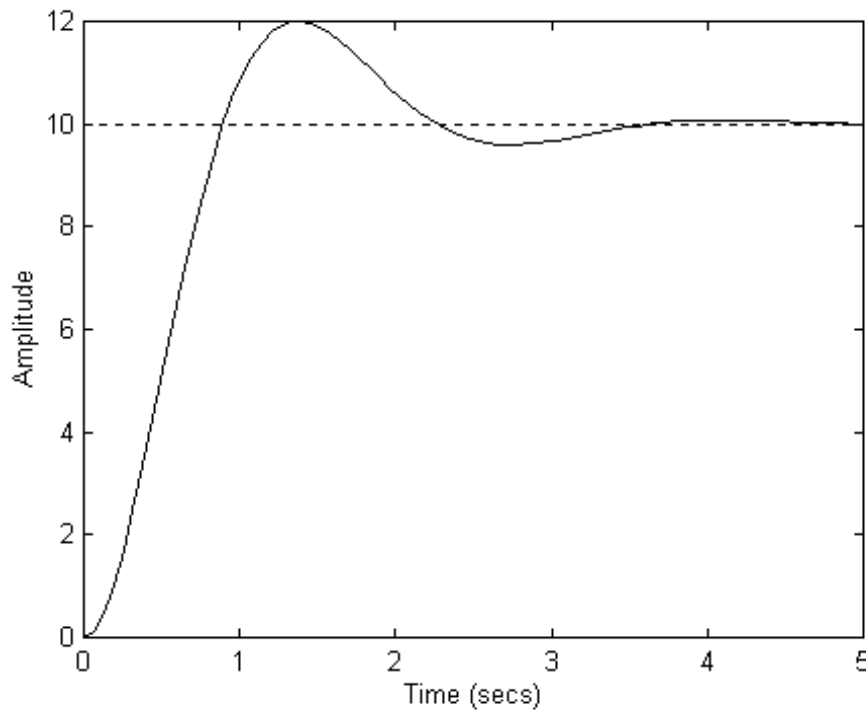
$1 + G(S)$ $10 - M(S)$

$G(S) = \frac{66.3/(s^2 + 2.348s + 6.63)}{10 - 66.3/(s^2 + 2.348s + 6.63)} = \frac{6.63}{s^2 + 2.348s + 6.63}$

$10 - 66.3/(s^2 + 2.348s + 6.63)$ $s^2 + 2.348s$

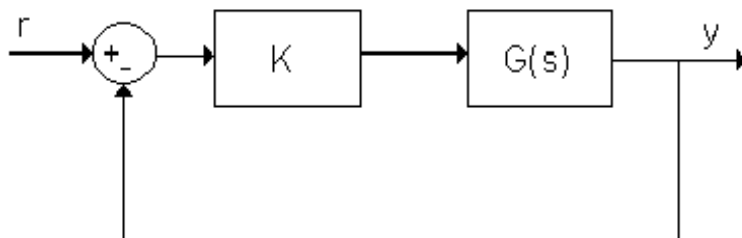
Aquí hem obtingut la funció de transferència del llaç obert.

Per demostrar que la funció $M(S)$ es bona, aquí es dona la seva gràfica.



3.2.Disseny del sistema de control

Es proposa com a nova estructura de control la de la figura 2, en la que el controlador és únicament un guany K (controlador P)



3.2.1 Trieu el valor de K de forma que la resposta a un esglao unitari el sobrepic sigui menor o igual al 5%

$$SP = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$3 = 3.1416 / \sqrt{1-\zeta^2}$ elevat al quadrat $9 = 9.87 / 1-\zeta^2$

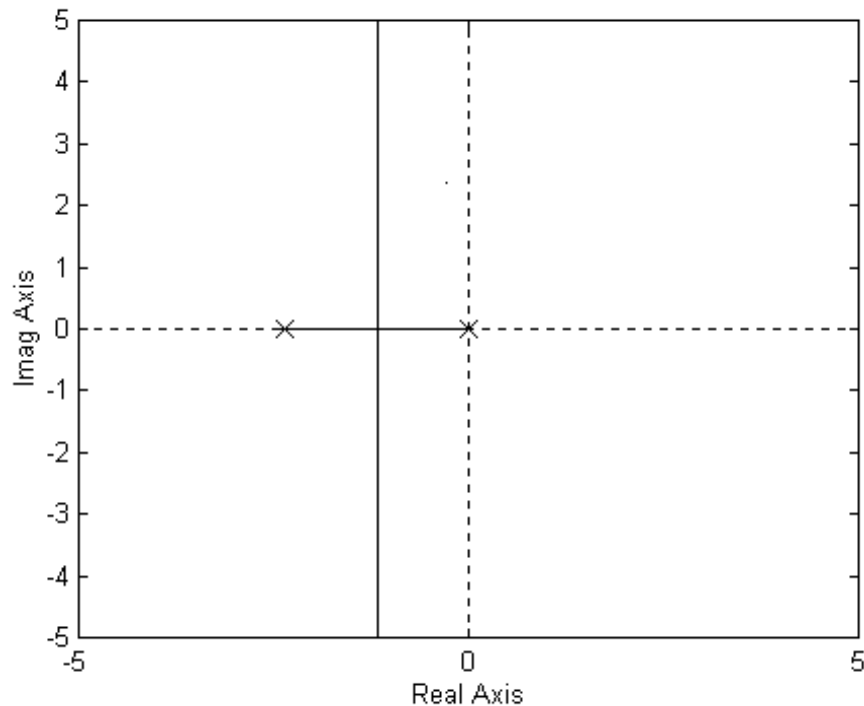
$$(9.87 + 9) = 9 = (9/18.87) 1/\zeta^2 = 0.691$$

evidentment, si volem ser mes barroers, podem agafar $\zeta = 0.707$ (4'3% sobrepic)

$$\zeta = \cos \phi = \arccos 0.691 = 46.29^\circ$$

$$\cotg \phi = \cotg 46.29 = 0.956$$

Ara es pot obtenir utilitzant la funció RLOCUS per intentar trobar la K que correspon a aquest angle:



Podem trobar la K necessària si examinem les matrius que ens dona la funció rlocus, a partir d'aquí podrem determinar la K.

Per fer hem de trobar les matrius R i K de la funció RLOCUS

$[R,K] = \text{rlocus}(\text{num},\text{den})$ d'aquí podem determinar el valor de K

per fer-ho hem obtingut la $\cotg \phi = 0.956 = \text{part real}/\text{part imaginària}$

Alguns dels resultats que obtenim són :

Arrels	K	Cotg
--------	---	------

$-1.1740 + 0.1522i - 1.1740 - 0.1522i$	0,2114	7,71
$-1.1740 + 0.2785i - 1.1740 - 0.2785i$	0,2196	4,22
$-1.1740 + 0.3662i - 1.1740 - 0.3662i$	0,2281	3,49
$-1.1740 + 0.4391i - 1.1740 - 0.4391i$	0,2370	2,67
$-1.1740 + 0.5038i - 1.1740 - 0.5038i$	0,2462	2,33
$-1.1740 + 0.5632i - 1.1740 - 0.5632i$	0,2557	2,08
$-1.1740 + 0.6189i - 1.1740 - 0.6189i$	0,2657	1,90
$-1.1740 + 0.6719i - 1.1740 - 0.6719i$	0,2760	1,70
$-1.1740 + 0.7228i - 1.1740 - 0.7228i$	0,2867	1,62
$-1.1740 + 0.7722i - 1.1740 - 0.7722i$	0,2978	1,52
$-1.1740 + 0.8203i - 1.1740 - 0.8203i$	0,3094	1,43
$-1.1740 + 0.8675i - 1.1740 - 0.8675i$	0,3214	1,35
$-1.1740 + 0.9139i - 1.1740 - 0.9139i$	0,3339	1,28
$-1.1740 + 0.9598i - 1.1740 - 0.9598i$	0,3468	1,22
$-1.1740 + 1.0052i - 1.1740 - 1.0052i$	0,3603	1,17
$-1.1740 + 1.0504i - 1.1740 - 1.0504i$	0,3743	1,12
$-1.1740 + 1.0953i - 1.1740 - 1.0953i$	0,3888	1,07
$-1.1740 + 1.1401i - 1.1740 - 1.1401i$	0,4039	1,03
$-1.1740 + 1.1848i - 1.1740 - 1.1848i$	0,4196	0,99
$-1.1740 + 1.2295i - 1.1740 - 1.2295i$	0,4359	0,97
$-1.1740 + 1.2743i - 1.1740 - 1.2743i$	0,4528	0,93
$-1.1740 + 1.3193i - 1.1740 - 1.3193i$	0,4704	0,90
$-1.1740 + 1.3644i - 1.1740 - 1.3644i$	0,4887	0,87
$-1.1740 + 1.3985i - 1.1740 - 1.3985i$	0,5029	0,83
$-1.1740 + 1.4967i - 1.1740 - 1.4967i$	0,5458	0,78
$-1.1740 + 1.7602i - 1.1740 - 1.7602i$	0,6752	0,67
$-1.1740 + 2.3850i - 1.1740 - 2.3850i$	1,0658	0,49
$-1.1740 + 3.6750i - 1.1740 - 3.6750i$	2,2449	0,32
$-1.1740 + 6.0910i - 1.1740 - 6.0910i$	5,8037	0,19

Mirant la taula determinem que:

$$K = 0'436$$

llavors la funció $G(S)$ ens queda: $\underline{6'63K = 3.05}$

$$s^2 + 2.384s + 6'63K \quad s^2 + 2.384s + 3.05$$

Les arrels d'aquest sistema són:

$$-1.1920 + 1.2764i$$

$$-1.1920 - 1.2764i$$

3.2.2. Trieu el valor de K de forma que es compleixi l'especificació de sobrepic de l'apartat 3.2.1. i que el temps d'estabilització dins una banda del 2% al voltant del valor d'equilibri sigui menor o igual que

2.15s

segons l'equació del temps d'assentament a una banda del 2%:

$t_s = -\frac{1}{n} \ln(0.02 * (1 - \zeta)^{1/2})$ sabem que $t_s = 2.15s$, llavors aïllem n

$$n = -\frac{1}{2.15} \ln(0.02 * (1 - 0.6912)^{1/2}) = -0.643 * \ln(0.02 * 0.723) = 2.72 \text{ rad/s}$$

$$0.691 * t_s$$

$$= n * (1 - 0.6912)^{1/2} = 2.72 * 0.723 = 1.97i \text{ (de part imaginària)}$$

Per lo de l'esmoreïment, la K ha d'ésser més petita que 0.449, que és el valor màxim, per sobrepics més petits l'esmoreïment ha d'ésser més gran i la K més petita.

Però, per pulsacions, quan més gran és la pulsació del sistema més petit és el temps d'establiment, per un temps d'establiment de 2.15s tenim una pulsació, de 2.72 rad/s

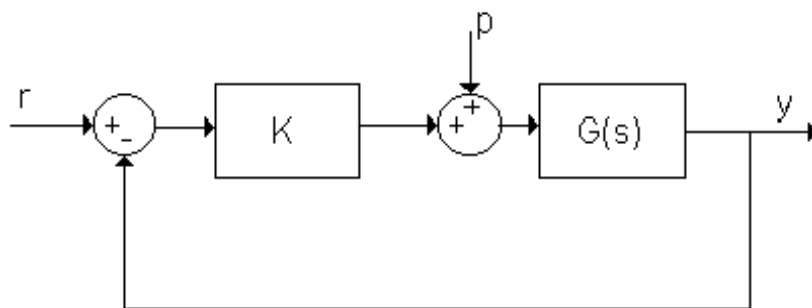
$-1.1740 + 1.7602i - 1.1740 - 1.7602i$	0,6752
$-1.1740 + 2.3850i - 1.1740 - 2.3850i$	1,0658

Interpolant obtenim una $K = 0.675 + (1.97 - 1.76) * (1.066 - 0.675) \geq 0.806$

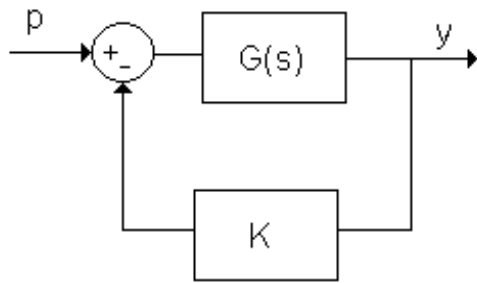
$$2.39 - 1.76$$

Per tant, no és assolible el que ens proposem

3.2.3. La figura 3 incorpora un determinat tipus de pertorbació al sistema. Trobeu la funció de transferència Y/P quan no tenim en consideració l'entrada del sistema u. Aquesta funció de transferència ens representa la resposta del sistema a les pertorbacions. És el punt de vista del regulador.



Mirant el sistema per una entrada $r=0$, tenim el següent:



$$Y/P = G(S) = \underline{6.63}$$

$$1 + KG(S) = s^2 + 2.348s + 6.63K$$

4. REALITZACIÓ DE LA PRÀCTICA

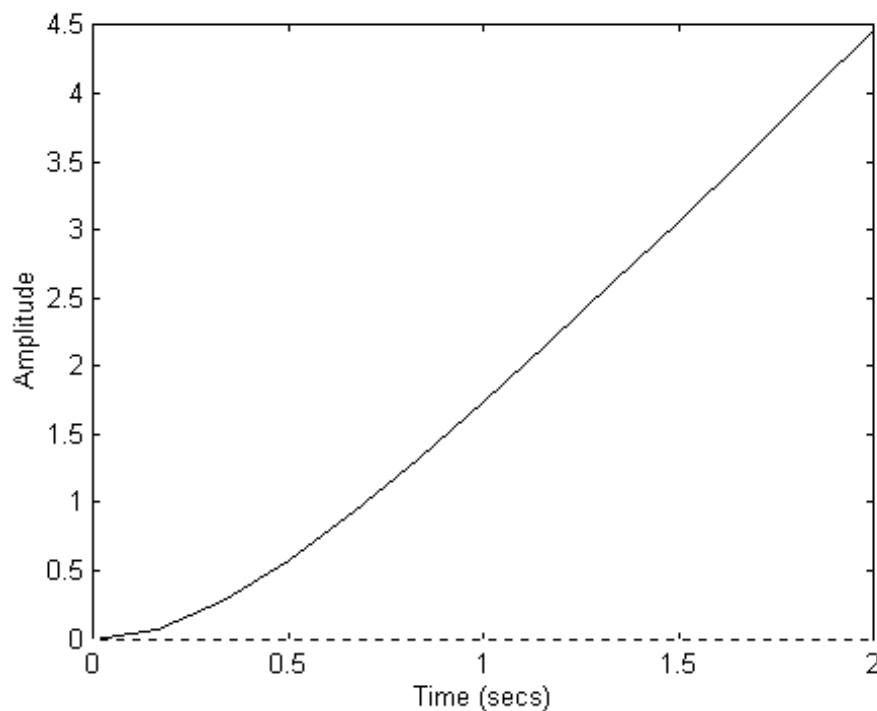
4.2. Estudi del sistema sense controlar

Observeu la resposta de $G(s)$ en anell obert a l'aplicar-li un esglaió i al aplicar-li un impuls.

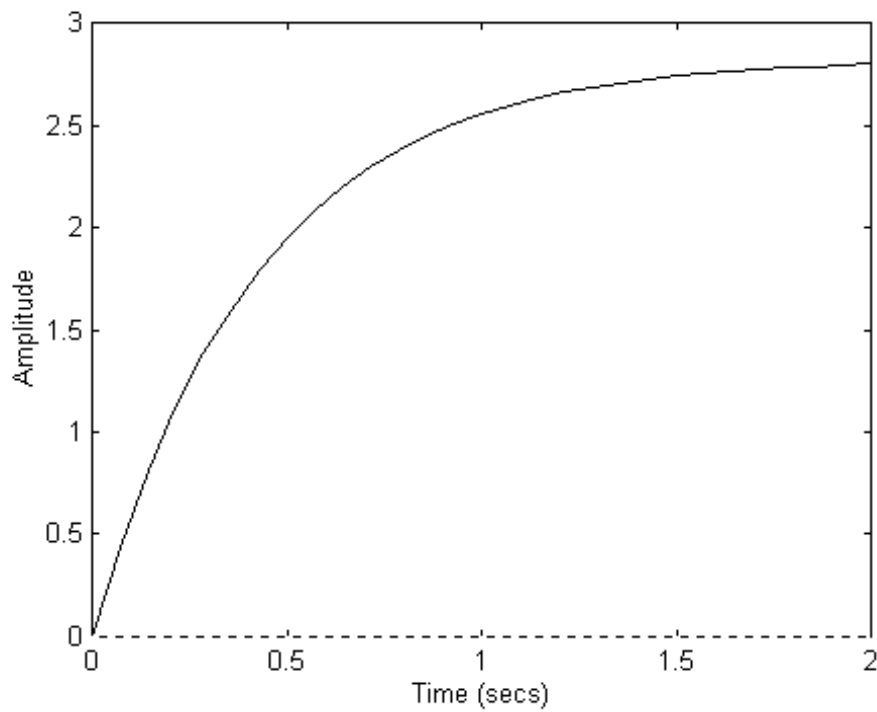
Tenim que $G(s)$ en anell obert és $\underline{6.63}$

$$s^2 + 2.348s$$

Al aplicar-li un esglaió obtenim la següent resposta:



I al aplicar-li un impuls unitari obtenim la següent resposta:



4.3. Estudi de l'estabilitat

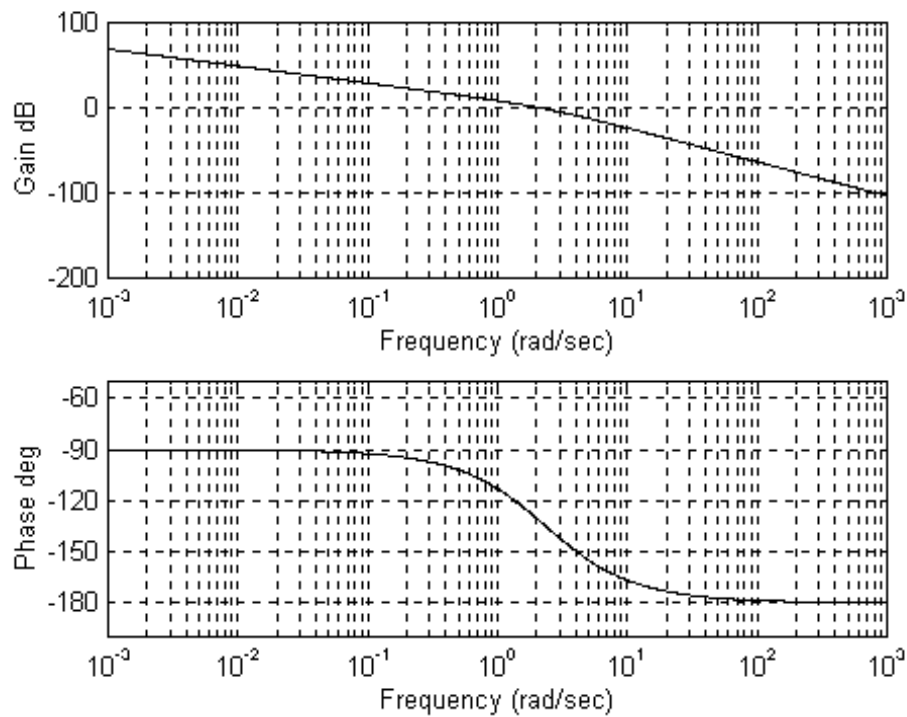
Estudieu l'estabilitat del sistema, utilitzant els diagrames de bode amb $g(s)$

A partir dels diagrames deduiu quin és el guany K a partir del qual el sistema realimentat es torna inestable.

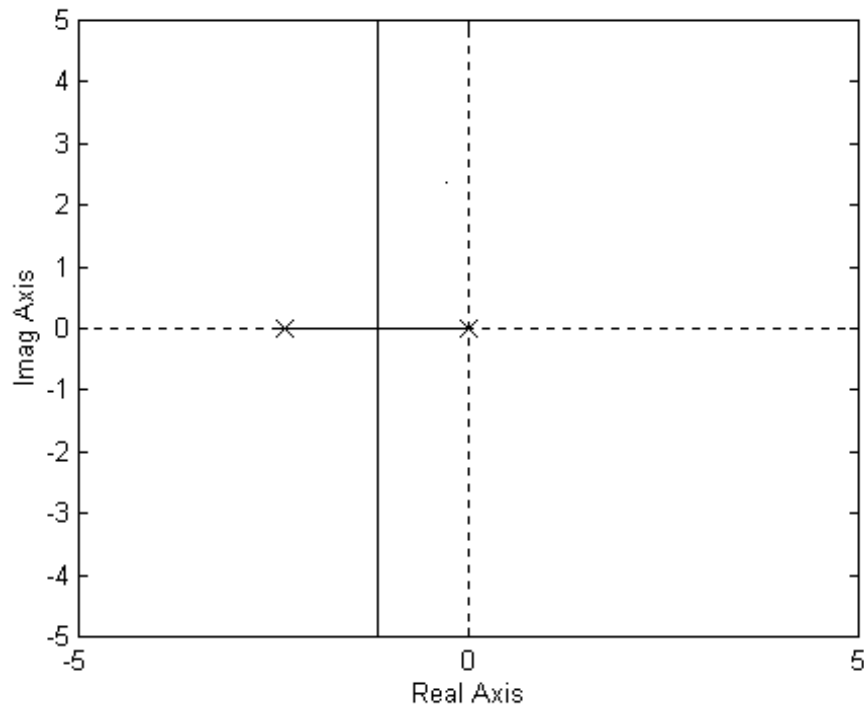
Tenim que $G(s)$ en anell tancat és 6.63K

$$s^2 + 2.348s + 6.63K$$

Trazant el diagrama de Bode d'aquest sistema tenim:



Representeu gràficament els pols i els zeros del sistema realimentat. Relacioneu la seva posició amb l'estabilitat.

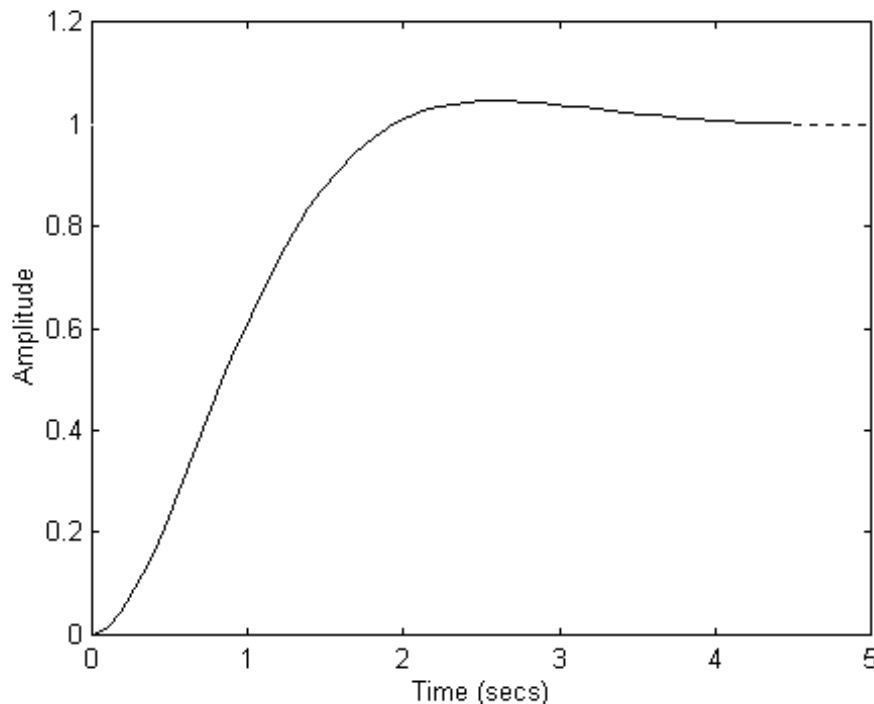


Aquí es pot veure que per K_s positives el sistema mai és inestable perquè les arrels sempre estan a la part real negativa.

4.4. ESTUDI DEL SISTEMA REALIMENTAT

4.4.1. Comproveu que controlant el sistema amb el guany que heu obtingut a l'apartat 3.2.1. es compleix l'especificació de control $SP \leq 5\%$

El guany que s'ha obtingut és $k = 0.436$, aplicant un glaó al sistema amb el guany especificat s'ha obtingut la següent resposta temporal:



El valor final és 1, i el sobrepic mirant el gràfic és 1.05 aproximadament, per tant es compleix l'especificació que ens han posat.

4.4.2. Comproveu que controlant el sistema amb el guany que heu obtingut a l'apartat 3.2.2. es compleixen les especificacions de control $SP \leq 5\%$ i $t \leq 2.15$ s, Si no es poden complir les 2 simultàniament, busqueu una solució de compromís. És a dir un guany K que faci que ens acostem el màxim possible a les especificacions de control encara que no arriben a assolir-les.

Segons lo de l'apartat 3.2.2., els resultats que tenim són:

Per complir $SP \leq 5\%$ $K < 0.449$

Per complir $t_s \leq 2.15$ s, $K > 0.806$ (aprox)

Veiem que no podem complir les 2 especificacions que ens hem proposat, el que hem de fer és intentar aconseguir les 2 quan més puguem.

Especificacions a aconseguir:

$$> 0.707; \quad n > 2.72 \quad > 1.923$$

Especificacions que podem obtenir:

$$> 0.707; \quad n < 2.72 \quad \text{Arrels } (-1.1920 + 1.2764i, -1.1920 - 1.2764i) \quad = 1.192$$

Podem intentar buscar el que s'acosti més a les nostres especificacions.

No posarem les arrels reals perquè ens apareixerien pols costats de 0 que serien dominants i molt més lents

La millor serà que tingui un esmorteïment el més pròxim al 5%, així la omega serà més gran. Posarem $\zeta=0.691$ (límit obtindrem més gran)

Per aconseguir-ho fem $\omega_n=1$, llavors obtenim $\omega_n=1.192/0.691 = 1.725 \text{ rad/s}$

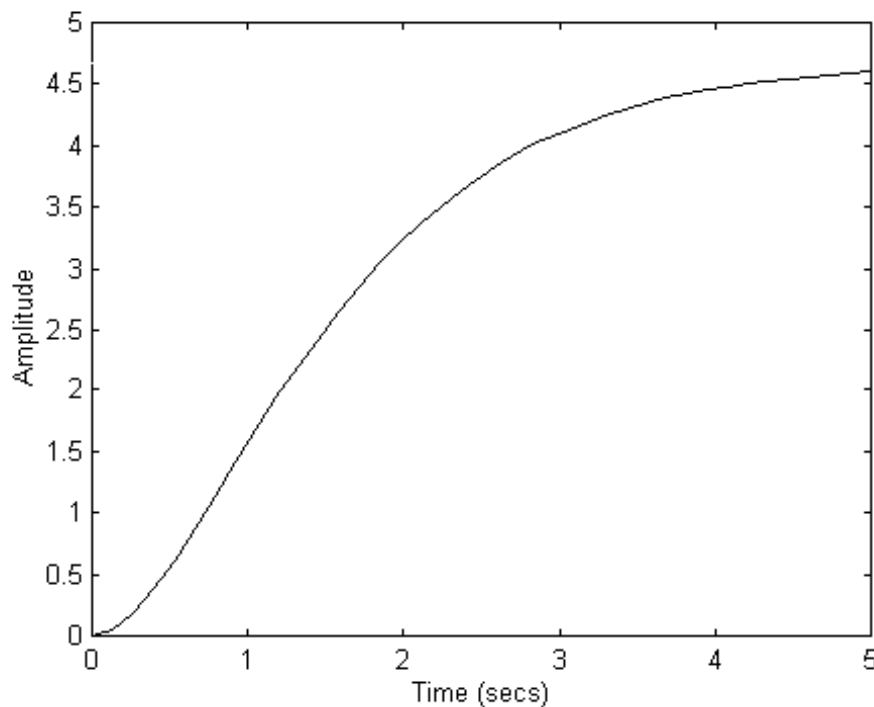
La K per aquesta funció és $1.725^2/6.63 = 0.4488$

4.4.3. Observeu la resposta de Y quan apliquem al sistema controlat una perturbació en forma d'esglaó unitari. Per fer-ho utilitzar la funció de transferència que heu obtingut a l'apartat 3.2.3. tenint en compte el valor de K que heu escollit a l'apartat 4.4.2. Fixeu-vos en el pic que ens apareix en aquesta resposta.

$$Y/P = G(S) = \frac{6.63}{s^2 + 2.348s + 6.63 \cdot 0.214}$$

$$1 + KG(S) = s^2 + 2.348s + 6.63 \cdot 0.214$$

La resposta d'aquest sistema a un esglaó unitari és la següent:



4.4.4. Escolliu un nou valor de K que ens faci que aquest pic sigui menor o igual a 2.25 i es segueixin complint tant com sigui possible les especificacions anteriors.

El sobrepic que ens apareix al 4.4.1 per $k = 0.436$ és una mica superior a 2.25, per intentar que es rebaixi a 2.25 hem de disminuir el valor de K ja que el valor final:

Vfinal de funció transfer perturbació = 6.63 fent el limit

6.63*K

El sobrepic es calcula amb la fórmula ja donada a l'apartat 3.2.1.

Cal relacionar el valor final amb el sobrepic

$$SP = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

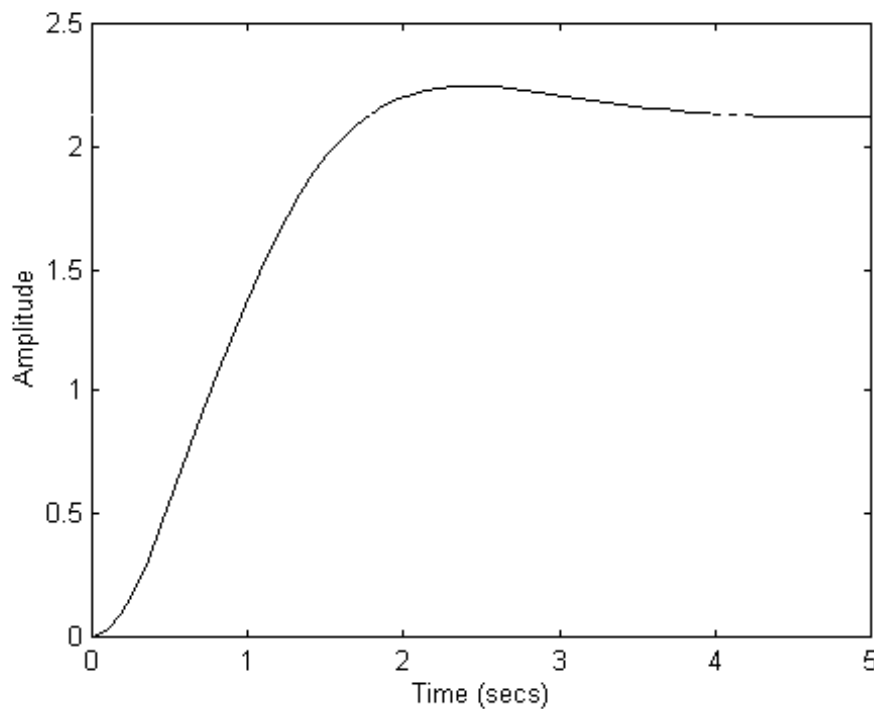
$1 + \frac{SP}{100} = 2.25$ aproximem dient que $SP=5\%$, llavors obtenim la següent equació:

$K = 100 * K$

$1 + \frac{0.05}{100} = 2.25$ Obtenim $K = 0.47$

$K = K$

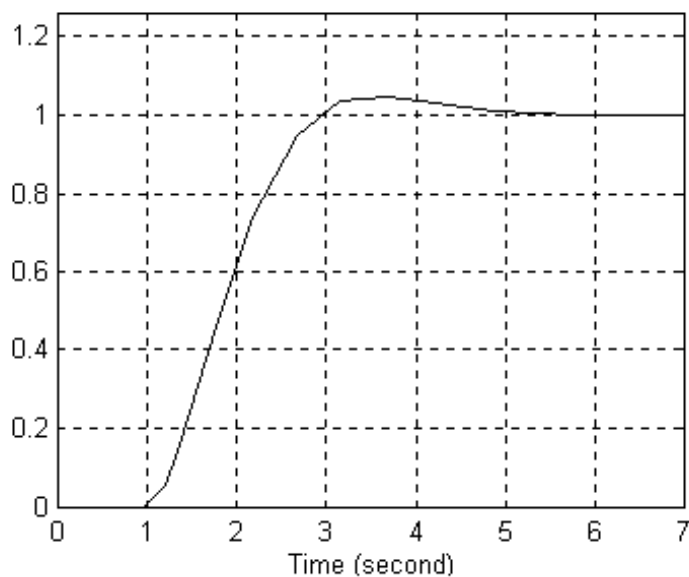
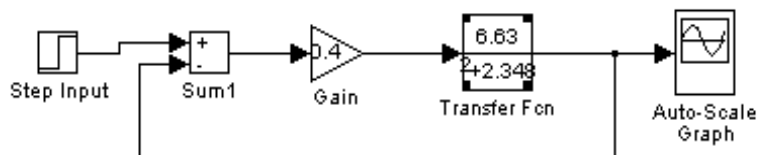
Per aquesta constant K obtenim amb la perturbació (entrada 0), aquesta resposta:



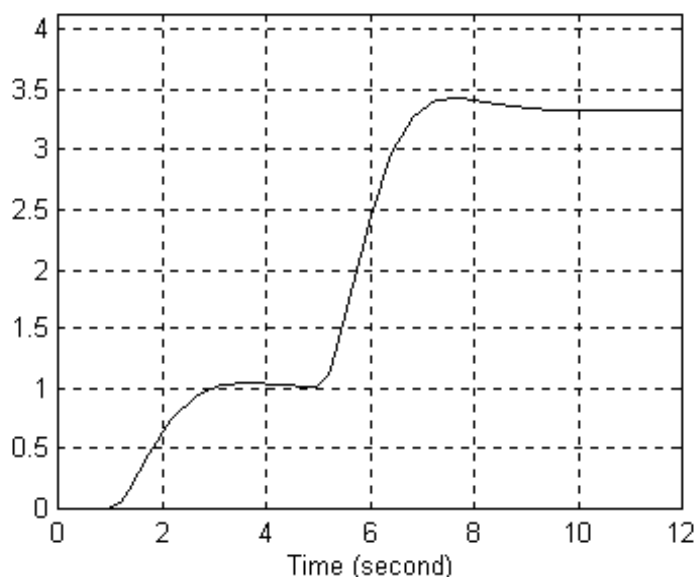
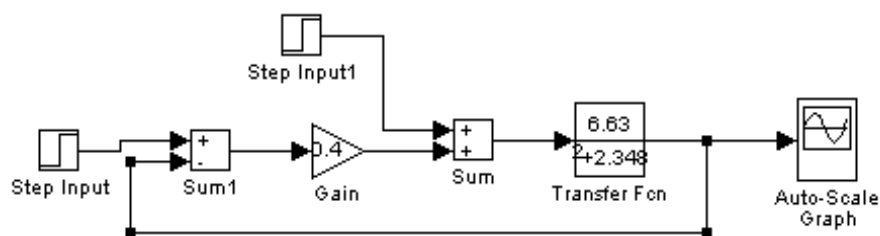
La resposta del sistema amb perturbacions = 0, ens donarà un sobrepic una mica més gran de 5% i un temps de retard més proper a 2.15s que abans. No podem aconseguir acostar-nos més a les especificacions.

4.4.5. Utilitzeu el simulink per veure la resposta del sistema de la figura 3 quan teneu un esglaió unitari de consigna per $t=1$ s i un esglaió de perturbació quan $t=5$ s

Sense perturbació:



Amb perturbació:



5.2.

Expliqueu en aquest informe per què a l'apartat 4.4.5. la resposta del sistema no es torna a estabilitzar a $y=1$ després de l'esglaó de pertorbació. Es tornaria a estabilitzar a $y=1$ si hi poséssim un controlador PI?

Això ens passa perquè a l'apartat 4.4.5. la pertorbació ens afecta el sistema i ens canvia el seu comportament.

Podem demostrar-ho aplicant el teorema de superposició:

$$Y/R = \underline{6.63K} \quad Y/N = \underline{6.63} \quad (\text{en llaç tencat})$$

$$s^2 + 2.384s + 6.63K \quad s^2 + 2.384s + 6.63K$$

la k que hem posat és 0.

Aplicant el valor final per esglaons

$$\lim_{s \rightarrow 0} Y/R = 1 \quad \lim_{s \rightarrow 0} Y/N = \underline{6.63} = \underline{1}$$

$$s \rightarrow 0 \quad s \rightarrow 0 \quad 6.63 \cdot K \quad K$$

Sumant:

$$V_{\text{final}} = 1 + 1/K = (K+1)/K \quad (\text{si } K=0.436) \quad 1.436/0.436 = 3.29$$

Per això la resposta no se'ns estabilitza a $y=1$

Un controlador PI (Proporcional Integratiu) el que ens fa és reduir-nos l'error del sistema (en el cas del nostre sistema, l'error que tenim en una rampa ens desapareixerà i el sistema podrà seguir-nos, però amb error, entrades de tipus parabòlic. Un controlador PI ens actua afegint un integrador i un zero La nova

Suposem que el zero no ens afecta, llavors amb un integrador la funció de transferència Y/N és

$$Y/P = \underline{G(S)} = \underline{6.63s}$$

$$1 + KG(S) \quad s^2 + 3.348s + 6.63K$$

El seu valor final per esglaons és

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \rightarrow 0 \quad Y/P = 0/6.63K = 0$$

La funció

$$Y/R = 6.63K \quad \text{El seu valor final és } 1 \quad (\text{abans calculat})$$

$$s^2 + 3.348s + 6.63K$$

Aplicant el teorema de Superposició, el valor final que obtenim és:

$$V_{\text{final}} = 0 + 1 = 1$$

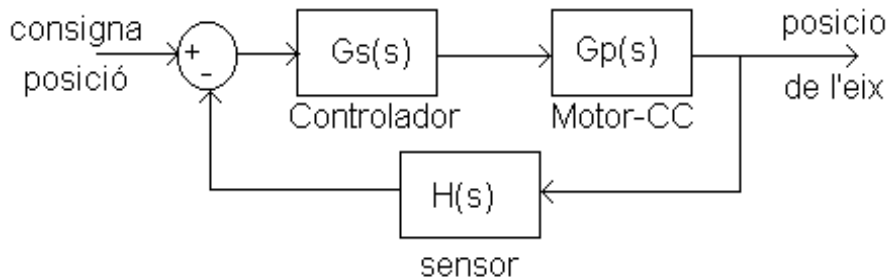
Per tant se'ns estabilitza el sistema a 1, amb el controlador PI hem aconseguit eliminar els efectes de la perturbació.

Disseny de Sistemes de Control fent servir

el Lloc d'Arrels

5.1. Anunciat del problema

En aquesta pràctica aprendrem a dissenyar controladors del tipus PI, PD i PID fent servir la tècnica del lloc d'arrels. El sistema que es desitja controlar és un motor de corrent continu del qual se li vol controlar la posició del seu eix. L'esquema del sistema de control seria el següent:



S'ha arribat a què el model d'un motor de corrent continu és el següent:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad H(s) = 1 \text{ (sensor)}$$

$$s(s^2 + 4s + 5)$$

Les especificacions de disseny que s'han fixat per la resposta temporal del sistema controlat són les següents:

- La resposta del sistema controlat ha de presentar una resposta amb un sobrepic inferior al 5%
- L'instant en què es produeix el sobrepic ha d'ésser igual a 2 s
- L'error estacionari davant d'una consigna rampa ha d'ésser inferior a 1

5.2. Relació entre el lloc d'arrels i la resposta temporal

El lloc d'arrels mostra l'evolució dels pols del sistema controlat en el pla complex en funció d'un paràmetre de la funció de transferència enllaç obert, normalment el guany de l controlador. Si a partir del lloc d'arrels arribem a determinar els pols dominants del sistema controlat podrem predir quina serà la seva resposta temporal.

Així, per exemple, si suposem que el sistema té 2 pols dominants:

$$s = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Llavors la seva resposta temporal davant d'una entrada graó unitari serà:

$$Y(t) = 1 - \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \arcsin(\zeta))$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Sobre la qual es defineixen les següents característiques

Temps de Pic: $T_p = \frac{1}{\omega_n}$

$$(1 - \frac{1}{2} \zeta)$$

Màxim Sobrepic: $SP = 100 \cdot \exp(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})$

$$(1 - \frac{1}{2} \zeta)$$

Temps establiment (2%) = $\frac{4}{\omega_n}$

5.3. Disseny de controladors P usant el lloc d'arrels

Determineu el guany d'un controlador P (guany)

$$G_p(s) = K_p$$

Que proporcioni al sistema una resposta temporal amb un sobrepic inferior al 5%

$$100 \cdot \exp(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}) \leq 5 \text{ solucionant s'obté } \zeta > 0.691$$

$$(1 - \frac{1}{2} \zeta)$$

Pel temps d'establiment $\omega_n = 4 / t_s = 2.83 \text{ rad/sec}$

Per facilitat agafem $\zeta = 0.707$ sabem que $\cos \theta = \zeta$

$$\theta = \arccos(0.707) = 45^\circ \quad \tan \theta = \frac{\text{part imaginària}}{\text{part real}}, \text{ per tant:}$$

$$\frac{\text{part real}}{\text{part imaginària}} = \cot \theta = \cot 45 = 1$$

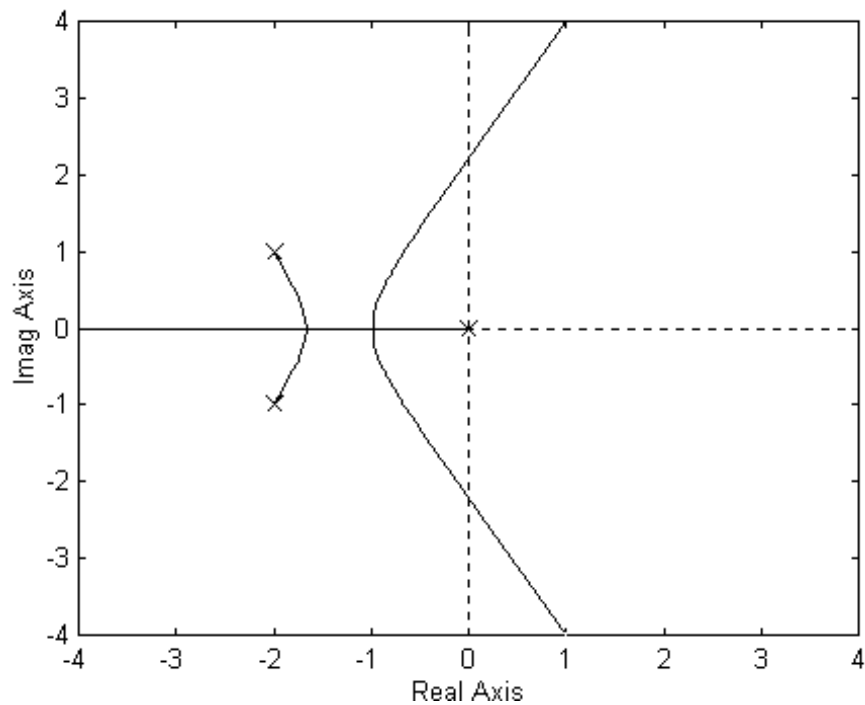
$$G_p(s) = K \quad H(s) = 1 \text{ (sensor)}$$

$$s(s^2 + 4s + 5)$$

Pel lloc d'arrels

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad G(s)H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

fem RLOCUS (num,den) i obtenim:



Hem d'agafar l'area on es compleixi que $\zeta > 0.691$ i obtenir una K

Mirant les matrius que ens dona la funció RLOCUS veiem que:

R1 R2 R3 K

-0.7833 + 0.7578i -0.7833 - 0.7578i -2.4334 2.8905

-0.7695 + 0.7876i -0.7695 - 0.7876i -2.4610 2.9840

A partir d'aquí obtenim $K_p = 2.97$ (aproximadament)

5.4. Disseny de controladors PI usant el lloc d'arrels

La funció de transferència d'un controlador PI és:

$$G_p(s) = K_p + K_i/s = K(s+a)/s$$

El procediment de disseny de controladors PI fent servir el lloc d'arrels consta dels següents passos:

- **Determinar el guany K_p del sistema només amb el controlador P**

El guany del controlador P s'ha trobar a l'apartat 5.3. i es $K_p = 2.97$

- **Determinar ζ i ω_n dels pols dominants del sistema sense controlar**

Això s'obté fent damp (den) obtenim ζ i ω_n

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

0 -1.0000 0

$$-2.0000 + 1.0000i \ 0.8944 \ 2.2361$$

$$-2.0000 - 1.0000i \ 0.8944 \ 2.2361$$

L'esmorteïment és 0.8944 i la freqüència són 2.236 rad/sec

• **Per un sistema tipus I, escollirem inicialment:**

$$K = K_p \ a = \underline{2} * \ n(1-8) \underline{1}$$

• 9

$$K = 2.97; \ a = 0.666 * 0.8944 * 2.236(1 - 0.888 * 0.89442) = 0.3852$$

Si fós de tipus 0 escolliríem $K = K_p \ a' = a * [(K_o + 1)/k_o]$

• **Examinar el lloc d'arrels en funció del paràmetre a. Determinar un valor de a que ens proporcionï la màxima estabilitat relativa, o sigui, un factor d'esmorteïment de 0.7 pels pols dominants del sistema realimentat**

El lloc d'arrels ens calcula:

NUM(s)

$$H(s) = 1 + k \text{ ----- } = 0 \text{ on } n(s)/d(s) = G_p(s)$$

DEN(s)

En el nostre cas hem de fer-ho variar amb el paràmetre a. Llavors:

$$H(S) = 1 + K * H(s)G(s) = 1 + \underline{K(s+a)} * \underline{1}$$

$$S \ s(s^2 + 4s + 5)$$

Si ens donem compte ho estem variant amb el paràmetre K, llavors ho hem de transformar perquè ens variï amb el paràmetre a

$$1 + \underline{KG_p(s)s} + \underline{KG_p(s)a} = 1 + KG_p(s) + kG_p(s)a = (\text{sabent que } K=2.97)$$

s s s

$$1 + 2.97G_p(s) + \underline{2.97G_p(s)a} = 1 + \underline{2.97aG_p(s)} = 1 + a * Ga(s)$$

$$s \ s(1 + 2.97G_p)$$

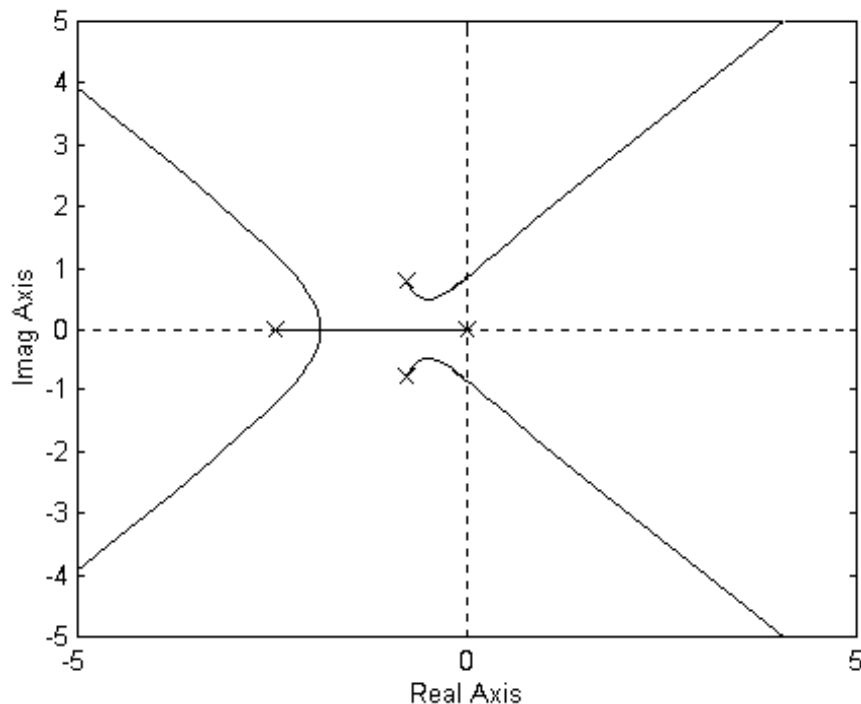
Calculant Ga(s):

$$Ga(s) = \underline{2.97} / (s^3 + 4s^2 + \underline{5s}) = 2.97$$

$$s(1 + 2.97/s^3 + 4s^2 + 5s) \ s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2.97s$$

A partir d'aquesta funció que s'ha obtingut es dibuixa el lloc de les arrels i es troba la K per la qual obtinguem

un esmorteïment de 0.7



Examinant els vectors que ens dona la funció rlocus podem determinar el paràmetre a del controlador PI, sabent que el seu esmorteïment ha d'ésser 0.7

Com hem determinat abans, la relació entre part real i imaginària ha d'esser d'1

R1 R2 R3 R4 K

-0.0059 -0.7696 + 0.7782i -0.7696 - 0.7782i -2.4549 0

-0.0183 -0.7655 + 0.7675i -0.7655 - 0.7675i -2.4507 0

Davant la impossibilitat de trobar la K d'aquesta manera s'ha utilitzat la funció RLOCFIND per aproximar més el valor de K , s'ha trobat el següent:

Punt seleccionat: $-0.6995 + 0.6908i$ (molt pròxim a 45°)

ans = 0.0076

o sigui, la nostra a ens val 0.0076

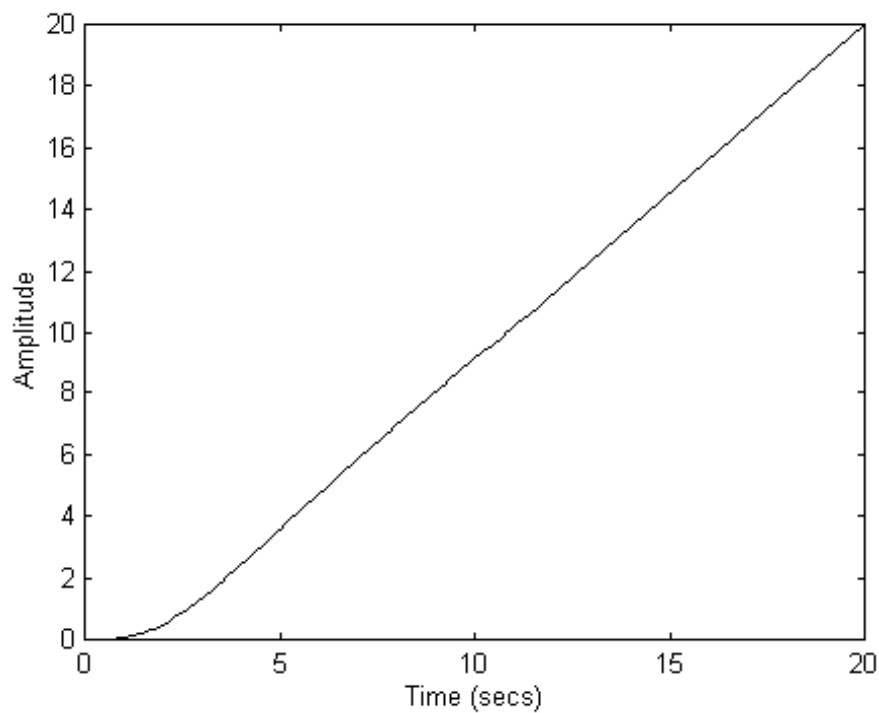
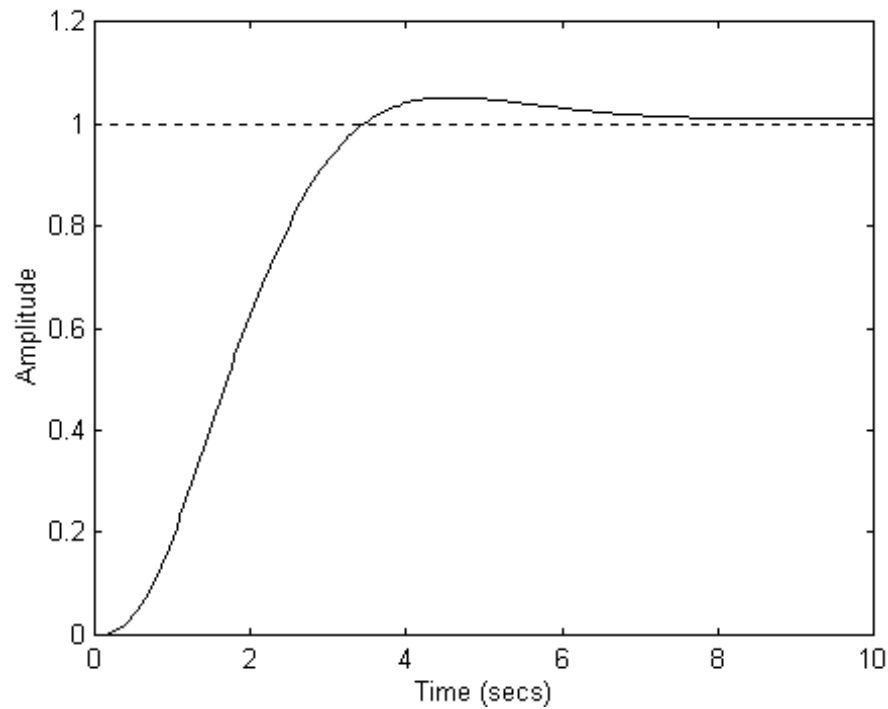
Per comprovar que és un valor adequat es dibuixa la resposta temporal del sistema amb el controlador PI a un esglaió i a una rampa

La nostra funció de transferència en llaç tancat és:

$$\frac{2.97(s+0.0076)}{s^4+4s^3+5s^2+2.97s+0.076 \cdot 2.97} = \frac{2.97s+0.0226}{s^4+4s^3+5s^2+2.97s+0.023}$$

$$s^4+4s^3+5s^2+2.97s+0.076 \cdot 2.97 \quad s^4+4s^3+5s^2+2.97s+0.023$$

I les respostes a un esglaió i una rampa són:



Com es pot veure, el sistema ens compleix 2 requeriments: no té error per una rampa i l'esmoreïment és $<5\%$, però el temps de pic és >1 sec. Els PI van molt bé per disminuir l'error dels sistemes (incrementar el tipus del sistemes) però com a contrapartida ens alenteixen els sistemes, aquests tenen un temps d'establiment major.

5.5. Disseny de controladors PD usant el lloc d'arrels

La funció de transferència d'un controlador PD és:

$$G_p(s) = K_p + K_d s = K(1 + A s)$$

El procediment de disseny de controladors PD fent servir el lloc d'arrels consta dels següents passos:

- **Determinar el guany K_p del sistema només amb el controlador P que proporciona màxima estabilitat relativa, o sigui, un factor d'esmoreïment = 0.7 pels pols dominants del sistema realimentat.**

Aquest valor de K_p ja ha estat calculat a l'apartat 5.3 i és: $K_p = 2.97$

- **Determinar el factor d'esmoreïment i la freqüència natural del sistema sense controlar**

Això s'obté fent damp (den) obtenim i n

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

$$0 - 1.0000 \ 0$$

$$-2.0000 + 1.0000i \ 0.8944 \ 2.2361$$

$$-2.0000 - 1.0000i \ 0.8944 \ 2.2361$$

L'esmoreïment és 0.8944 i la freqüència són 2.236 rad/sec

- **Escollir $K/K_p > 1$ fins a aconseguir un error estacionari raonable (menor que 0.1 davant d'un graó si el sistema sense controlar es de tipus 0, o bé, davant una rampa si el sistema sense controlar és de tipus 1**

L'error en estat estacionari per una rampa en el sistema amb controlador PD és:

$$G(s) = \frac{K_p + K_d s}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

$$s(s^2 + 4s + 5)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (K_p + K_d s) = K_p$$

$$s \rightarrow 0 \quad s(s^2 + 4s + 5) \quad 5$$

Ess = $1/K_v = 5/K_p$ en el problema ens diu que l'error ha de ser menor que 1: aixins:

Tenim que $K_p = 5$, aquesta es la K que hauríem de posar perquè el sistema ens donés un error menor de 1.

- **Examinar el lloc d'arrels en funció del paràmetre A. Determinar el valor de A que ens proporcioni la màxima estabilitat relativa, o sigui, un factor d'esmoreïment de 0.7 pels pols dominants del sistema realimentat.**

El lloc d'arrels ens calcula:

$$NUM(s)$$

$$H(s) = 1 + k \frac{n(s)}{d(s)} = 0 \text{ on } n(s)/d(s) = G_p(s)$$

DEN(s)

En el nostre càs hem de fer-ho variar amb el paràmetre A. Llavors:

$$H(S) = 1 + K \cdot H(s)G(s) = 1 + K(1+As) \cdot \frac{1}{s(s^2+4s+5)}$$

Si ens donem compte ho estem variant amb el paràmetre K, llavors ho hem de transformar perquè ens variï amb el paràmetre a

$$1 + KG_p(s) + KG_p(s)As = 1 + KG_p(s) + kAsG_p(s) = (\text{sabent que } K=2.97)$$

$$1 + 2.97G_p(s) + 2.97G_p(s)As = 1 + \underline{2.97AG_p(s)s} = 1 + A \cdot Ga(s)$$

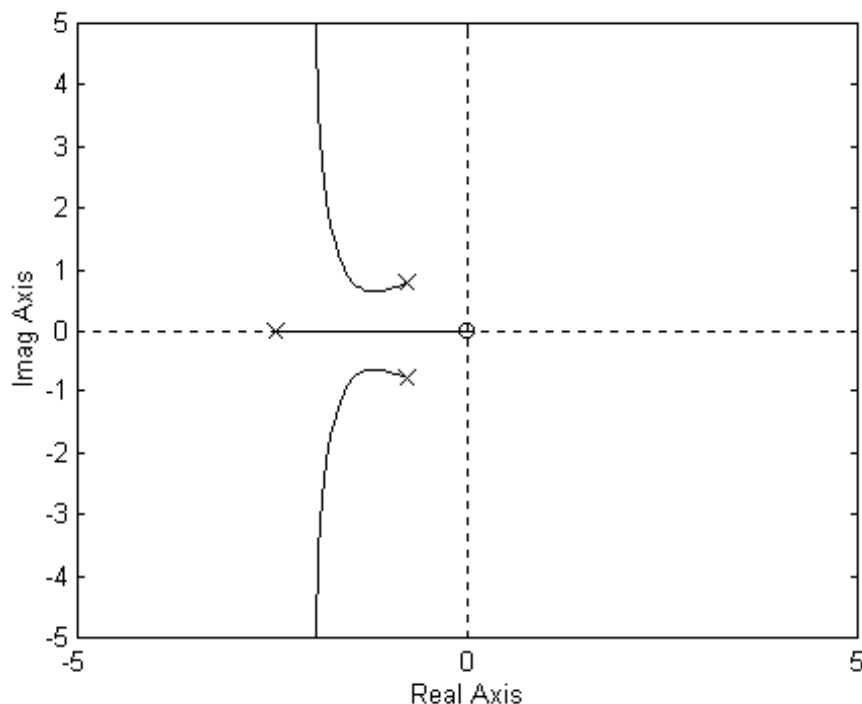
$$(1 + 2.97G_p)$$

Calculant $G_a(s)$:

$$G_a(s) = \frac{2.97s \cdot (s^3 + 4s^2 + 2.97s)}{(1 + 2.97/s^3 + 4s^2 + 2.97s)} = \underline{2.97s}$$

$$(1 + 2.97/s^3 + 4s^2 + 2.97s) \quad s^3 + 4s^2 + 5s + 2.97$$

A partir d'aquesta funció que s'ha obtingut es dibuixa el lloc de les arrels i es troba la A per la qual obtinguem un esmorteïment de 0.7



Examinant els vectors que ens dona la funció rlocus podem determinar el paràmetre a del controlador PI, sabent que el seu esmorteïment ha d'ésser 0.7 aprox

Com hem determinat abans, la relació entre part real i imaginària ha d'esser de 0.95

R1 R2 R3 A

$-0.6124 -1.6938 + 1.4074i \quad -1.6938 - 1.4074i \quad 0.6479$

$-0.5005 -1.7498 + 1.6950i \quad -1.7498 - 1.6950i \quad 0.9044$

La A aproximadament, interpolant ens ha de valdre

Llavors s'agafa $A = 0.875$

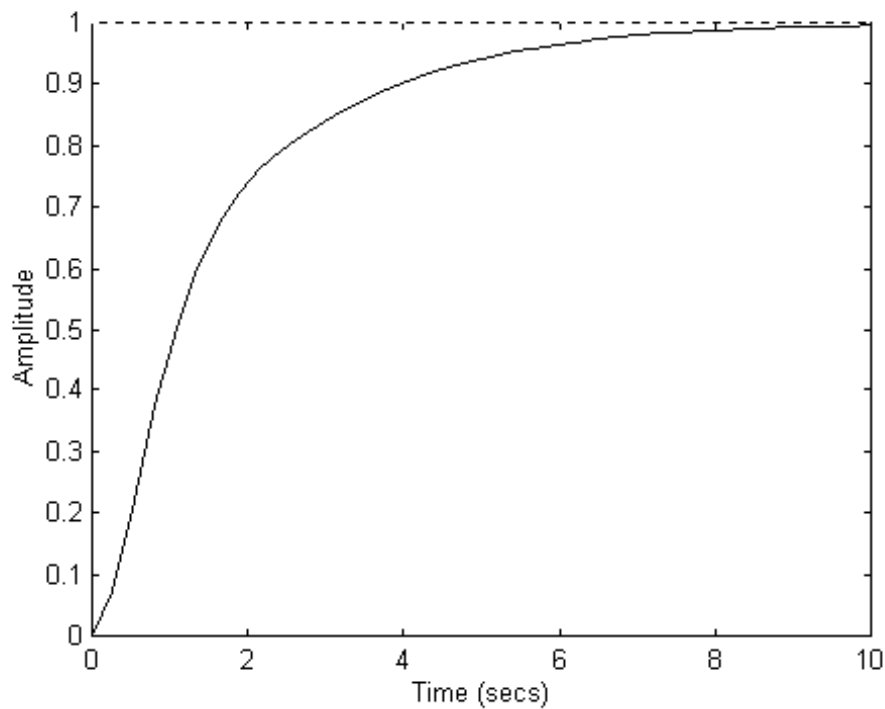
Un cop determinada la A, amb la K que s'ha aconseguit abans el controlador és:

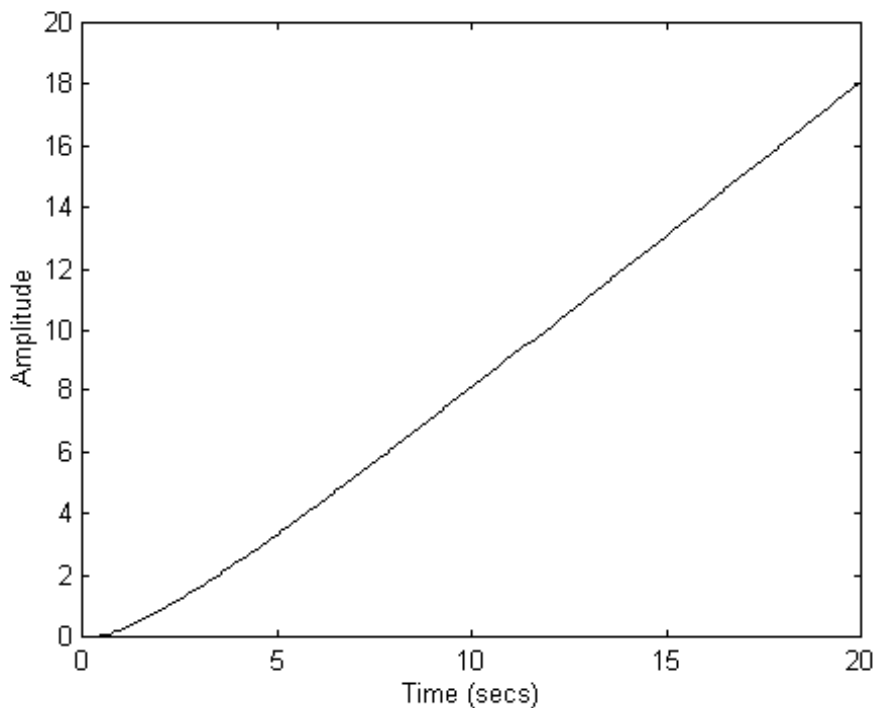
$$K(1+As) = 5(1+5 \cdot 0.875s) = 2.97 + 2.6s$$

La funció de transferència del sistema en llaç obert ens queda:

$\frac{5 + 2.31s}{s^3 + 4s^2 + 5s}$ en llaç tancat: $\frac{2.97 + 2.6s}{s^3 + 4s^2 + 7.6s + 2.6}$

Examinant el sistema per un graó i una rampa amb el controlador PD:





Com es pot veure estem complint només 1 especificació: la de que el sobrepic no sigui superior al 5%. Això és degut a què el pol real ens afecta molt al sistema perquè es molt proper al 0. Tot hi això si miren les arrels del polinomi característic:

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

-0.5104 1.0000 0.5104

-1.7448 + 1.6657i 0.7233 2.4122

-1.7448 - 1.6657i 0.7233 2.4122

Veiem que sense el pol real compliríem 2 especificacions **DISSENY DE CONTROLADORS PID USANT EL LLOC D'ARRELS**

La funció de transferència d'un controlador PID (Proporcionar integrador-derivador) és:

$$G_c(s) = K_p + K_d s + K_i/s = K(s+a)/s + K_a s$$

El procediment de disseny de controladors PID fent servir el lloc d'arrels consta dels següents passos:

- **Ajust del controlador PI amb $A=0$**
- **Determinar el guany K_p del sistema només amb el controlador P que proporioni un de 0.7 pels pols dominants del sistema realimentat.**

Ja ha estat calculat a l'apartat 5.3 i és de: $K_p = 2.97$

- **Determinar ζ i n dels pols dominants del sistema sense controlar**

Això ha estat determinat a l'apartat 5.4 i els valors són:

$$= 0.8944$$

$$n = 2.236 \text{ rad/sec}$$

- **Per un sistema tipus I, escollirem inicialment:**

$$K = K_p a = 2 * n(1-8)$$

- 9

Ha estat determinat a l'apartat 5.4 i el valor de a és:

$$a = 0.3852$$

Si fós de tipus 0 escolliríem $K = K_p a' = a'[(K_o+1)/k_o]$

- **Examinar el lloc d'arrels en funció del paràmetre a. Determinar un valor de a que ens proporcioni la màxima estabilitat relativa, o sigui, un factor d'esmoreïment de 0.7 pels pols dominants del sistema realimentat**

Això ja ha estat determinar a l'apartat 5.4 i la funció de transferència del controlador PI ens ha donat que era la següent:

$$G_{PI} = \underline{2.97(s+0.0076)}$$

s

Ajust del controlador PD amb a=0

- **Escollir $K/K_p > 1$ fins a aconseguir un error estacionari raonable**

Això ja ha estat determinat a l'apartat 5.5 i la K_p ha resultat ésser ≥ 5

- **Examinar el lloc d'arrels segons el paràmetre A. Determinar un valor de A que ens proporcioni un $\zeta = 0.7$ pels pols dominants del sistema realimentat**

Això ha estat calcular a l'apartat 5.5 i els valors són:

$$A = 0.875$$

$$G_{PD} = 2.97(0.875s+1)$$

- **Ajust final del controlador PID**

La funció de transferència del PID segons els valors de A, a i K que hem obtingut és:

$$G_c = \underline{K_i} + K_p + K_d s = 0.0226/s + 2.97 + 2.6s$$

S

La funció de transferència del sistema en llaç obert és:

$$\underline{2.6s^2 + 5s + 0.0226}$$

$$s^2(s^2+4s+5)$$

Hem mirat les arrels del sistema i ens ha donat el següent:

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

-0.0078 1.0000 0.0078

-0.5000 1.0000 0.5000

-1.7461 + 1.6655i 0.7236 2.4131

-1.7461 - 1.6655i 0.7236 2.4131

Com que els 2 pols són molt pròxims al 0 ens alenteixen molt el sistema i el controlador no ens compleix totes les especificacions.

Com que el sistema no tenia les prestacions desitjades s'ha anat variant els valors de K i A fins a aconseguir que es complissin les prestacions del sistema controlat

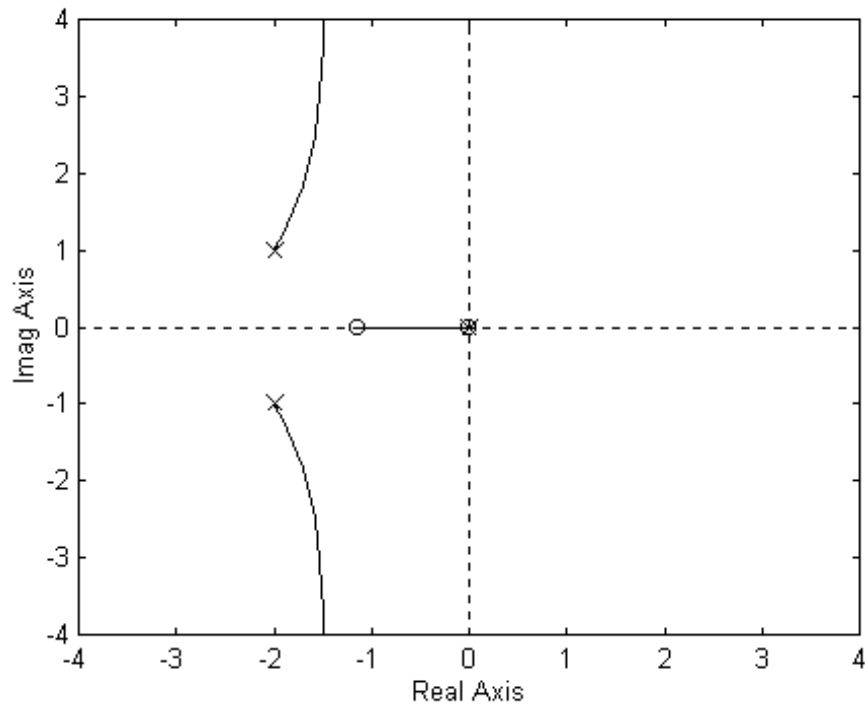
Hauriem de trobar algun controlador que ens anulés l'efecte d'aquests pols reals.

A partir d'aquí hem construït el lloc d'arrels; Pensant que si tenim una freqüència natural mes alta podem cancel·lar l'efecte dels pols reals i que el sistema ens compleixi totes les especificacions.

Damping < 0.7

Kv > 1

Freqüència natural > 2.828



Agafant un punt de freqüència mes alta obtenim:

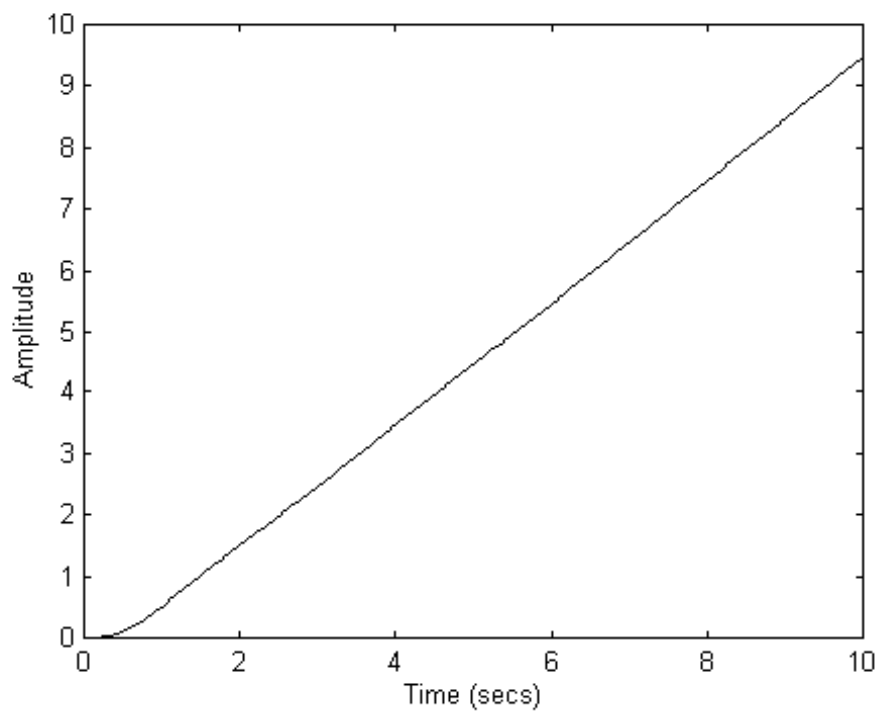
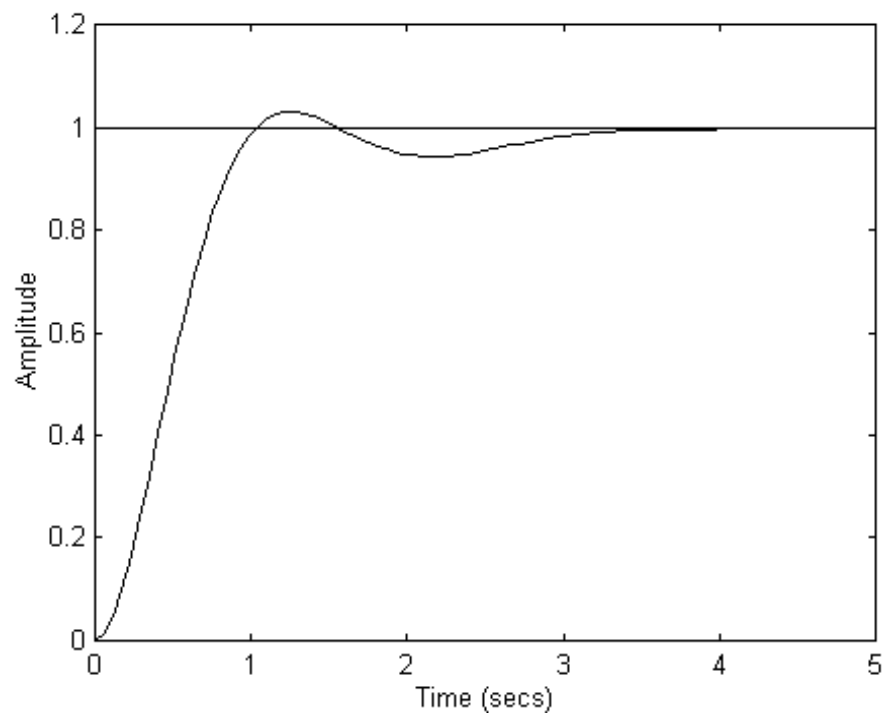
Hem agafat un punt que ens fes que la $K > 5$ (per complir l'error)

Multiplicant tot pel factor 3 obtenim la següent funció transferència:

$$G_p(s) = \frac{7.8s^2 + 8.91s + 0.0678}{s^4 + 4s^3 + 12.8s^2 + 8.91s + 0.0678}$$

$$s^4 + 4s^3 + 12.8s^2 + 8.91s + 0.0678$$

Les gràfiques de la resposta temporal per un esglaió i una rampa són:



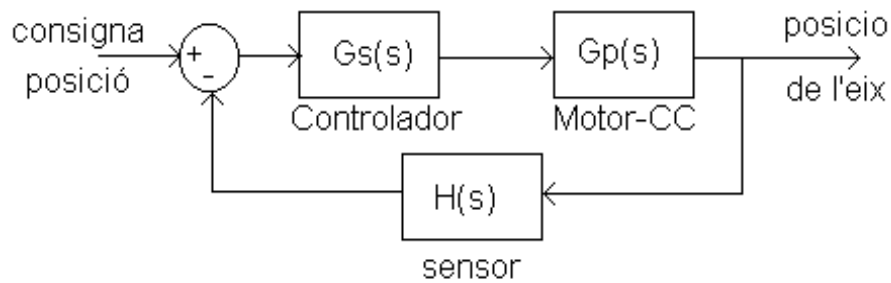
Així que el sistema ens compleix les 3 especificacions que li demanàvem.

Disseny de Sistemes de Control fent servir

Els diagrames de Bode

6.1. Anunciat del problema

En aquesta pràctica aprendrem a dissenyar controladors del tipus PI, PD i PID fent servir la tècnica dels diagrames de Bode. El sistema que es desitja controlar és un motor de corrent continu del qual se li vol controlar la posició del seu eix. L'esquema del sistema de control seria el següent:



S'ha arribat a què el model d'un motor de corrent continu és el següent:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad H(s) = 1 \text{ (sensor)}$$

$$s(s^2 + 4s + 5)$$

Les especificacions de disseny que s'han fixat per la resposta temporal del sistema controlat són les següent:

- La resposta del sistema controlat ha de presentar una resposta amb un sobrepic inferior al 5%
- L'instant en què es produeix el sobrepic ha d'ésser igual a 2 s
- L'error estacionari davant d'una consigna rampa ha d'esser inferior a 1

De la pràctica anterior havíem deduït que:

Per complir aquests 3 requisits els valors que hem de complir són:

$$\zeta > 2.828 \text{ (complir que } t_s < 2 \text{ sec)}$$

$$\zeta > 0.691 \text{ (complir que el SP} < 5\%)$$

$$K_v > 1 \text{ (per complir l'error en estat estacionari d'una rampa)}$$

6.2. Relació entre les especificacions temporals i freqüencials

A partir del diagrama de Bode del sistema a controlar es pot predir en molts casos la resposta temporal del sistema realimentat (pel cas de realimentació unitària). Així es pot demostrar que per un sistema controlat amb dos pols dominants:

$$s = -\zeta \omega_n \pm j(1 - \zeta^2)^{1/2} \omega_n$$

La freqüència de tall obtinguda a partir del diagrama de Bode del sistema sense controlar és aproximadament igual a la freqüència natural del sistema controlat:

Per altra banda, a partir del marge de fase obtingut a partir del diagrama de Bode del sistema sense controlar es pot predir quin serà el valor del factor d'esmoreïment del sistema controlat:

$$\zeta = 0.01 * MF$$

6.3. Disseny de controladors P fent servir el diagrama de Bode

Determineu el guany d'un controlador de proporcional:

$$G_p(s) = K_p$$

Que proporcionï al sistema controlat una resposta temporal amb $SP < 5\%$

- Sabem que $\gamma = 0.01 \cdot MF$ llavors el $MF = 70^\circ$ pel sistema amb $SP < 5\%$

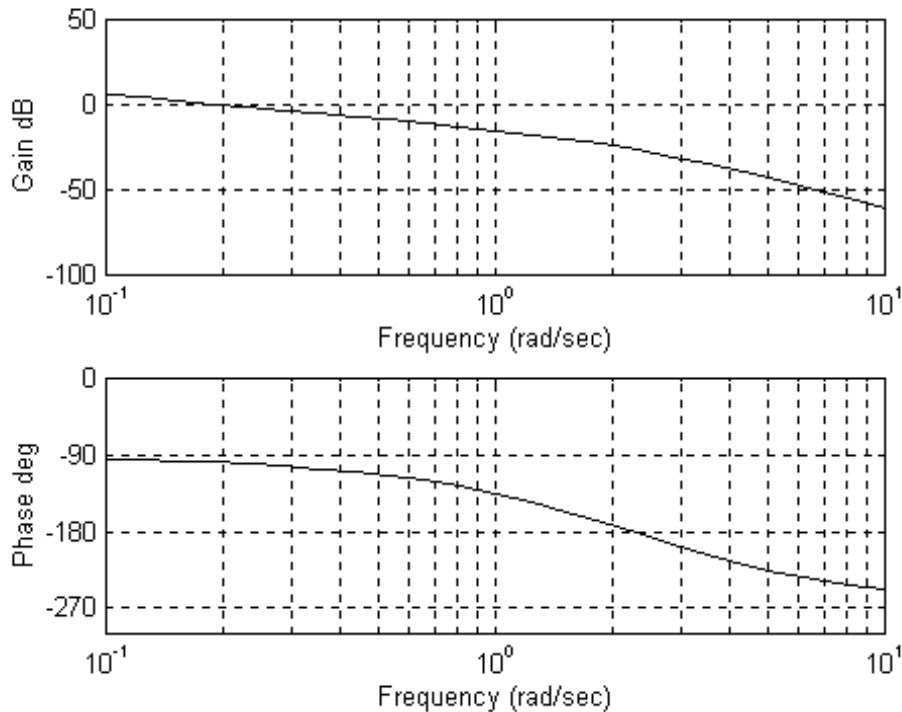
Primerament hem de fer el diagrama de Bode de $G_b(s) = G(s) \cdot H(s)$

$$G_b(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$
 (cal fer el diagrama de Bode d'això)

$$s(s^2 + 4s + 5)$$

Per obtenir els marges de fase i de guany del sistema necessitem utilitzar la funció MARGIN (num,den) on num,den són el numerador i denominador de la funció

$G(s) \cdot H(s)$ i estan amb la variable s de Laplace.



$$MG = 20; MF = 80.88^\circ$$

Hem d'aconseguir reduir el MF de 80.88° a uns 70° , sabem que hem d'obtenir el guany per un marge de fase de 70° i restar-lo del de 80.88° per obtenir el guany en dB que serà la K que hem de posar.

De les matrius de Bode hem obtingut el següent

MAG DB PHASE W

$$0.452 \quad (-6.89) \quad -109.7879 \quad 0.3511$$

0.362 (-8.83) -114.3574 0.4329

Interpolant entre els valors de la taula anterior, obtenim que per una PHASE de 70° , el guany en dBs ha d'ésser de -7 dB

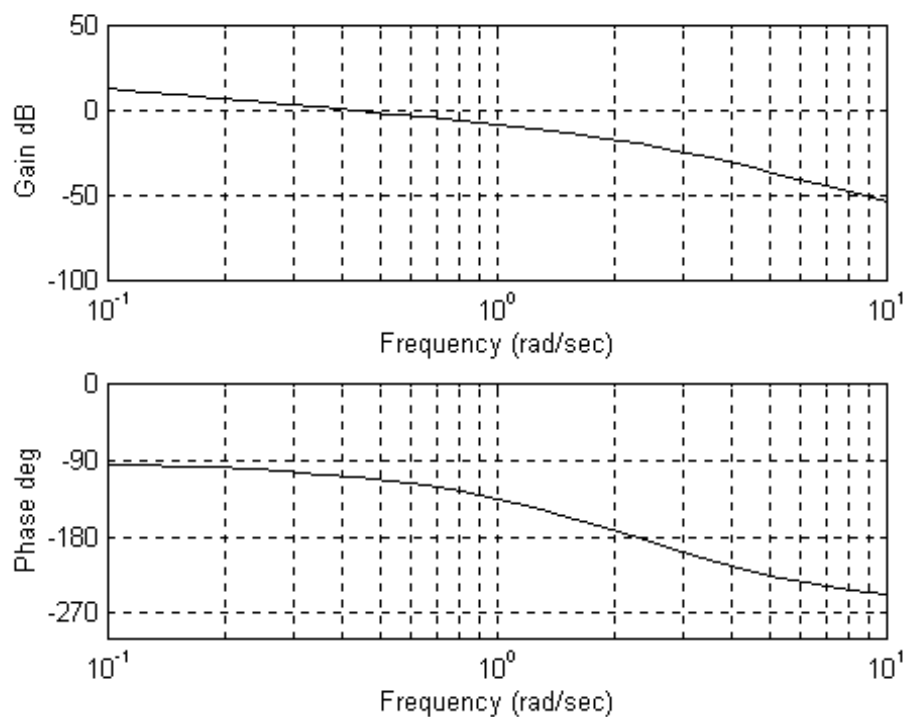
Sabent que la K inicial fóra 1, llavors hem d'obtenir la nova K per la qual el guany ens puja 7 dB perquè el marge de fase ens sigui de 70°

$$K = 7\text{dB} = 2.238$$

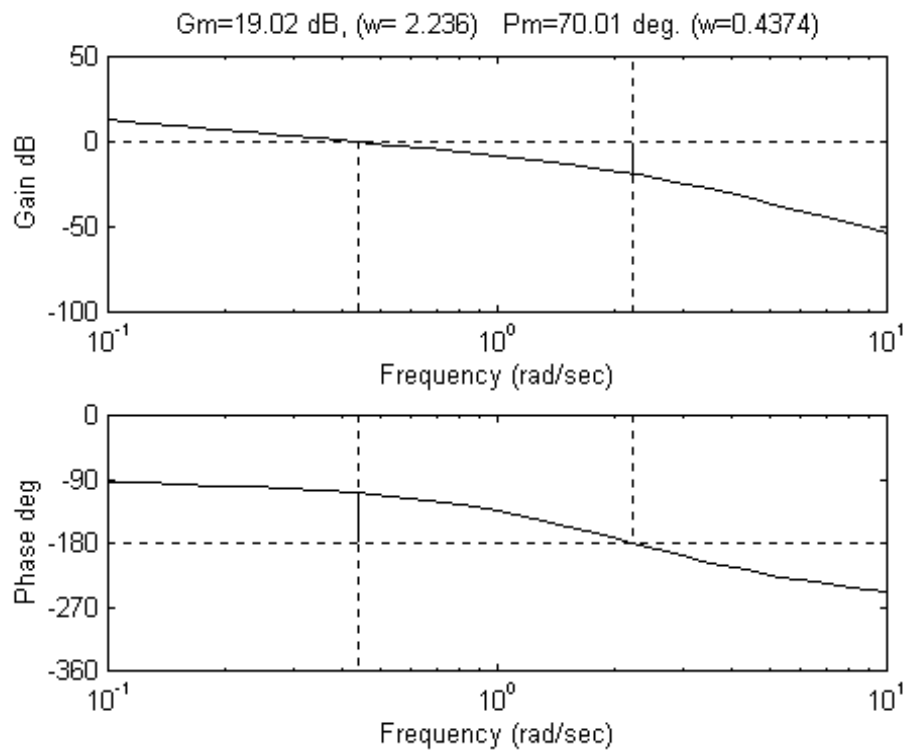
Ara s'ha tornat a dibuixar el diagrama de Bode per comprobar la validesa de la K

$G(S)H(S) = \underline{\quad K \quad}$ (on $K = 2.24$) Fem el diagrama de Bode d'aquesta funció

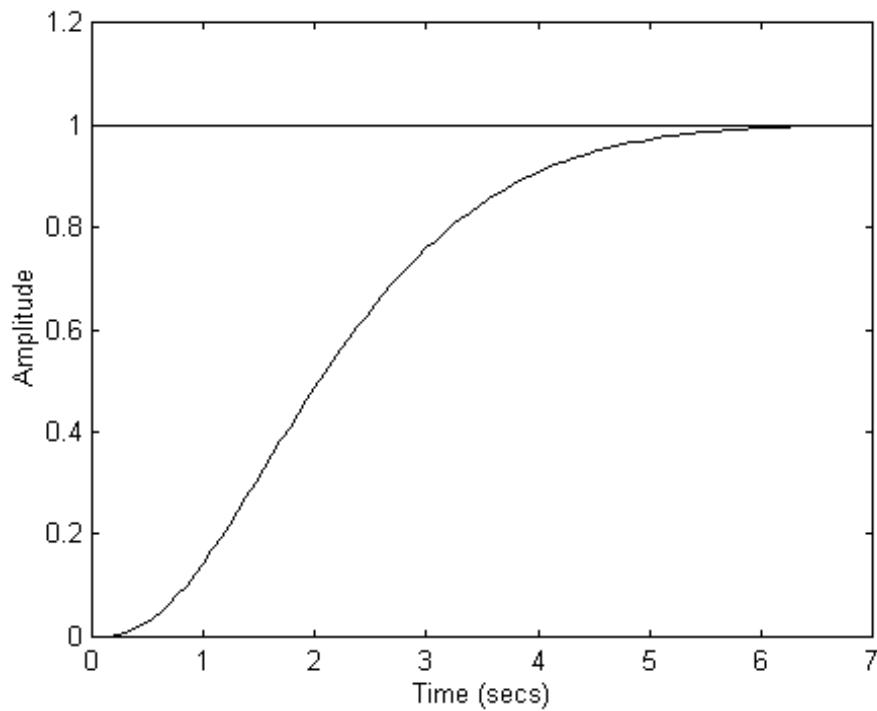
$$s(s^2+4s+5)$$



S'ha fet margin per obtenir els marges de fase i guany del sistema



Per tant es pot veure que complim l'especificació que el marge de fase sigui menor de 70.



Com veiem l'esmoreïment és molt inferior al 5%, això es degut a què la formula que hem utilitzat és molt aproximada.

6.4. DISSENY CONTROLADORS PI USANT DIAGRAMA DE BODE

La funció de transferència en el domini freqüencial d'un controlador PI és:

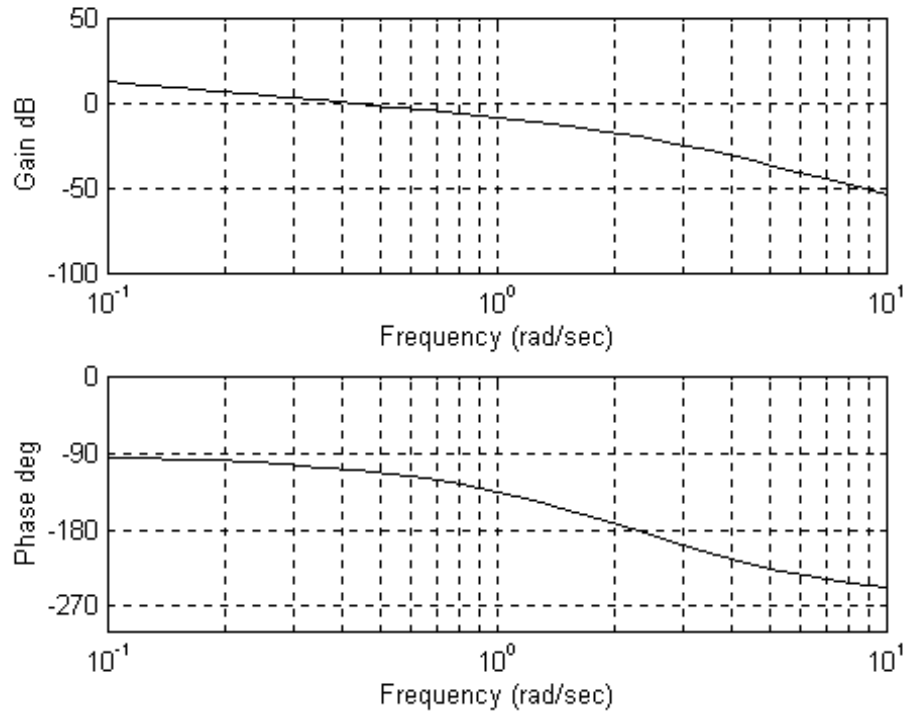
$$G_c(j) = \underline{K(1 + j/a)}$$

$$j/a$$

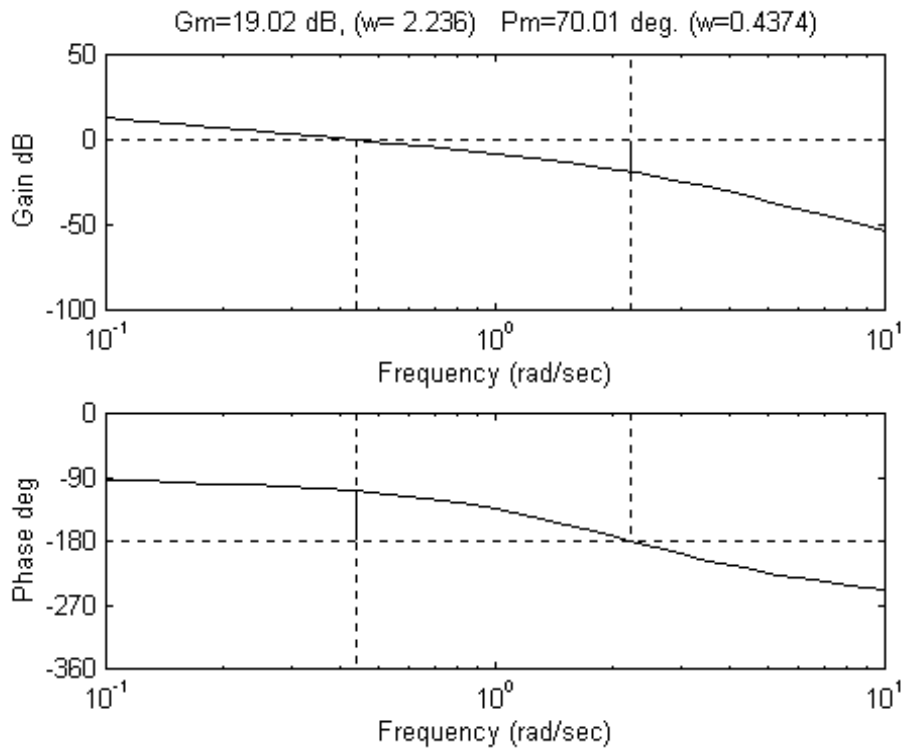
El disseny de controladors PI consisteix en determinar els paràmetres K i a del controlador fins aconseguir que el sistema controlat funcioni amb les prestacions desitjades.

El procediment de disseny de controladors PI amb els diagrames de Bode consta dels següents passos:

- **Obtenir el diagrama de Bode de $KG_p(s)$ per al sistema sense controlar prenent $K=K_p$, essent K_p el guany del controlador proporcional calculat a l'apartat 6.3**



- **Determinar la freqüència del marge de fase , el marge de fase i el coeficient d'error del sistema controlat per un controlador P, a partir del diagrama de Bode de l'apartat anterior.**



d'aquí obtenim les següent dades:

$$= 0.436 \text{ rad/sec}; \text{ MF} = 70^\circ; K_v = 5/2.238 = 2.234$$

- **Escollir $a = 0.1$ per tal de mantenir el marge de fase del sistema controlat al volar fixat mitjançant el controlador P**

$$a = 0.1 = 0.436 \cdot 0.1 = 0.0436 \text{ rad/sec}$$

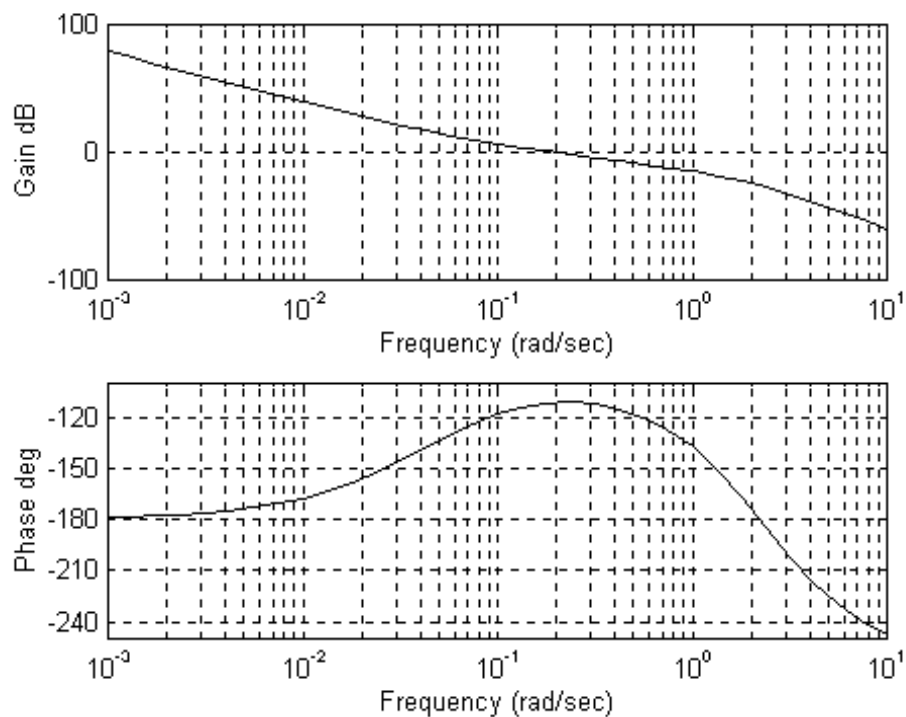
- **Escollir $K = K_p$**

$$K = K_p = 2.238$$

- **Obtenir el diagrama de Bode de $G'_c(j)G_p(j)$ on $G'_c(s)$ és la funció de transferència del controlador PI sense el factor K**

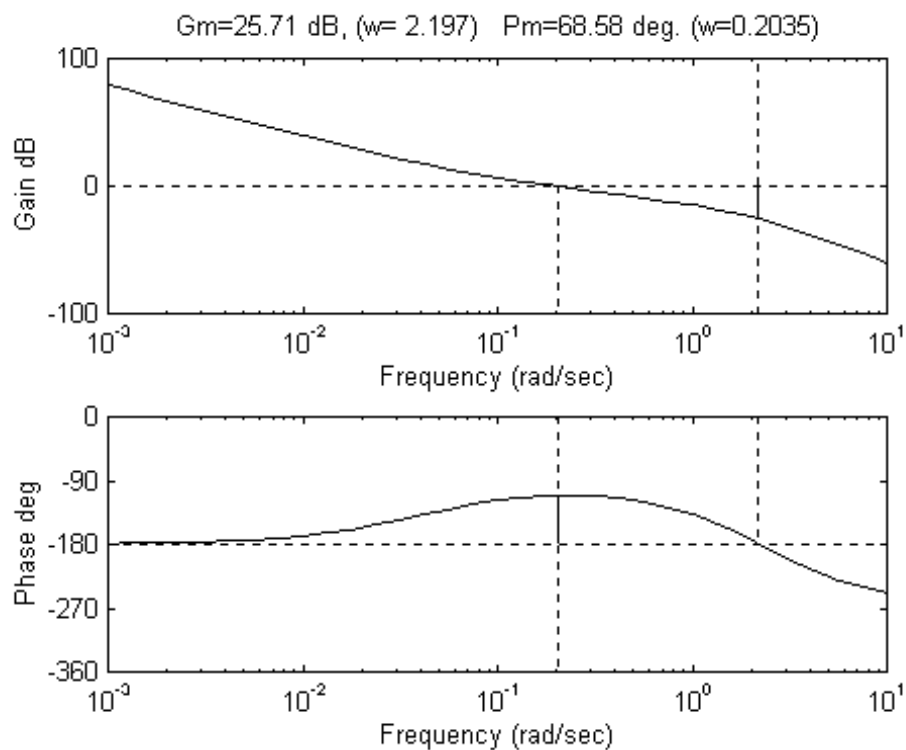
$$G'_c * G_p = \frac{(1+a/s)}{s^2(s^2+4s+5)} = \frac{s+a}{s^2(s^2+4s+5)} \quad (\text{Fer el diagrama de Bode d'aquesta funció})$$

$$s(s^2+4s+5) \quad s^2(s^2+4s+5)$$



- **Determinar el nou marge de fase tenint en compte que la nova freqüència de tall és la freqüència a la qual:**

$$|G'(j)\omega)G_p(j)\omega| = 1/k$$



d'aquí obtenim el marge de fase que són 68° i la freqüència de tall és 0.2035

- **Variar els paràmetres K i a fins aconseguir les prestacions de disseny establertes**

Amb el que hem trobat a l'apartat anterior veiem que el marge de fase és 68° , per tant se'ns compleix que més o menys l'esmoreïment es 0.7. La freqüència de tall és

$$|G_c(j)G_p(j)| = 1/k$$

$$1/k = 0.2035/0.436 = 0.47 \text{ d'aquí obtenim que la } K = 2.13$$

Hem obtingut: $a = 0.0436$; $K = 2.13$, per verificar que es compleixen les especificacions grafiam les respostes a una rampa i a un esglaó.

La funció de transferència a considerar serà

$$G_c = K(1+a/s) = 2.13(1+0.0436/s)$$

$$G_p = 1/s(s^2+4s+5)$$

$$G_c G_p = \frac{2.13(1+0.0436/s)}{s(s^2+4s+5)} = \frac{2.13s+0.0929}{s^2(s^2+4s+5)}$$

$$s^2(s^2+4s+5)$$

I la funció en llaç tancat és:

$$M(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{2.13s+0.0929}{s^4+4s^3+5s^2+2.13s+0.0929}$$

$$1 + G_c G_p = s^4+4s^3+5s^2+2.13s+0.0929$$

Les arrels del polinomi característic son:

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

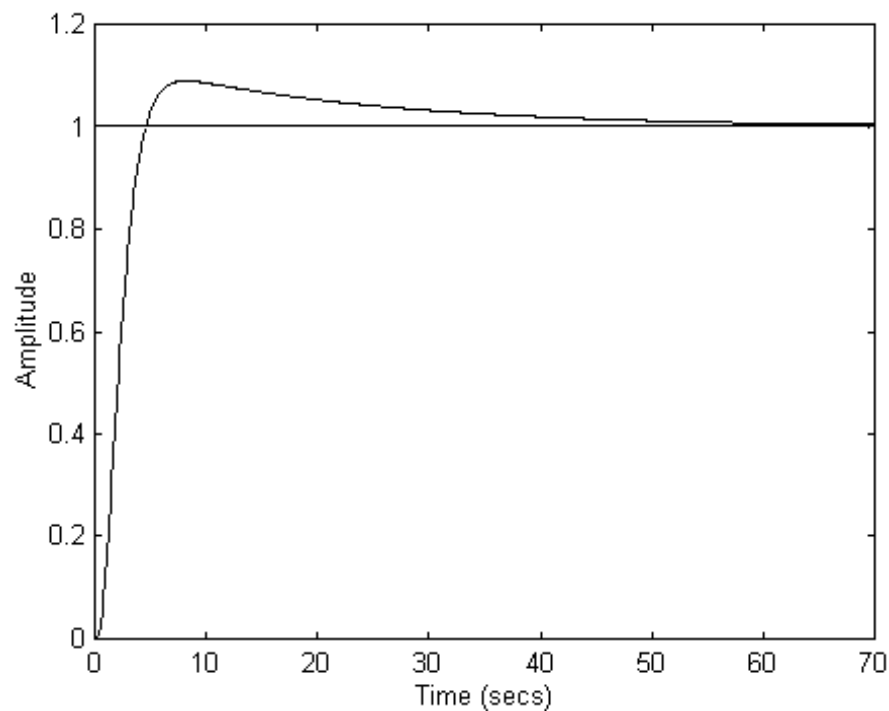
$$-0.0490 \quad 1.0000 \quad 0.0490$$

$$-0.9385 + 0.1804i \quad 0.9820 \quad 0.9557 \text{ (el sistema s'ens ha alentit molt)}$$

$$-0.9385 - 0.1804i \quad 0.9820 \quad 0.9557 \text{ (Hi ha pols dominants reals)}$$

$$-2.0739 \quad 1.0000 \quad 2.0739$$

Les respostes a una rampa i un esglaó del sistema són:



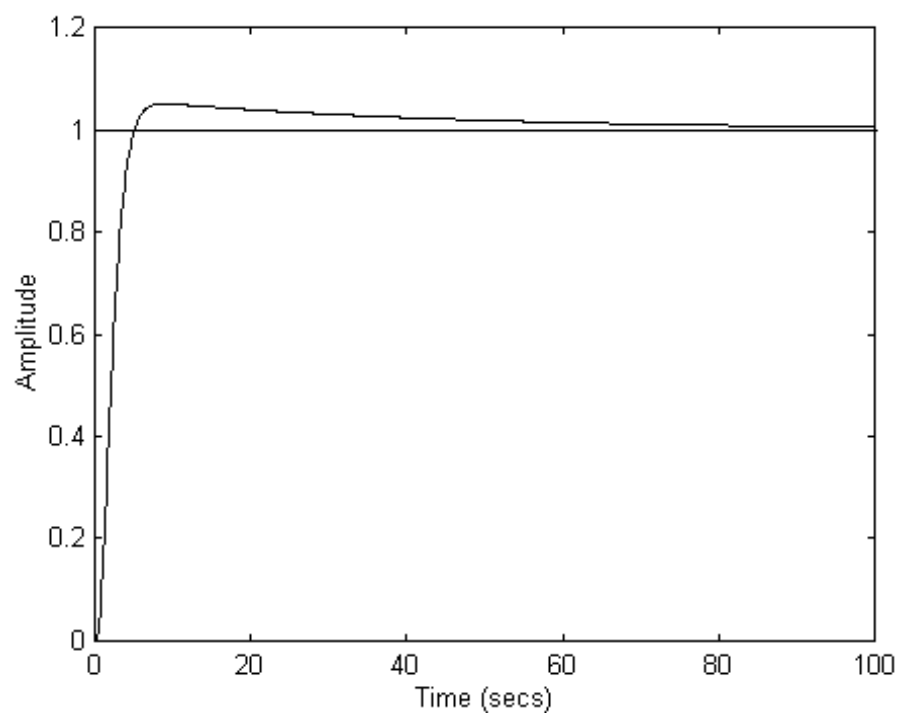
Això es degut a l'efecte que el 0 ens produeix, hem de mirar de triar una altra a per minimitzar l'efecte d'aquest 0 sobre el nostre sistema.

S'ha variat la a fins a fi de baixar l'esmoreiment per intentar disminuir el sobrepic

La nova funció de transferència és: S'ha establert $a = 0.0167$

$$M(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{2.13s + 0.05}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2.13s + 0.05} \quad (\text{es un sistema de tipus II})$$

$$1 + G_c G_p = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2.13s + 0.05$$



Els valors finals del controlador PI són

$$K = 2.13, a = 0.0167$$

Ens compleix: esmorteïment menor de 5% i l'error en entrada rampa ja que

Degut a l'integrador aquest error és 0 (el nostre sistema és ara de tipus II)

6.5. DISSENY CONTROLADORS PD USANT DIAGRAMA DE BODE

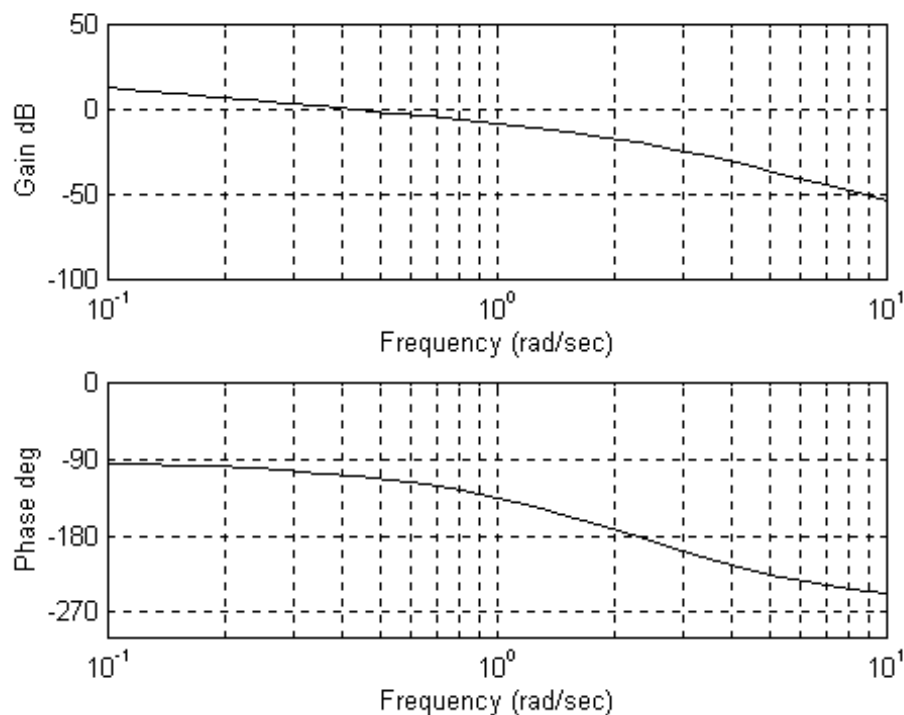
La funció de transferència d'un controlador PD en el domini freqüencial és:

$$G_c(j) = K(Aj + 1)$$

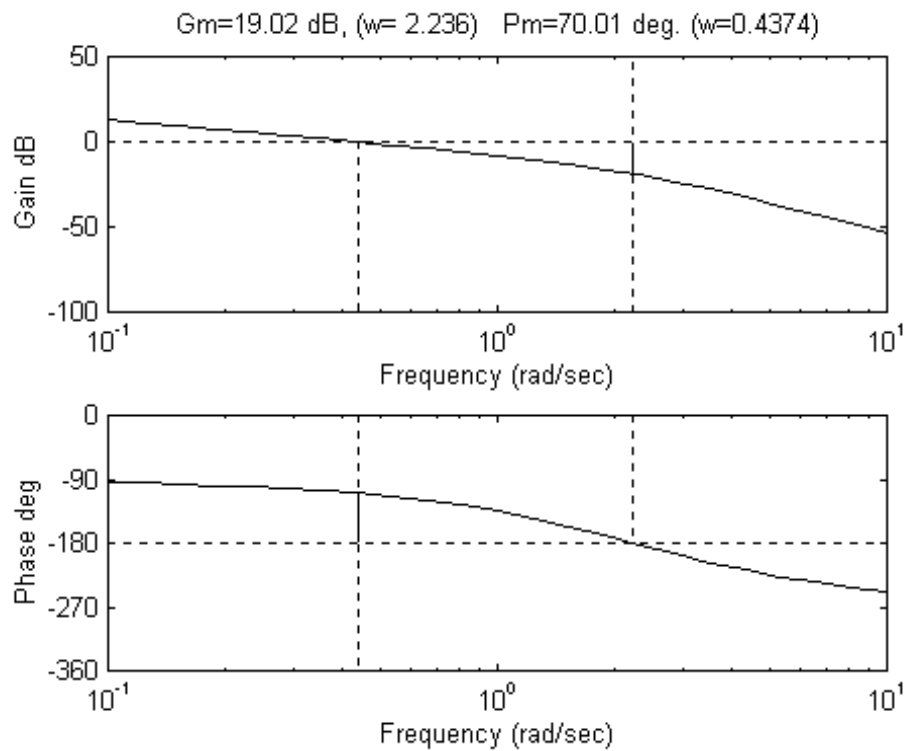
El disseny de controladors PD consisteix en determinar K i A del controlador fins aconseguir que el sistema controlat funcioni amb les prestacions desitjades.

El procediment de disseny de controladors PF fent servir el diagrama de Bode consta dels següents passos:

- **Obtenir el diagrama de Bode de $KG_p(s)$ per al sistema sense controlar prenent $K=K_p$, essent K_p el guany del controlador proporcional calculat a l'apartat 6.3**



- **Determinar la freqüència del marge de fase , el marge de fase i el coeficient d'error del sistema controlat per un controlador P, a partir del diagrama de Bode de l'apartat anterior.**



d'aquí obtenim les següent dades:

$$= 0.436 \text{ rad/sec}; \text{ MF} = 70^\circ; K_v = 5/2.238 = 2.234$$

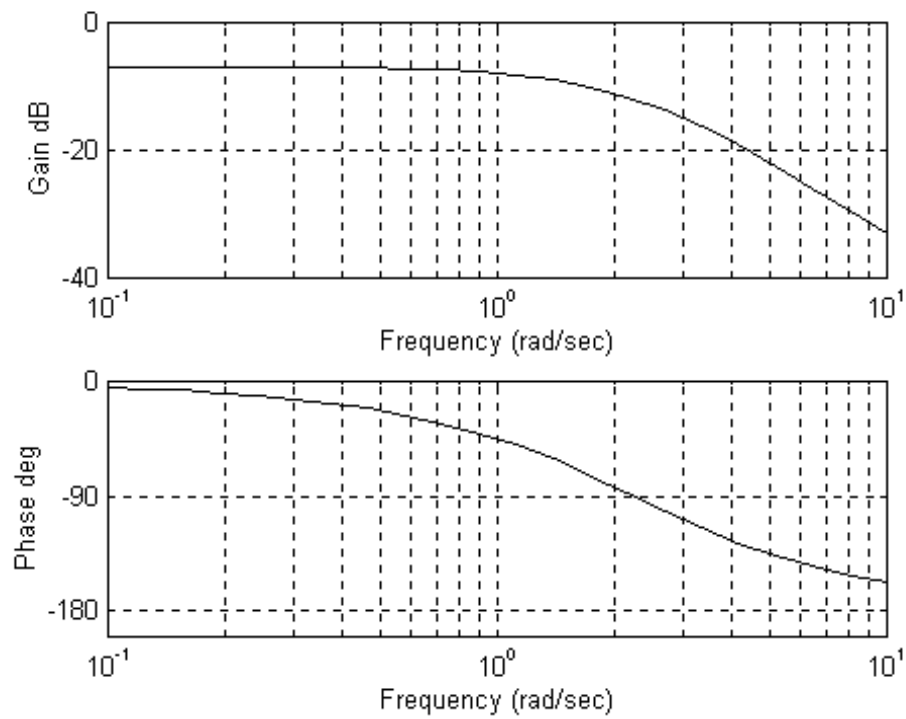
- **Obtenir el diagrama de Bode de $KAsGp(s)$ fins a determinar el valor del producte KA que proporcionï la freqüència de tall i el marge de fase adequat**

Hem d'obtenir el diagrama de Bode de la següent funció:

$KAsGp(s) = \underline{2.238 \cdot A} s$ (el diagrama de Bode d'aquesta funció és

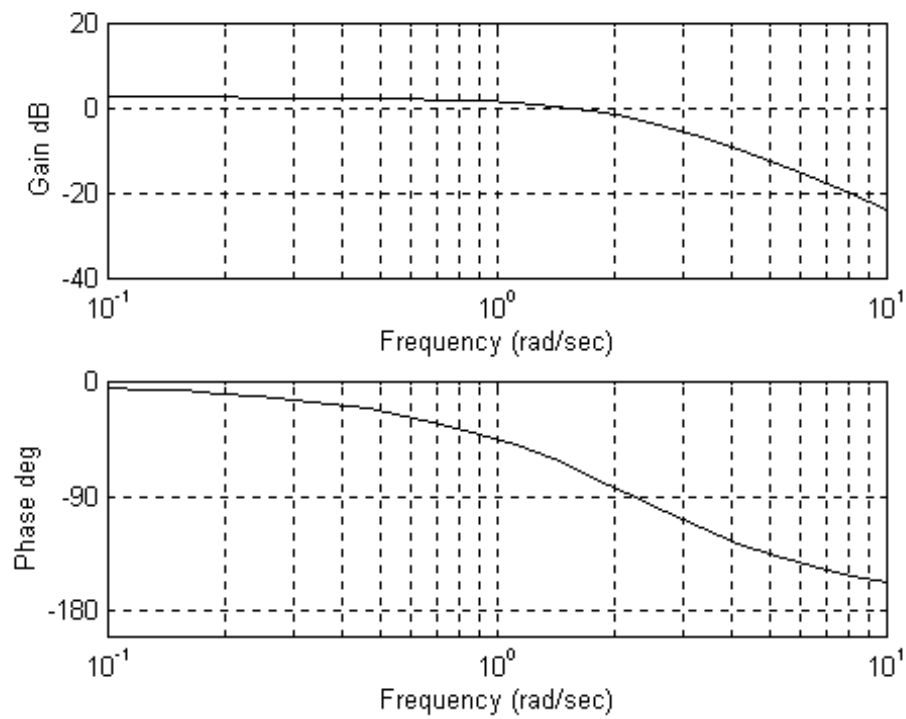
$s(s^2+4s+5)$)

per $K = 2.23 \text{ A} = 1$



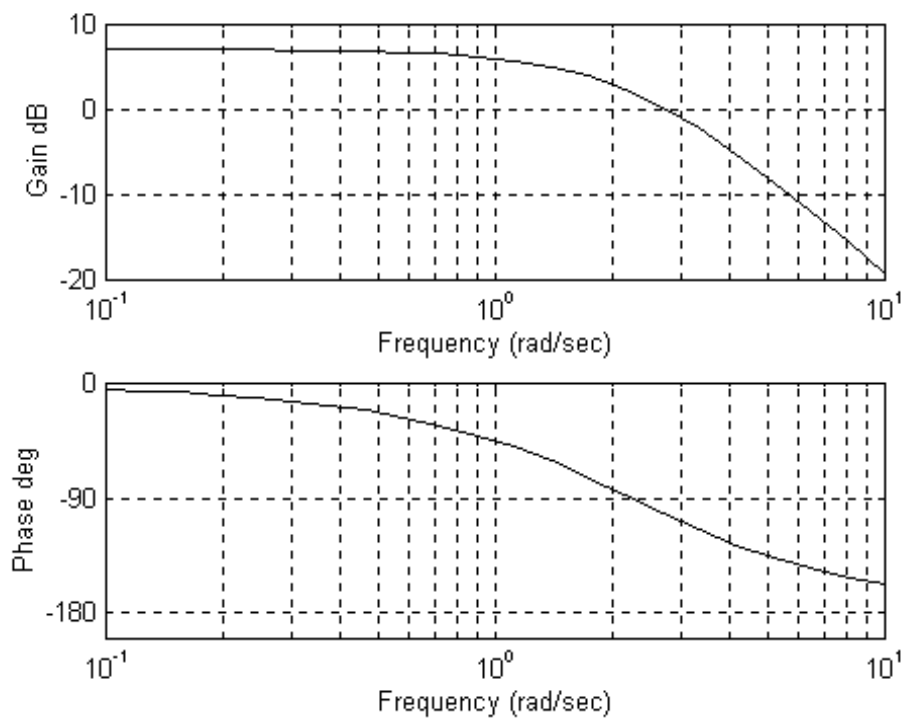
No presenta ni marge de fase ni marge de guany

Per $K = 2.23$; $A = 3$



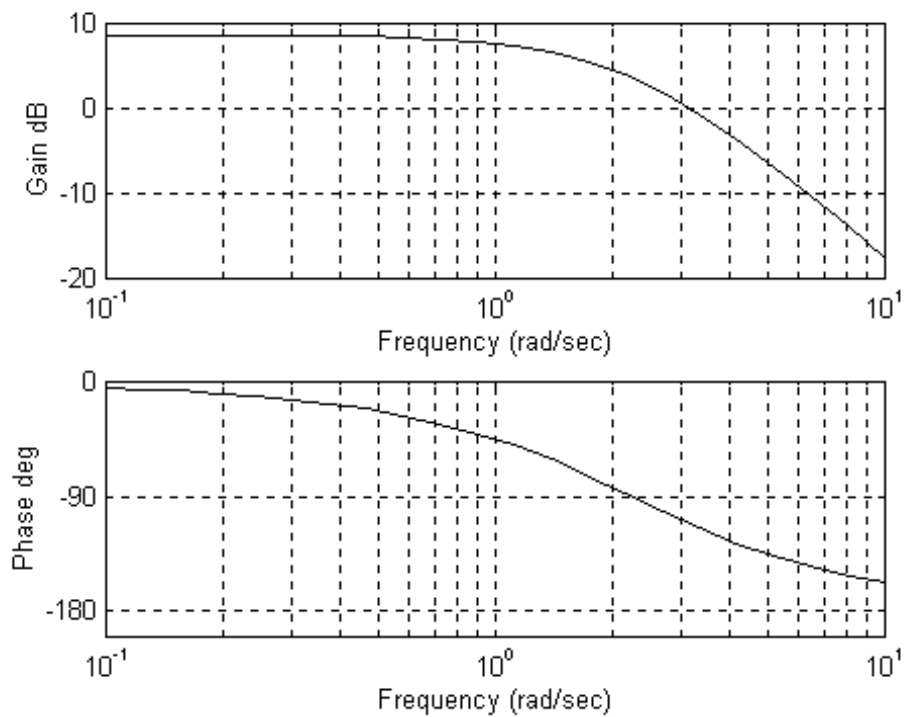
no presenta marge de guany i el marge de fase és: 111°

per $K = 2.23$, $A = 5$



No presenta marge de guany i el marge de fase és 76°

Per $K = 2.23$; $A = 6$



No presenta marge de guany i el marge de fase és 68.4°

S'ha interpolat entre $A = 5$ i $A = 6$ i s'ha establert una $A = 5.8$ per obtenir més o menys un marge de fase de

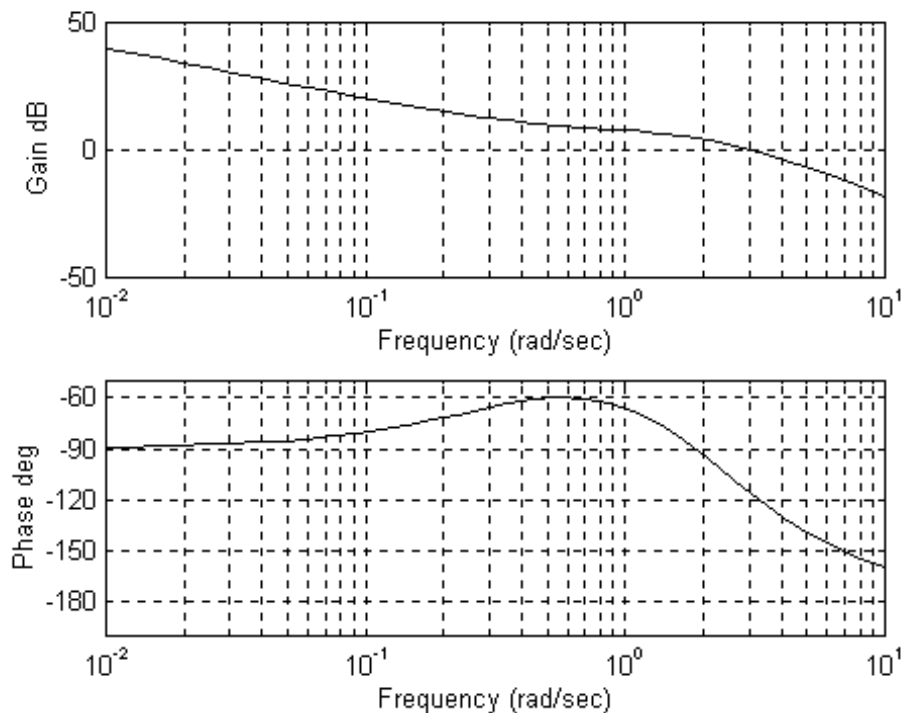
70°; s'ha obtingut que: $KA = 2.238 \cdot 5.8 = 12.98$

- **Obtenir el diagrama de Bode $KA(s+1/A)G_p(s)$ per a diversos valors de K i $A = KA/K$. Escollir els valors adequats de K i A per tal d'obtenir un coeficient d'error estacionari, una freqüència de tall i un marge de fase desitjat**

A l'anterior pràctica vam deduir que perquè complíssim l'especificació de l'error necessitàvem una $K > 5$, llavors agafem el cas limit: $K = 5$; $A = 12.98/5 = 2.6$

I en fem el diagrama de Bode de $\underline{12.98(s+0.385)} = \underline{12.98s + 5}$

$s(s^2+4s+5) \quad s(s^2+4s+5)$



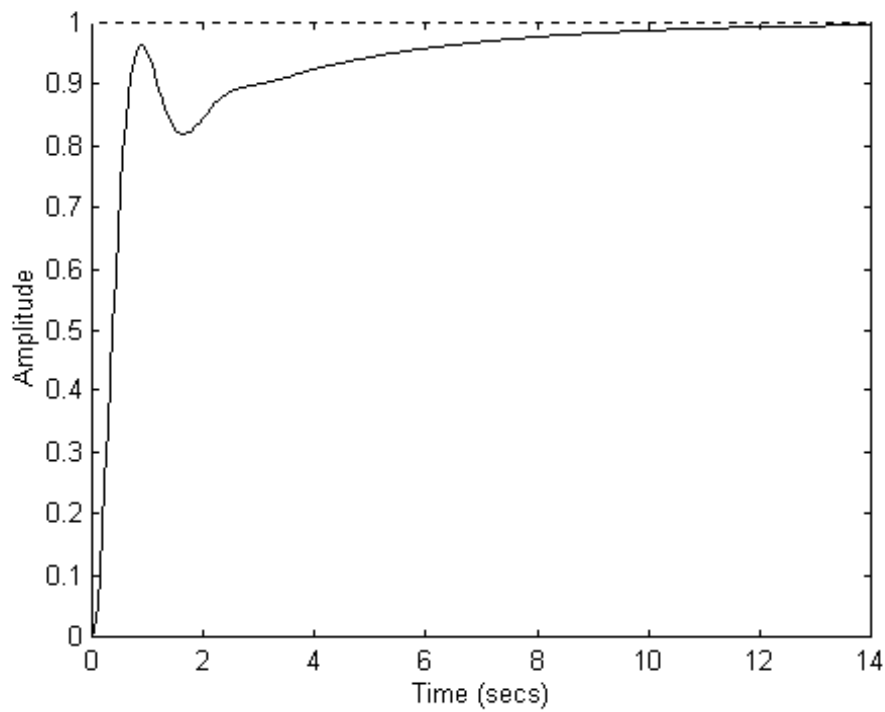
MF = 63°, = 3.03 rad/sec

Es creuen aquests valors correctes pel compliment de les nostres especificacions.

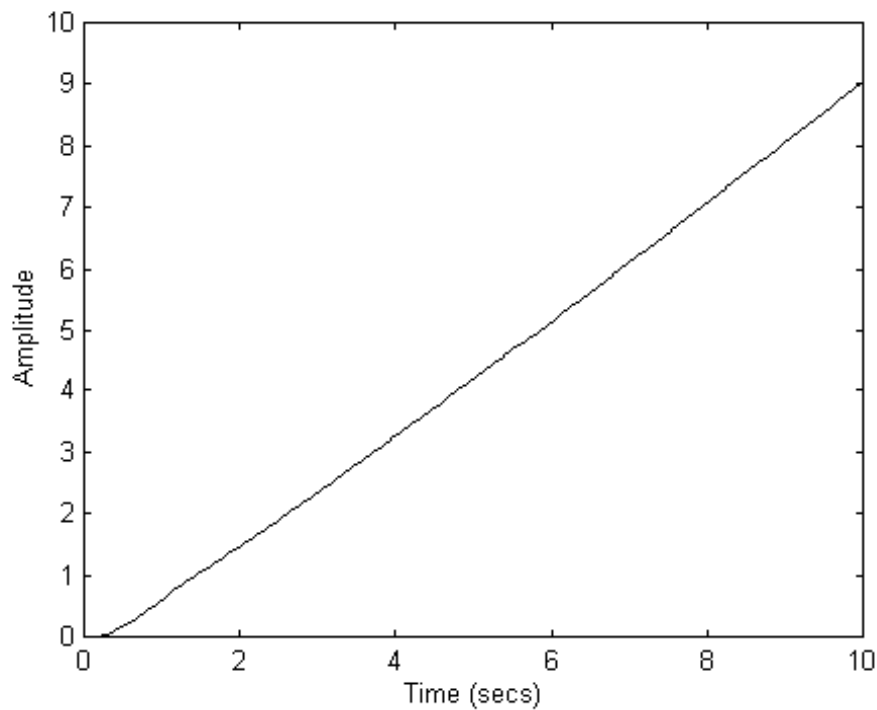
Per corroborar-ho obtindrem les respostes temporals del sistema amb el controlador enfront una rampa i d'un esglaó:

El sistema en llaç tancat és $\underline{G_p G_c = 12.98s + 5}$

$1 + G_p G_c \quad s^3 + 4s^2 + 17.98s + 5$



I enfront una rampa la seva resposta temporal és:



Com es pot veure l'error es 1, per tant el sistema també ens compleix aquesta

Especificació

Mirarem perquè la gràfica de la resposta temporal ens dona tan rara:

Les arrels del polinomi característic són:

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

-0.2962 1.0000 0.2962

-1.8519 + 3.6679i 0.4507 4.1089

-1.8519 - 3.6679i 0.4507 4.1089

Veiem que tenim un pol dominant real i que, per tant, la funció se'ns aproxima a una de 1er ordre, per això el sistema té aquesta resposta tan rara. Tot hi això aquest sistema ens compleix les especificacions desitjades.

6.6. DISSENY DEL CONTROLADOR PID

La funció de transferència del controlador PID en domini freqüencial és:

$$G_c(j) = K(j+a) + KA j$$

j

El procediment de disseny de controladors PID en el domini freqüencial es pot expressar com la combinació d'un PI més un PD.

- ajust del controlador PI, fent $A = 0$
- **Obtenir el diagrama de Bode de $KG_p(s)$ per al sistema sense controlar prenent $K = K_p$, essent K_p el guany determinar a l'apartat 6.3**
- **Determinar la freqüència de marge fase, el marge de fase i el coef. Error del sistema controlat per un controlador P, a partir del diagrama de Bode**

Això s'ha fet a l'apartat 6.4, i els resultats han estat els següents:

$$= 0.436 \text{ rad/sec; } MF = 70^\circ; K_v = 5/2.238 = 2.234$$

- **Escollir $a = 0.1$**

$$Aa = 0.1 = 0.436 \cdot 0.1 = 0.0436$$

- ajust del controlador PD, fent $a = 0$
- **escollir $K = K_p$**

la K_p l'hem trobada a l'apartat 3 i és 2.238

- **Obtenir el diagrama de Bode de $KA_sG_p(s)$ fins a determinar el valor del producte KA que proporcioni la freqüència de tall i el marge de fase desitjat.**

El producte KA s'ha determinat a l'apartat 6.5 i és 12.98

- **Obtenir el diagrama de Bode de $KA(1+1/A)G_p(s)$ per a valors de K i $A=KA/K$. Escollir els valors adequats de K i A per tal d'obtenir un coeficient d'error estacionari, una freqüència de tall i un marge de fase desitjat**

Aquestos valors de K i $A=KA/K$ s'han trobat a l'apartat 6.5 i són

$K = 5$; $A = 2.6$

- ajust del controlador PID
- **Escollir K i A obtinguts a l'ajust del PD i a de l'ajust del PI**

$A = 2.6$, $K = 5$, $a = 0.0436$

- **Obtenir el diagrama de Bode de $G_c(j)G_p(j)$ on $G_c(s)$ és la funció de transferència del controlador sense el factor K**

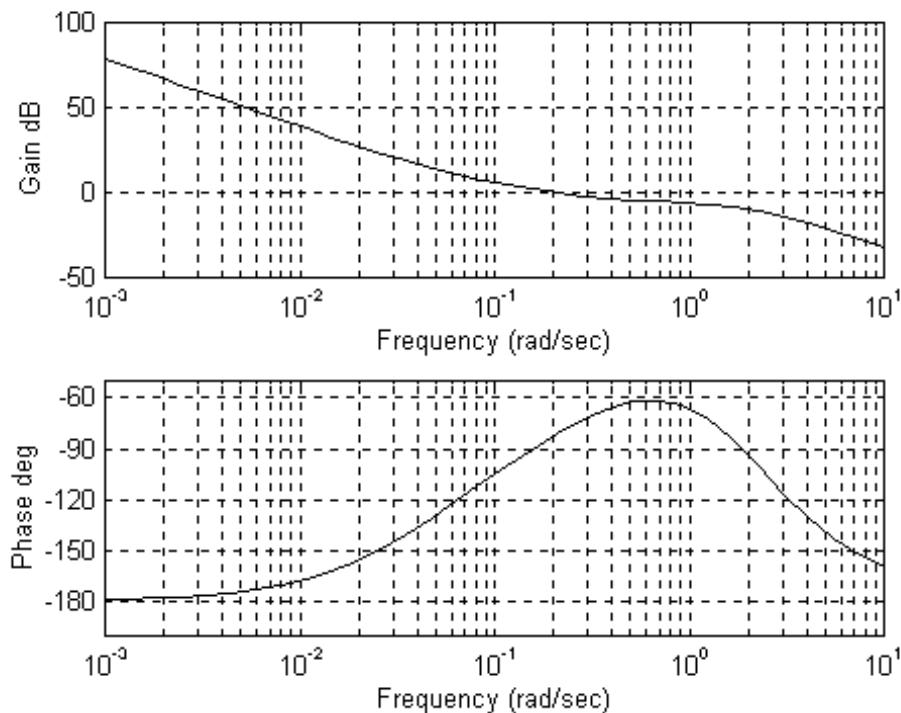
$$G_c(s) = \frac{(s+a)}{s^2} + As = \frac{As^2+s+a}{s^2}$$

s s

$$G_p G_c(s) = \frac{s^2+As+a}{s^2(s^2+4s+5s)} = \frac{2.6s^2+s+0.0436}{s^2(s^2+4s+5s)}$$

$$s^2(s^2+4s+5s) \quad s^2(s^2+4s+5s)$$

Hem de fer el diagrama de Bode d'aquesta funció, que es aquest:



- **determinar el nou marge de fase tenint en compte que la nova freqüència de tall es la freqüència per la qual**

$$|G_c(j)G_p(j)| = 1/k$$

No presenta marge de guany i el marge de fase és: 99,5°, la freq de tall és 0.21 rad/sec

Com que aquest marge que hem obtingut no ens val, intentarem buscar la K que ens faci complir les especificacions establertes.

PHASE MAG W

-109.2050 0.2422 2.613

-110.0909 0.2374 2.656

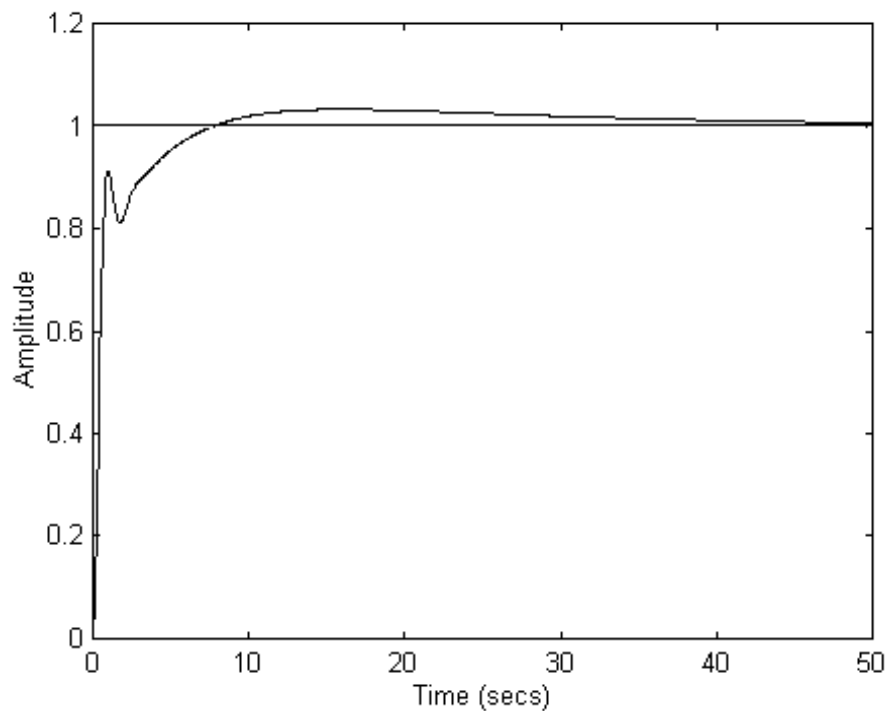
Per un MF de 70° obtenim $K = 4.23$ i $W = 2.651$

$K = 4.23$, $A = 2.6$, $a = 0.0436$

S'ha mirat la resposta temporal per un esglaó amb aquest PID

$G(s) = \frac{4.23(2.6s^2 + s + 0.0436)}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$ i s'ha obtingut que:

$s^2(s^2 + 4s + 5)$



Com es pot veure, la resposta temporal és molt rara, mirem els pols i zeros de la funció

Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)

-0.0548 1.0000 0.0548

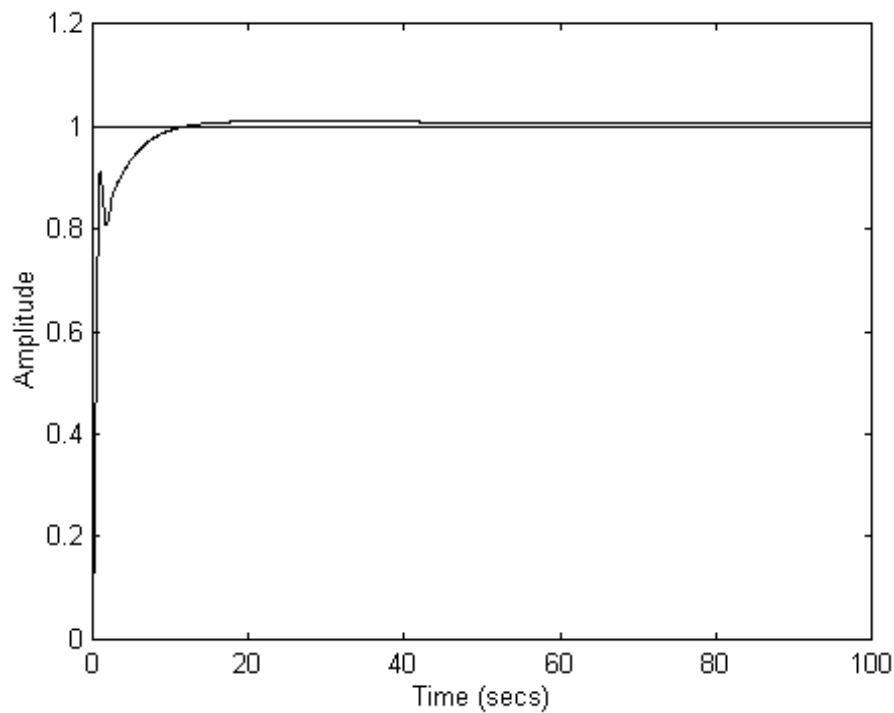
-0.2252 1.0000 0.2252

-1.8600 + 3.3889i 0.4811 3.8658

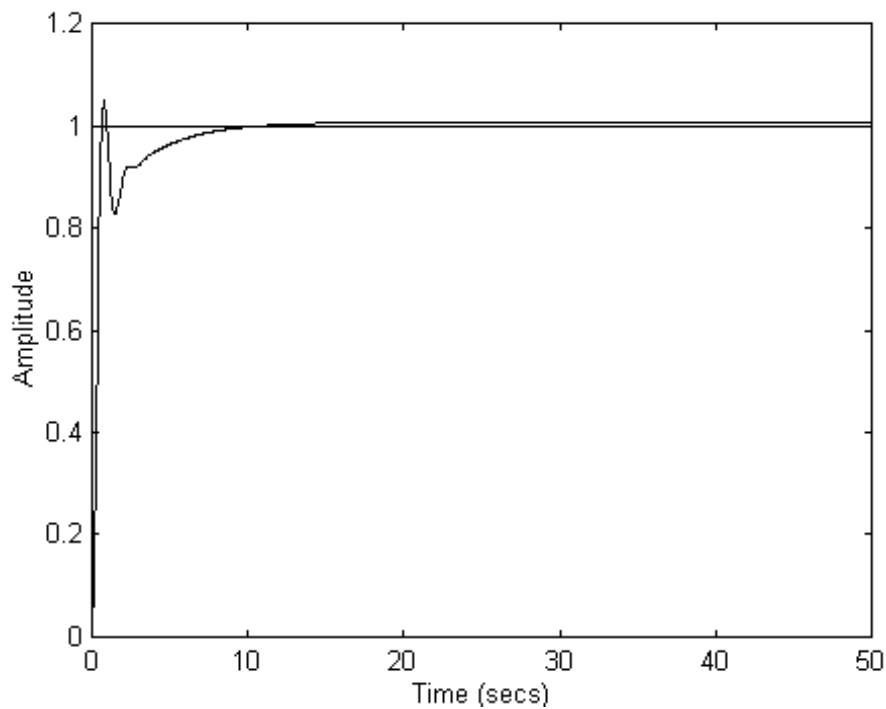
-1.8600 - 3.3889i 0.4811 3.8658

Els pols reals ens afecten molt a la resposta, ens l'alenteixen i per això tenen aquesta forma tan rara, hauríem d'intentar aconseguir reduir una mica el seu efecte variant la a

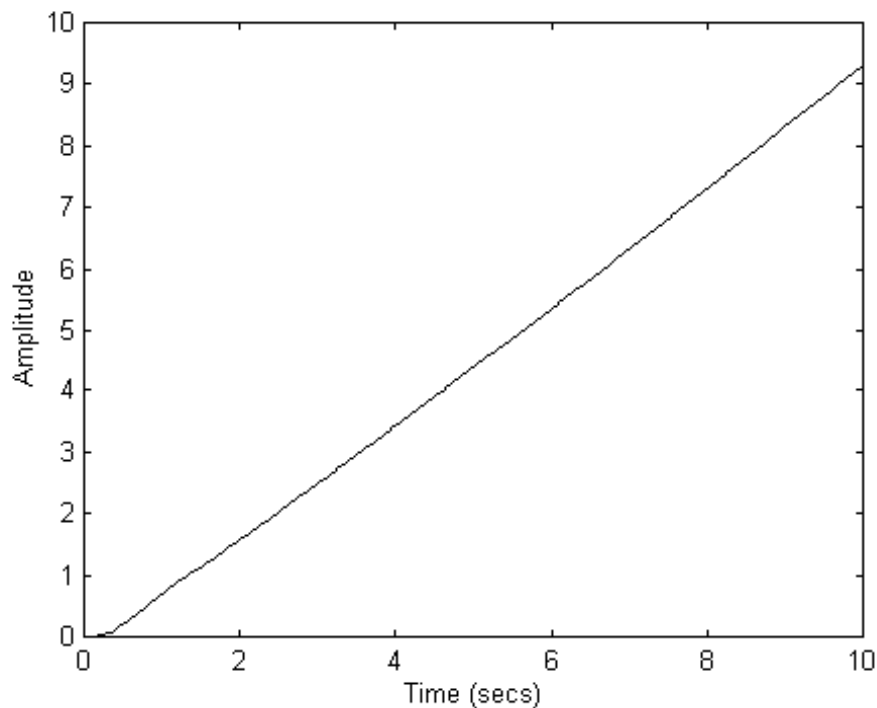
S'ha agafat la a obtinguda a l'apartat 6.3 ; $a=0.1$, llavors hem obtingut la següent resposta:



Finalment s'ha determinat quina K ens donaria un sobrepic més pròxim al 5%, s'han anat probant diferents valors de K i finalment s'ha obtingut que una K de 6.5 ens donaba una resposta temporal com aquesta:



I per una rampa



Es compleix el requisit de la rampa i el requisit de l'esmoreiment, el del sobrepic es compleix tot hi que després el sistema ens fa coses rares degut als pols reals, per intentar millorar el sistema es podria utilitzar un muntatge en cascada amb el controlador PID i el sistema i abans un filtre que aconseguís baixar l'efecte d'aquests pols reals que tenim tan a prop de l'origen

DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REAL (I)

• Objectius

Amb aquesta pràctica es pretén realitzar la indentificació d'un procés físic real, amb característiques d'una forta no-linealitat i de difícil modelatge amb la finalitat d'obtenir un model matemàtic discret que descriu la seva dinàmica. El sistema sobre el qual farem la identificació es troba representat en la figura 1.

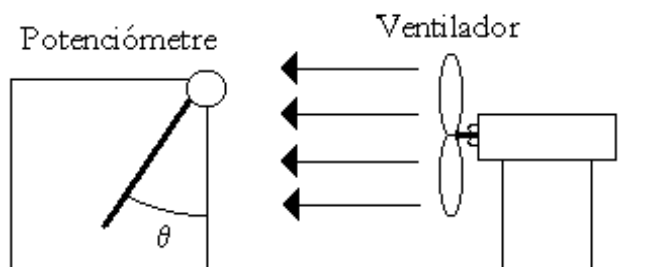


Figura 1

2. Descripció del sistema

Es tracta d'un motor de corrent contínua amb una hèlix que impulsa el vent cap una placa lleugera i rígida (de porexpan), disposada verticalment en estat de repós i que per acció del vent impulsat, pot moure's entorn de l'eix horitzontal a la qual està fixada, describint un cert angle respecte la vertical.

L'entrada del sistema serà la tensió aplicada al motor i la sortida, la tensió que ens dóna un potenciòmetre.

El sistema es pot desglossar en diversos subsistemes connectats en sèrie, de manera que la funció de transferència global la podrem obtenir multiplicant les funcions de transferència parcials. Fent això s'obté la següent definició del sistema global:

$$G(s) = \frac{V_{\text{potenciòmetre}}}{V_{\text{motor}}}$$

V_{motor}

Els subsistemes presents en aquest procés són el motor de CC, les hèlices, el pèndol amb la planxa de porexpan i el potenciòmetre. Podent-los esquemetitzar de la forma que mostra la figura 2

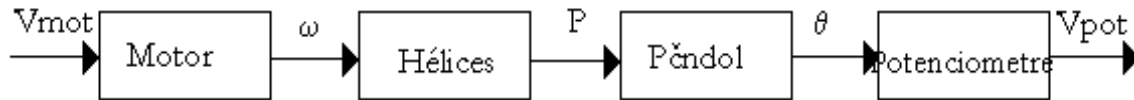


Figura 2

- Motor CC: respon a un sistema de primer ordre
- Hèlices: Es consideren que tenen un comportament proporcional
- Pèndol: La pressió de l'aire que provoquen les hèlices, provoca un moment sobre el centre massic de la planxa, provocant el balanceig. El tipus de comportament d'aquest subsistema vindrà donat pel conjunt de moments que actuen sobre la planxa.
- Potenciòmetre: Es un amplificador operacional i té un comportament linial.

• Fonaments

És molt important obtenir els models dels processos ja que la majoria de tècniques de control digital avançat estan basades en un model del procés a controlar. Les tècniques d'obtenció dels models dels processos, en general, segueixen dos camins:

- Si la dinàmica de model pot ser raonablement modelada mitjançant equacions diferencials, podem obtenir un model continu del procés en el que, habitualment, faltaria determinar certs paràmetres. Per obtenir aquests ens serà suficient conèixer la resposta temporal a una entrada graó unitari o obtenir diagrames de Bode
- Si la dinàmica del model és molt difícil de modelar en termes d'equacions diferencials, podem optar per determinar directament el model del procés. Per fer-ho un primer pas seria establir una primera estimació dels ordres i del retard del nostre model i, posteriorment, aplicar alguna tècnica d'estimació paramètrica per obtenir els paràmetres concrets del model.

Nosaltres ens trobem en el primer cas, per tant, el que farem serà trobar les equacions físiques del sistema.

• Modelat del sistema amb equacions físiques

A partir del següent diagrama de forces plantejarem les equacions dels moments que actuen en el subsistema Pèndol+Planxa de porexpan:

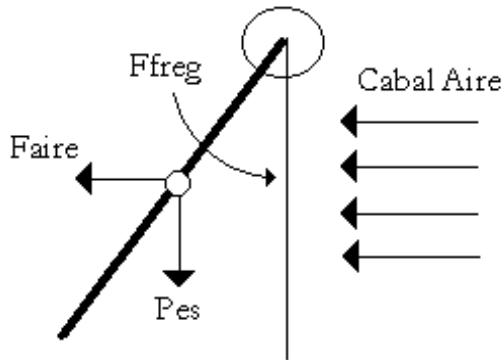


Figura 3

Les lleis de la mecànica ens diuen, pel principi d'Alembert:

$$\text{o Moments} - I^* = 0$$

En aquest cas, segons el diagrama de la pàgina anterior, els moments que actuen són:

$$M_{pes} = m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \sin$$

$$M_{fr} = f \cdot$$

$$M_{aire} = F_a \cdot \cos \cdot R_{cm}$$

Substituint ens queda que:

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \sin + f \cdot - F_a \cdot \cos \cdot R_{cm} + I^* = 0 \text{ (EQ-1)}$$

Sabem que el moment d'inèrcia d'una barra és

$$I = m \cdot R_{cm}^2 / 12$$

Per tant substituint I a l'expressió ens queda l'equació que modelitza el sistema

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \sin + f \cdot - F_a \cdot \cos \cdot R_{cm} + m \cdot R_{cm}^2 / 12 \text{ (EQ-2)}$$

On:

R_{cm} Radi del centre de masses (en m)

g Acceleració de la gravetat (m/s^2)

I Moment d'inèrcia d'una barra ($kg \cdot m^2$)

F_a Força de l'aire (N)

f Força de fregament (N)

Acceleració angular de la barra (rad/s^2)

m Massa de la planxa porexpan (Kg)

Tenim els següents valors:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$m = 22 \text{ g} = 0.022 \text{ Kg}$$

- **Problema:** No coneixem els paràmetres f, F_a i R_{cm} .

En general en qualsevol sistema que volguem identificar ens trobarem amb una sèrie de paràmetres desconeguts. Aquests poden ser classificats en 2 grups:

- Paràmetres que són fàcilment mesurables, en el nostre cas R_{cm}
- Paràmetres que són més difícils o impossibles de mesurar, ja sigui perquè la seva mesura només es pot fer amb aparells sofisticats o simplement, no podem accedir-hi, en el nostre cas F_a i f .

Per tal de poder fer la identificació dels paràmetres desconeguts es farà el següent

- Trobar el model lineal a partir de l'equació (EQ – 2) que ens defineix el model no lineal.
- Fer porces en el laboratori per tal de determinar paràmetres d'un sistema de segon ordre (n , ω_n , K)

5. Linealització del model

- Donada l'equació diferencial (EQ – 2) que modelitza el sistema planxa-pèndol, es demana linealitzar-la per angles petits (al voltant de zero). Aquesta imposició ens permet donar com a vàlida l'aproximació $\sin \theta \approx \theta$ i $\cos \theta \approx 1$

$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \sin \theta + f \cdot \dot{\theta} - F_a \cdot \cos \theta \cdot R_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 \ddot{\theta} = 0$ fent les substitucions:

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \theta + f \cdot \dot{\theta} - F_a \cdot R_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 \ddot{\theta} = 0$$

- Determinar la funció de transferència a llaç obert $G(s) = \theta(s) / F_a(s)$ a partir del model lineal.

L'expressió que s'obté serà l'equació EQ-3. Completeu-la

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \theta + f \cdot \dot{\theta} - F_a \cdot R_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 \ddot{\theta} = 0 \text{ (fent transformades de Laplace)}$$

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \theta(s) + f \cdot s \cdot \theta(s) - F_a(s) \cdot R_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 \cdot s^2 \cdot \theta(s) = 0$$

$$\theta(s) = \frac{R_{cm}}{s^2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 + f \cdot s + m \cdot g \cdot R_{cm}} F_a(s)$$

$$G(s) = \frac{12}{(R_{cm} \cdot m)} \frac{1}{s^2 + (12 \cdot f / m \cdot R_{cm}) s + 12 \cdot g / R_{cm}}$$

- Observeu que la funció de transferència obtinguda es correspon amb un sistema de segon ordre del tipus:

$$Y(S) = \frac{K \cdot n^2}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

$$R(S) = \frac{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

- Així doncs, si arribem a identificar els paràmetres del sistema (n , K ,) podem trobar els paràmetres físics desconeguts i per tant acabarem obtenint l'expressió del model del sistema.

A partir d'aquesta equació podem relacionar els paràmetres del sistema de segon ordre i relacionar-los amb els paràmetres físics

$$n^2 = 12g/r \quad n = (12g/r)^{1/2}$$

$$2 \cdot n \cdot K = 12 \cdot f / m \cdot R_{cm}^2 = 6 \cdot f / (m \cdot R_{cm}^2 (12g/r)^{1/2})$$

$$K \cdot n^2 = 12 / (R_{cm} \cdot m) \quad K = 1/mg$$

6. Determinació dels paràmetres del model mitjançant tècniques d'identificació de Sistemes

Un cop trobat el model lineal del subsistema del pèndol, el que volem ara és determinar els paràmetres que no coneixem (f, F_a, R_{cm}). Per fer-ho hem vist que primer ens cal trobar els valors (n , K). Sabem que aquests valors els podem trobar coneixent algunes de les característiques de la resposta temporal del sistema a un esglaó.

Per tal de trobar aquesta informació s'han fet probes sobre el sistema físic global (tots els subsistemes).

- Hem aplicat a $t=0.5$ s, una tensió graó de 4 V, a l'entrada del motor, obtenint a la sortida del potenciòmetre la resposta que mostra la figura 4 (NO REPRODUÏDA AQUÍ)

Observacions: Sobre el sistema físic nosaltres només podem obtenir la sortida del potenciòmetre quan li entrem una tensió al motor. Per tant estem obtenint la resposta del sistema global que correspon a la fig.2, en canvi a nosaltres ens interessa identificar els paràmetres a partir del subsistema del qual he obtingut el model lineal, el subsistema pèndol + planxa. En aquest subsistema hi entra una força (la força de l'aire F_a) i s'obté com a sortida un angle . Així doncs, l'esquema de la figura 4 és la resposta a:

$$V_{potenc} = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

$$V_{motor} = V_{motor} \cdot F_a$$

Segons les especificacions donades a l'apartat 2 sobre el comportament de cada un dels subsistemes, podem expressar:

$$V_{potenc} = \frac{K_1 e^{-T_d s}}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2} \cdot \frac{K_2 \cdot K_3 \cdot n^2}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

$$V_{motor} = \frac{T_s + 1}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

Per tal de no complicar la identificació del sistema considerarem que la dinàmica del motor és molt més ràpida que la de la planxa de porexpan, el qual significa que els dos pols complexos són dominants. Fent aquesta consideració l'expressió anterior ens queda de la forma:

$$V_{potenc} = \frac{K_1 K_2 \cdot K_3 \cdot n^2}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2} \cdot e^{-T_d s}$$

$$V_{motor} = \frac{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}{s^2 + 2 \cdot n \cdot s + n^2}$$

- K3 és la constant que ens relaciona l'angle (en rad) amb la tensió i que mesurant-la en el laboratori ens ha donat un valor de $K3 = 6,37$
- K1 i K2 les trobarem a partir de l'estudi de la resposta de la figura 4

En el nostre sistema global l'expressió de (EQ-4) seria substituïda per l'expressió de (EQ-5)

Nota: Com aclariment direm que tot i veure a partir de la figura 4 que tenim un sistema de tercer ordre, per la forma de la resposta, nosaltres l'aproximarem a un sistema de 2on, segons pols dominants ja que són els sistemes que millor coneixem.

Identificació: Sobre la resposta de la fig.4 veiem que podem extreure els valors dels següents paràmetres:

$T_{pic} = 1'1$ sec Temps de pic

$M_{pic} = 4'12$ V Magnitud del sobrepic

$T_d = 0'25$ sec Temps de retard

La sortida del sistema controlat se'ns estabilitza a $4'1$ V (aprox)

Com es pot observar el sobrepic és molt baix, de l'ordre del 3%. Quan ens trobem amb aquests casos el paràmetre de sobrepic i temps de pic no ens serveixen per identificar el sistema. La identificació serà molt més bona si utilitzem el paràmetre temps de pujada, que podem extreure de la figura 4 i que té un valor de:

$T_{pj} = 0'12$ sec Temps de pujada (del 10% al 90%)

La fórmula per obtenir el temps de pujada és

$$T_{pj} \cdot n = 1 - 0'4167 + 2'917$$

- A partir dels valors anteriors extrets del gràfic de la resposta temporal de la fig.4 trobar els paràmetres (n , K) Correspondent a la funció de transferència de 2 ordre(EQ-5).

$K = K1K2K3$. Podeu utilitzar les fórmules del temps de pujada per trobar n i el sobrepic per calcular l'esmoreïment

- A partir del sobrepic determinarem l'esmoreïment del sistema

$$SP = \exp(- \zeta/(1-\zeta^2))$$

$$0'03 = \exp(- \zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}) \ln 0'03 = - \zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}$$

$$2 \cdot \ln 0'03 = - \zeta/(1-\zeta^2) \text{ Operant}$$

$$0.7106 = \zeta/(1-\zeta^2)$$

$$1.7106 = 1 - \zeta^2 = \underline{\underline{0.765}} \text{ (Esmorteïment del sistema)}$$

Cal tenir en compte que la ζ que hem trobat no és la real, s'hauria d'utilitzar algun altre paràmetre que no el sobrepic. L'esmoreïment real del sistema s'acostarà molt més a 1. A partir del temps de pujada determinarem la freqüència del sistema

$$T_{pj} \cdot n = 1 - 0'4167 + 2'917$$

$$0'12 \cdot n = 1 - 0'4167 + 2'917 = 1 - 0'4167 \cdot 0.765 + 2'917 \cdot 0.7652$$

$$0'12 \cdot n = 2.387 \quad \underline{n = 19.89 \text{ rad/sec}}$$

- la K total la obtindrem comparant valor final de sortida i valor d'entrada

$$K = \underline{V_{out}} = \underline{4'1} = \underline{1.025}$$

Vin 4

- A partir dels paràmetres anteriors i la funció de transferència trobada (EQ-3) identificar els paràmetres K1, K2, f, Rcm

- A partir del que hem trobat abans sabem:

$$n = (12g/r)^{1/2} \quad n = 19'89 \text{ rad/sec}$$

$$= 6 \cdot f / (m \cdot R_{cm}^2 (12g/r)^{1/2}) = 0'765$$

$$K_2 = 1/mg$$

- Substituint determinem tots els paràmetres que no sabem

$$19'89 = (12g/r)^{1/2}$$

$$395.6 = (117.7/R_{cm}) \quad \underline{R_{cm} = 0.298 \text{ m}}$$

$$K_2 = 1/mg = 1/0.022 \cdot 9.81 \quad \underline{K_2 = 4.633}$$

$$K_1 K_2 K_3 = 1.025$$

$$K_1 \cdot 4.633 \cdot 6.37 = 1.025 \quad \underline{K_1 = 0.0347}$$

$$0.765 = 6 \cdot f / (m \cdot R_{cm}^2 (12g/r)^{1/2})$$

$$0.585 = 36 \cdot f^2 / (m^2 \cdot R_{cm}^4 \cdot 12g/r)$$

$$0.585 = 36 \cdot f^2 / (0.02220 \cdot 2984 \cdot 395.56)$$

$$f^2 = 2.4387e-005 \quad \underline{f = 0.0049}$$

- Donar l'expressió de la funció de transferència (EQ-3) amb els valors dels paràmetres

$$\underline{(s)} = \underline{12 / (R_{cm} \cdot m)} = \underline{1833}$$

$$Fa(s) s^2 + (12 \cdot f / m \cdot R_{cm}^2) s + 12g/r s^2 + 30.41s + 395.6$$

- Donar l'expressió de la funció de transferència (EQ-5)

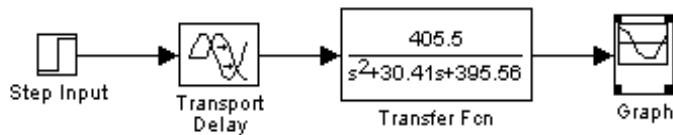
$$\underline{V_{potenc}} = \underline{K_1 K_2 \cdot K_3 \cdot n^2} \cdot e^{-T_d s} = \underline{405.5} \cdot e^{-0'25s}$$

$$V_{\text{motor}} s^2 + 2 \text{ ns} + n^2 s^2 + 30.41s + 395.6$$

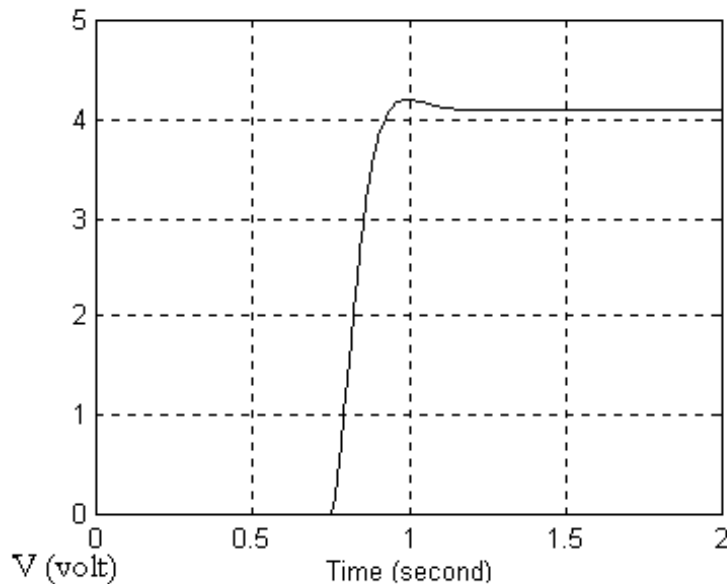
7- Simulació del model lineal obtingut mitjançant SIMULINK

Arribats a aquest punt ja tenim el model del sistema físic real. Per tal de veure si el model calculat es comporta d'igual forma que el físic caldrà entrar en una fase de testeig del model.

Com a comprovació de que el model lineal obtingut és vàlid es demana fer una simulació del sistema obtingut amb SIMULINK. Representeu la sortida del sistema per una entrada graó de 4V i comproveu si es correspon amb la resposta temporal de la fig 4



Per una entrada de 4V graó unitari la resposta ha estat de:



Comparant aquesta gràfica amb la que ens donen a l'apartat 4 veiem que són força semblants tot hi que a la de la fig-4 hi ha moltes discontinuïtats. Es pot veure que l'instant en que es produïx el sobrepic és a 0.97 s, i ens havien dit que apareixia a 1.1 s això és l'error que hi ha al agafar la linialització dels paràmetres i a utilitzar la fórmula del sobrepic, que es molt inexacte perquè el que ens apareix es molt petit.

La senyal s'estabilitza a 4V a més o menys 1.2 seg en canvi en l'altre hi ha certes oscil·lacions i s'estabilitza pels volts d'1.6 seg.

8- Simulació del model no linealitzat i comparació amb el model linealitzat

de la mateixa manera que abans hem simulat el model lineal per SIMULINK, ara es demana simular amb aquest paquet el model no lineal.

- Implementar el model no lineal en blocs SIMULINK a partir de l'equació diferencial no lineal.

$$m \cdot g \cdot R_{cm} \cdot \sin \theta + f \cdot R_{cm} - F_a \cdot \cos \theta \cdot R_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot R_{cm}^2 \cdot \ddot{\theta} = 0$$

valors obtinguts: $m = 0.022 \text{ kg}$, $R_{cm} = 0.2976 \text{ m}$, $f = 0.0049$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

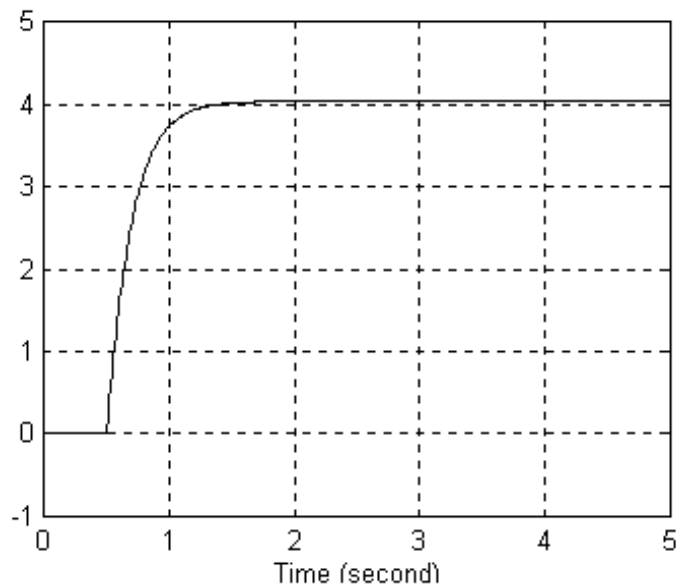
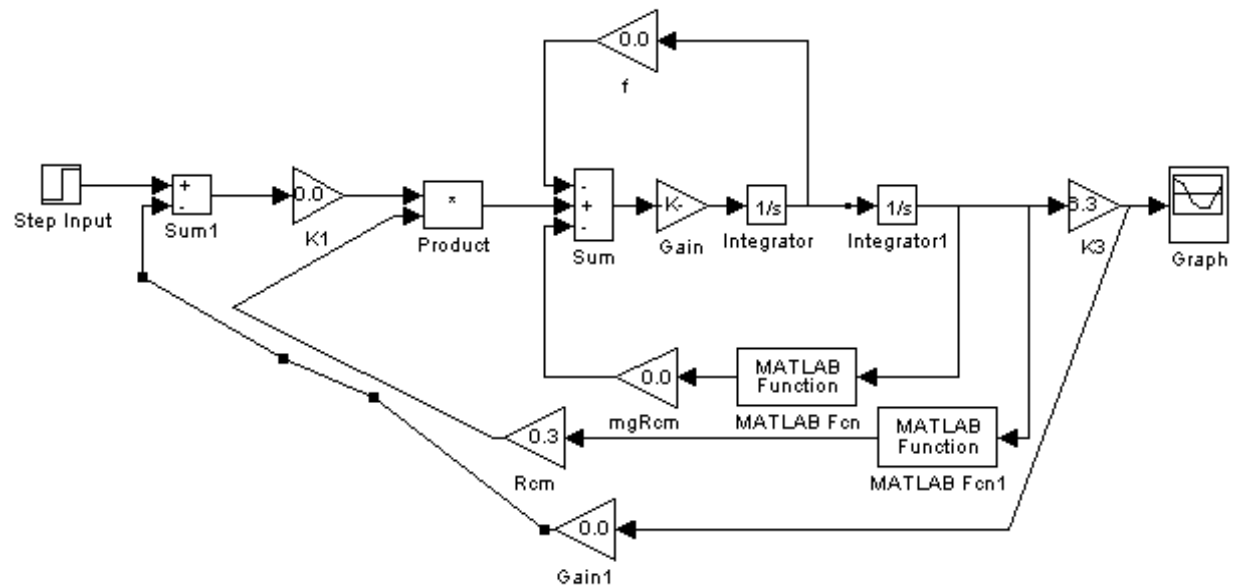
Substituint queda:

$$0.0642 \cdot \sin \theta + 0.0049 \cdot R_{cm} + 0.00016237 \cdot \ddot{\theta} = 0.2976 \cdot F_a \cdot \cos \theta$$

$$+ 30.18 + 395.15 \sin \theta = 1833 \cdot F_a \cdot \cos \theta$$

Aquesta es la funció que tenim per introduir-la en el SIMULINK

En el simulink es fa la simulació del sistema següent:



No es correspon exactament amb el model trobar a l'apartat lineal, en aquest el sobrepic és quasi nul, es pot dir que l'esmoreïment del sistema és de 1 aproximadament.

Tot hi aixó es considera que el model lineal és vàlid per angles petits

- A partir del diagrama en SIMULINK que heu representat, trobar quines tensions cal aplicar al motor per tal d'obtenir els següents angles de sortida

Sabem que la constant del potenciòmetre és 6.37 per tant podem comparar amb voltatges

out Vpot		Vin
10	1.57	1.32
20	3.14	2.87
30	4.71	4.85
45	7.07	10.9
25	3.93	3.85

Utilitzant el model no lineal els resultats aproximats són aquests, es pot veure que el Vin a 45° es separa moltíssim del de 30°

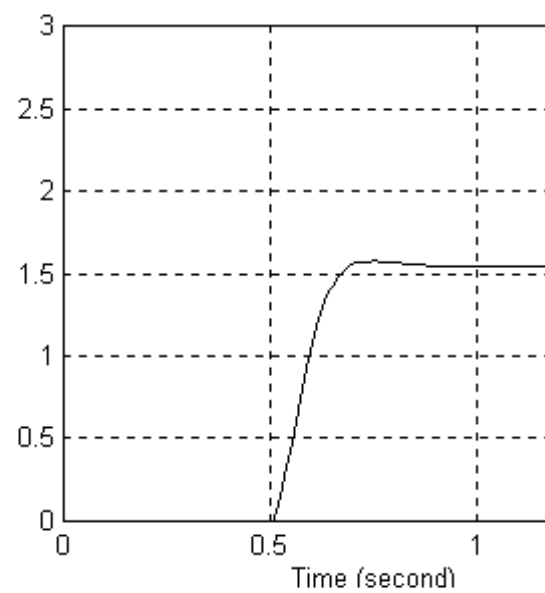
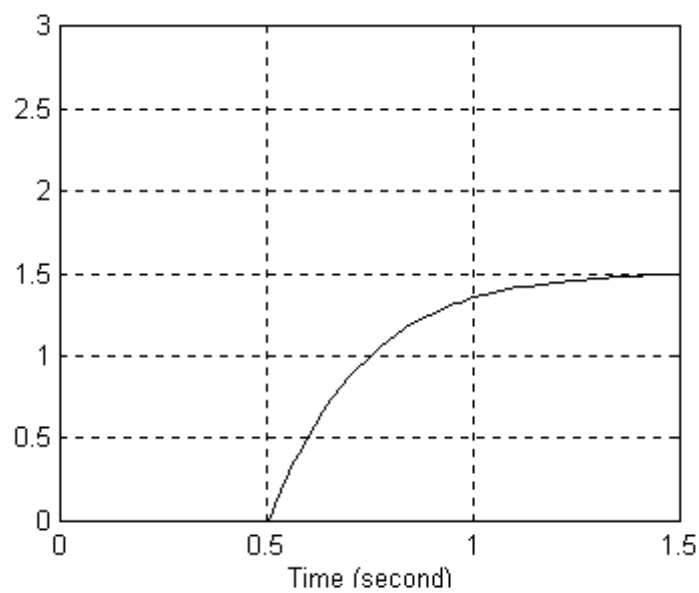
- Comparar les respostes temporals entre el model lineal i el no-lineal. Per fer-ho es demana que prenent els Vin trobats de la taula sobre el model no lineal s'apliquin aquests valors com a entrada graó del sistema SIMULINK del model lineal. Comparar les sortides dels angles i les respostes gràfiques

Ara s'ha agafat el model no lineal i s'han obtingut els angles a partir del voltatge

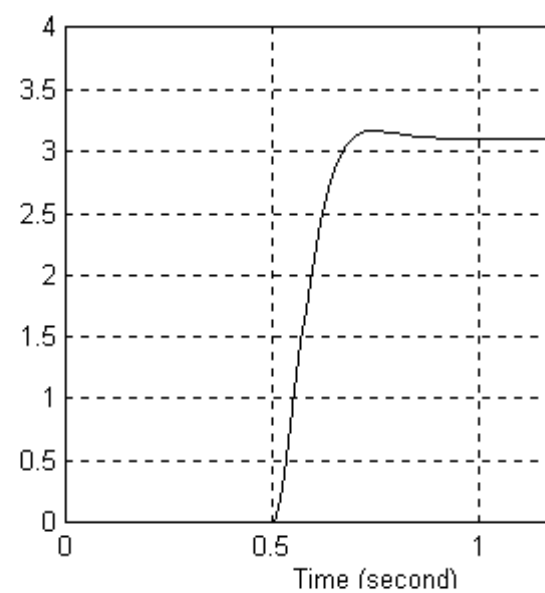
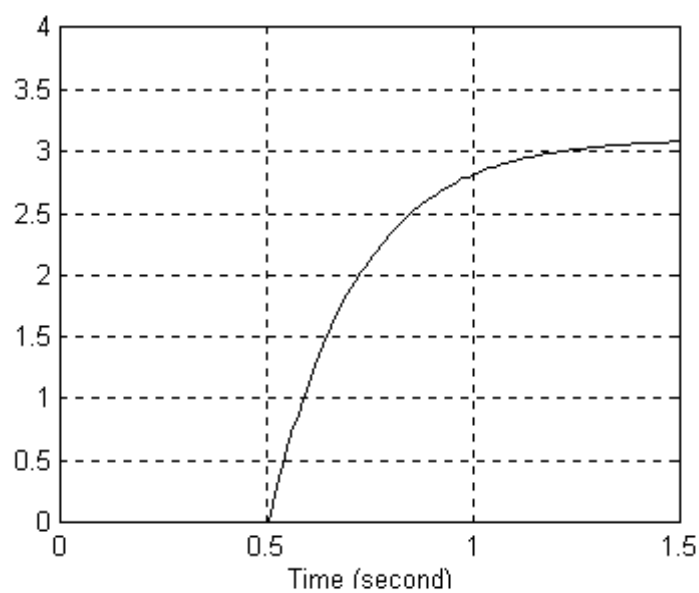
out Vpot		Vin (no Lin) Vin (Linear)	
10	1.57	1.32	1.53
20	3.14	2.87	3.06
30	4.71	4.85	4.59
45	7.07	10.9	6.89

S'han comparat les gràfiques del sistema linial i del no-lineal per tots els valors de la taula

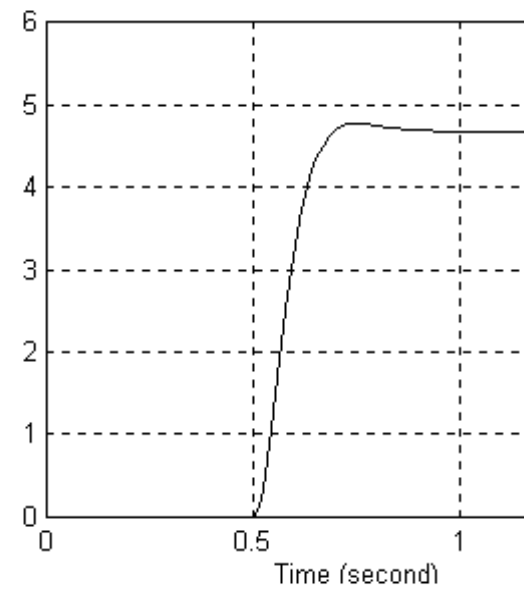
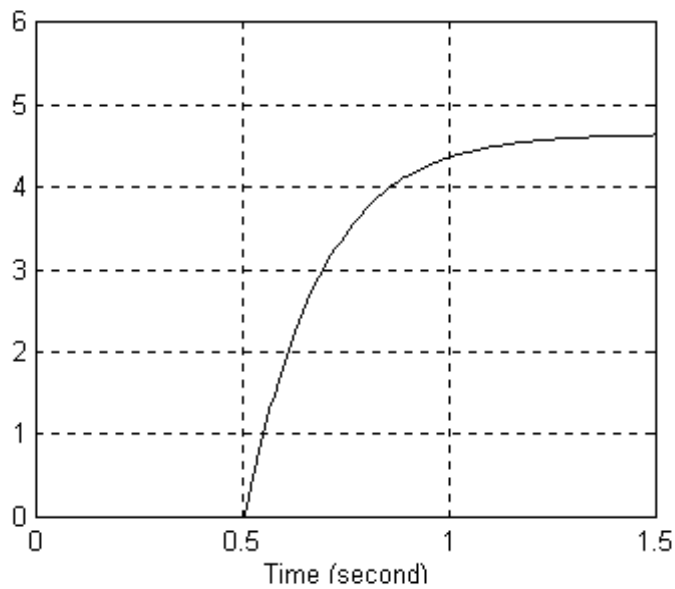
Angle 10°



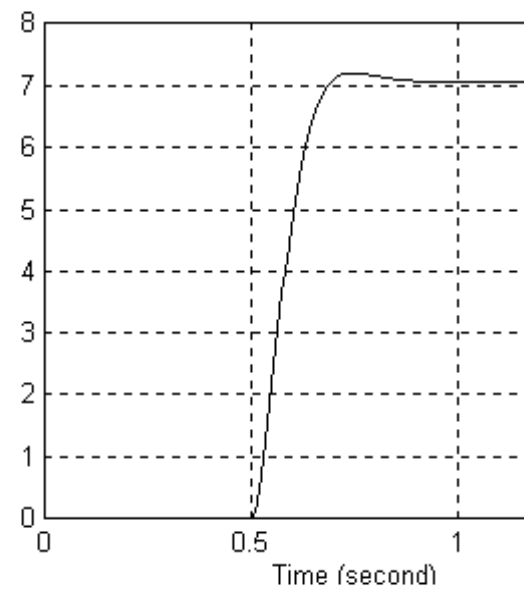
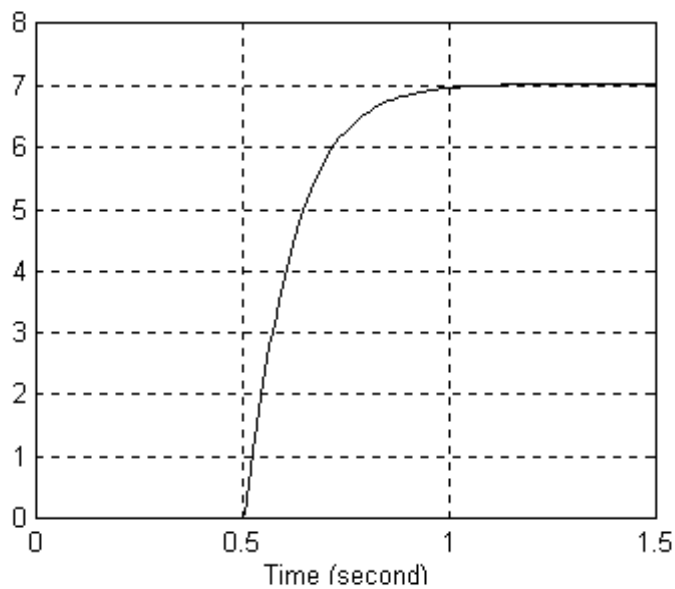
Angle 20°



Angle 30°



angle 45°



- A partir dels resultats anteriors, dir a partir de quins angles el sistema deixa de ser lineal

Veient els resultats podem apreciar que a una franja entre 30° – 45° el sistema ens deixa de ser lineal. Podem intentar averiguar més punts per determinar més exactament on hem de deixar el sistema lineal.

out Vpot		Vin (no Lin) Vin (Linear)	
30	4.71	4.85	4.59
31.5	4.95	5.23	4.83
33	5.18	5.75	5.05
35	5.5	6.42	5.37

A partir dels 32° Aproximadament el sistema deixa de ser lineal i el nostre model lineal ja no ens he serveix. Això es degut a què les simplificacions ja no ens funcionen:

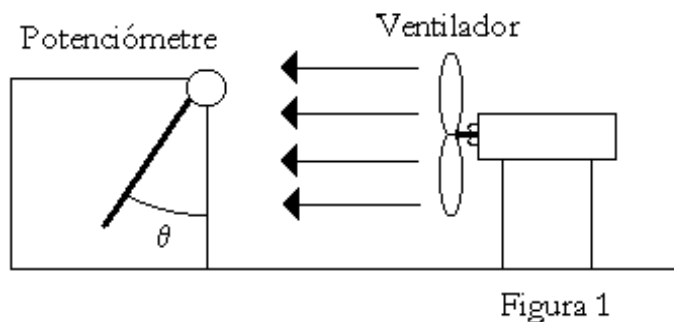
$\cos 32 \approx 0.85$ $\cos 0 = 1$ (aproximació ja molt dolenta)

$\sin 32 \approx 0.53$ $\sin 0 = 0$

DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REAL (II)

• – Enunciat del problema de control

En aquesta pràctica dissenyarem un sistema de control per tal de controlar la posició de l'eix del sistema format per la planxa i el ventilador presentat en la pràctica anterior..

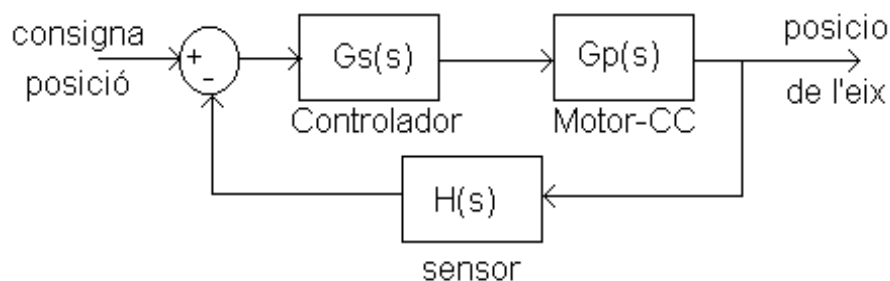


• Donar l'expressió de la funció de transferència (EQ-5)

$$V_{\text{potenc}} = \frac{K_1 K_2 K_3}{n_2} * e^{-T_d s} = 405.5 * e^{-0.25 s}$$

$$V_{\text{motor}} = \frac{s^2 + 2 n s + n^2}{s^2 + 30.41 s + 395.6}$$

A partir de la funció de transferència que varem obtenir de la pràctica 7



Les especificacions de disseny que s'han fixat per la resposta temporal del sistema controlat són les següents:

- La resposta del sistema controlat ha de presentar un sobrepic inferior al 5%
- L'instant en què es produeix el sobrepic ha d'ésser igual a 0.1 seg.
- El sistema dominant presenta 2 pols dominants
- L'error estacionari davant una consigna graó ha d'ésser igual a 0

Es demana

- Determinar quina ha d'ésser la posició dels pols del sistema controlar per tal de complir les especificacions de disseny
- Determinar quin és l'ordre del sistema i el seu error estacionari davant d'una entrada en forma de graó i en forma de rampa.

a)

Per les quatre condicions següents ens imposen els següents requeriments:

- $SP < 5\%$ d'altres pràctiques sabem que $\zeta > 0.692$
- $T_p < 0.1 \text{ sec}$

$$T_p = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.707 \cdot 0.707} > 44'43$$

$$\omega_n = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s}$$

- El sistema presenta 2 pols dominants

Podem muntar l'equació del sistema de 2on ordre a partir de ω_n i ζ

$$K_1 K_2 K_3 \frac{1}{s^2} = \frac{1.025 \cdot 44'442}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 10 s + 10^2} = \frac{2024}{s^2 + 14'14 s + 1975}$$

$$s^2 + 14'14 s + 1975 = 0$$

Solucionant el denominador veiem que els pols dominants són:

$$s_{1,2} = -7'07 \pm j 11'75$$

$$|s_{1,2}| = 14'14$$

300 Establím el pol a una distància més o menys 10 vegades els pols dominants

- L'error estacionari davant un graó 0

Per satisfer-ho cal que el tipus del sistema sigui I, que presenti 1 integrador en la seva funció de transferència en llaç obert.

b)

Per determinar-ho podem entretenir-nos a fer el límit o a utilitzar la susodicha taula dels errors en funció del tipus del sistema

Graó : Per un sistema de tipus 0, l'error és $1/(1+K_p)$

En el nostre sistema:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s) = K = 1'025$$

$$s \rightarrow 0$$

$$E_{ss} = 1/(1+K_p) = 1/2.025 = 0.49$$

Rampa: Per un sistema de tipus 0, l'error és infinit, no ens acostem mai a la rampa.

8.2. Disseny del controlador PID fent servir el mètode d'assignació de pols

El controlador que es proposa utilitzar per a aconseguir controlar la inclinació de la planxa és un controlador PID

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s$$

L'ajuste d'aquest controlador es farà fent servir el mètode **d'assignació de pols simple**

El disseny de controladors mitjançant el mètode d'assignació de pols simple consisteix en determinar el controlador a partir de la condició de què el sistema controlat tingui els pols en el lloc desitjat, sigui:

$$G_c(s) = N_c(s) / D_c(s)$$

La funció de transferència del controlador i sigui:

$$G_p(s) = N_p(s) / D_p(s)$$

La funció de transferència del procés a controlar, llavors la funció de transferència del sistema controlat suposant que la realimentació és unitària valdrà:

$$T(s) = \frac{N_c(s) \cdot N_p(s)}{D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s)}$$

A partir de les especificacions de disseny determinarem la posició dels pols del sistema controlat i per tant el polinomi denominador $P(s)$ de la funció de transferència del sistema enllaç tancat $T(s)$. Igualment el polinomi desitjat amb el polinomi a ajustar determinarem els paràmetres del controlador

Aquesta equació s'anomena **equació diofàntica**.

Es demana determinar:

- Determinar l'expressió de l'equació diofàntica prenent com a controlador un controlador PID i com a model del sistema ventilador + planxa obtingut de la pràctica anterior. (nota: per al disseny del controlador no tindrem en compte el retard pur que s'observa que presenta el sistema, ja el considerarem més endavant).
- Determinar quina és l'expressió del denominador desitjat $P(s)$ a partir de les especificacions de disseny del problema i tenint en compte que el sistema controlat presenta dos pols complexos conjugats dominants
- Plantegen les equacions de disseny que se'n deriven
- Resoleu el sistema d'equacions obtingut per a determinar els valors dels paràmetres del controlador PID: K_p , K_i i K_d

a)

De les funcions de transferència anteriors:

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s = (K_d s^2 + K_p s + K_i) / s$$

$$G_p(s) = 405.5 / (s^2 + 30.3s + 395.6)$$

$$Gd(s) = Gc(s) * Gp(s) = 405'5(Kds^2 + Kps + Ki) / (s^3 + 30.3s^2 + 395.6s)$$

A partir d'aquí obtenim la funció de transferència en llaç tancat:

$$T(S) = \frac{Nc(s) * Np(s)}{Dc(s)Dp(s) + Nc(s)Np(s)} = \frac{405'5(Kds^2 + Kps + Ki)}{s^3 + (30'3 + 405'5Kd)s^2 + (395'6 + 405'5Kp)s + 405'5Ki}$$

$$Dc(s)Dp(s) + Nc(s)Np(s) = s^3 + (30'3 + 405'5Kd)s^2 + (395'6 + 405'5Kp)s + 405'5Ki$$

b)

A partir del polinomi que hem obtingut a l'apartat 8.1:

Multipliquem els pols complexe conjugats dominants i el pol real recessiu.

$$P(s) = (s+300)*(s^2 + 62'2s + 1975) = s^3 + 362'5s^2 + 20635s + 592500$$

El pol està a una distància d'aproximadament 10 dels complexos, per tant és recessiu.

c)

Igualant els polinomis P(S) i el denominador de T(S) obtenim l'equació diofàntica:

$$s^3 + 362'5s^2 + 20635s + 592500 = s^3 + (30'3 + 405'5Kd)s^2 + (395'6 + 405'5Kp)s + 405'5Ki$$

D'aquí en deriven 3 equacions independents:

$$362'5 = 30'3 + 405'5Kd$$

$$20635 = 395'6 + 405'5Kp$$

$$592500 = 405'5Ki$$

d)

Resolent les 4 equacions obtenim els següents valors dels paràmetres del controlador PID

$$Kd = 332'2 / 405'5 = 0'82$$

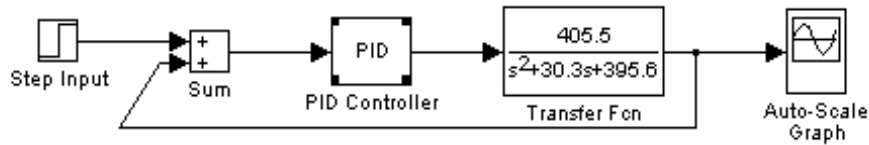
$$Kp = 20239'4 / 405'5 = 49'9$$

$$Ki = 592500 / 405'5 = 1461$$

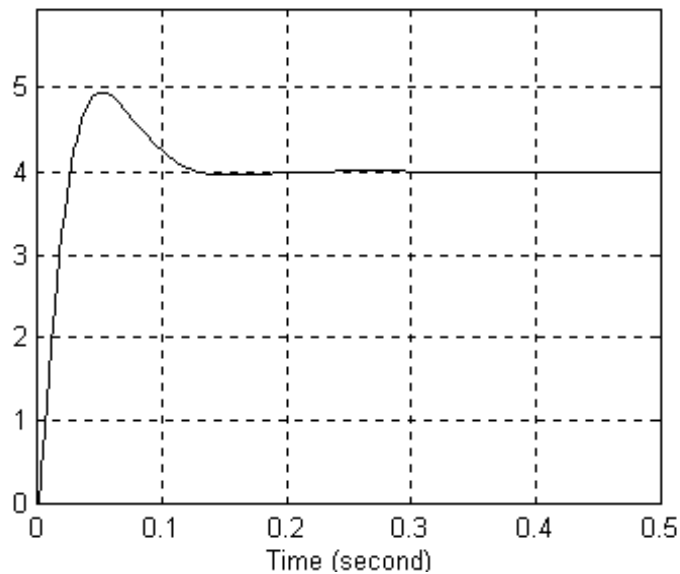
8.3. Simulació del sistema controlat amb el SIMULINK

Una vegada dissenyat el controlador es demana comprovar el seu funcionament en simulació. Per això es proposa utilitzar el simulador SIMULINK

- Simular el funcionament del sistema de control fent servir com a model de simulació de la planta el model ventilador-planxa lineal obtingut en la pràctica anterior. Es compleixen les especificacions de disseny?

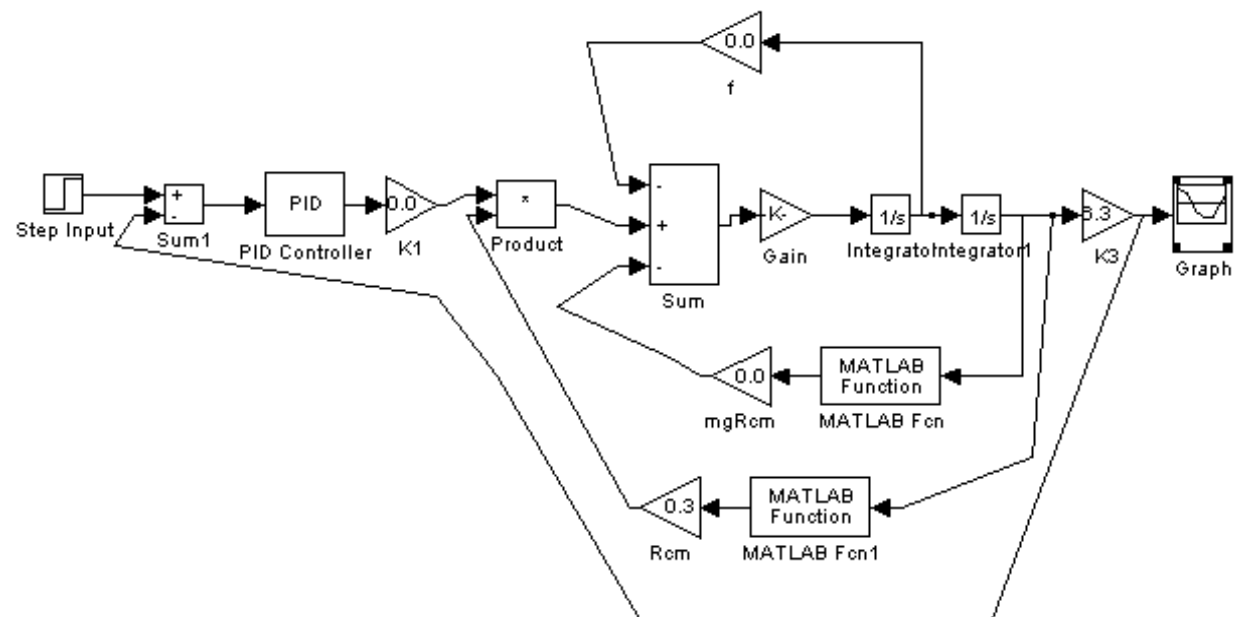


La gràfica de la resposta temporal és la següent:



Com podem apreciar la resposta no compleix les especificacions de disseny perquè té un sobrepic molt superior al 5%, això es degut als 0s que tenim en el denominador.

Simular el funcionament del sistema de control utilitzant el model no lineal obtingut en la pràctica anterior. Què s'observa? Proveu el comportament del sistema de control per diferents valors de consigna. Per a quin rang de consignes funciona millor el sistema de control, perquè?



S'han fet les proves per diferents consignes i el sistema ens ha sortit inestable per a totes les consignes que hem donat. Per tant, el controlador que hem obtingut pel model lineal no ens funciona pel model no lineal.

Això es degut a què el model lineal no s'ajusta totalment al no-lineal. Les simplificacions que hem fet i el fet d'utilitzar el sobrepic per determinar la funció de transferència del sistema ens fa que els pols no estiguin al lloc adequat i per tant, el sistema se'ns torni inestable: Segurament el pol que hem suposat a $S+300$ està situat en la regió inestable.

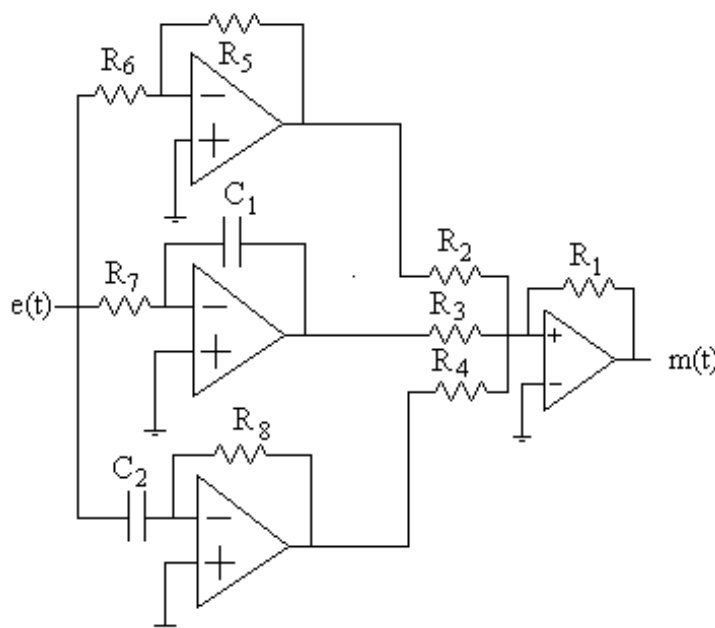
El controlador no funciona per a cap rang de consignes

8.4. Implementació del controlador PID

Suposem que ara volem implementar el controlador PID físicament per a controlar el ventilador. Tenim dues opcions:

• Implementació analògica del controlador PID

La implementació analògica del sistema consisteix en determinar un circuit electrònic que tingui una funció de transferència com la del PID. L'ajust del PID consisteix en l'ajust dels paràmetres dels components del circuit electrònic. En aquesta pràctica es proposa el circuit electrònic de la figura per a implementar el PID:



Obtenció de la funció de transferència d'aquest circuit

Amp.Op 1: $G1(s) = -R5/R6$ Proporcional

Amp.Op 2: $G2(s) = -1/C1R7s$ Integrador

Amp.Op 3: $G3(s) = -R8C2s$ Derivador

Amp.Op 4: $Gt(s) = \frac{-R1}{R2}G1(s) - \frac{R1}{R3}G2(s) - \frac{R1}{R4}G3(s)$

R2 R3 R4

$$G_c(s) = \frac{R_5 R_1}{R_2 R_6 C_1 R_7 R_3 s R_4} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 R_8 C_2 s}{R_2 R_6 C_1 R_7 R_3 s R_4}$$

$$R_2 R_6 C_1 R_7 R_3 s R_4$$

El nostre controlador PID té la següent funció de transferència:

$$G_c(s) = 0.82s + 49.9 + 1461/s$$

Suposicions:

1- $C_1 = 1nF$, $C_2 = 1 F$ (condensadors físicament possibles)

- $R_2 = R_3 = R_4 = R_1 = 330 K$

Lavors obtenim els següents paràmetres:

$$0.82 = R_8/10000000 \quad R_8 = 820 K$$

$$1461 = 109/ R_7 \quad R_7 = 685 K \quad \text{Aprox. } 680 K$$

$$49.9 = R_5/R_6 \quad R_5 = 1 M ; R_6 = 20K$$

Aquestes resistències pertanyen a la sèrie E-12, per tant es poden trobar en un laboratori d'electrònica. La seva tolerància és d'un 10%.

Implementació analògica del controlador PID

En l'actualitat resulta més fàcil implementar el PID usant un ordinador. Ens fa falta una tarjeta d'adquisició de dades que ens faci la conversió analògic-digital i digital analògic i el programa que ha d'executar l'ordinador per comportar-se com un PID, tal com s'indica a la figura

• Equació discreta del PID

La funció de transferència d'un PID en el temps continu es descriu com:

$$G(s) = K_p + K_d s + K_i/s$$

K_p Es un guany constant K_p , no es pot realitzar una resolució infinita

K_d aproximem la derivada de la següent manera:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{T} * [f(KT) - f((K-1)T)]$$

$$d(t) T$$

Aplicant la transformada z ens queda:

$$G_d(s) = K_d (z-1)/Tz$$

K_i Aproximem la integral utilitzant la regla dels trapezis

$$f(Kt) = f((K-1)t) + 0.5T [f(KT) + f((K-1)T)]$$

Aplicant la transformada z ens queda:

$$G_i(z) = K_i \cdot T(z+1)/2(z-1)$$

La funció de transferència total del PID discret ens queda:

$$G_c(z) = \frac{(K_p + TK_i/2 + K_d/T)z^2 + (TK_i/2 - K_p - 2K_d/T)z + K_d/T}{z(z-1)}$$

T = temps de mostreig

K_p = Constant proporcional PID en domini continu

K_d = Constant derivativa PID en domini continu

K_i = Constant integral PID en domini continu

• **Determinació dels paràmetres del PID digital**

Substituïm pels nostres paràmetres:

$$K_p = 49.9; K_d = 0.82; K_i = 1463$$

Obtenim:

$$G_c(z) = \frac{(49.9 + 731.5T + 0.82/T)z^2 + (731.5T - 49.9 - 1.64/T)z + 0.82/T}{z(z-1)}$$

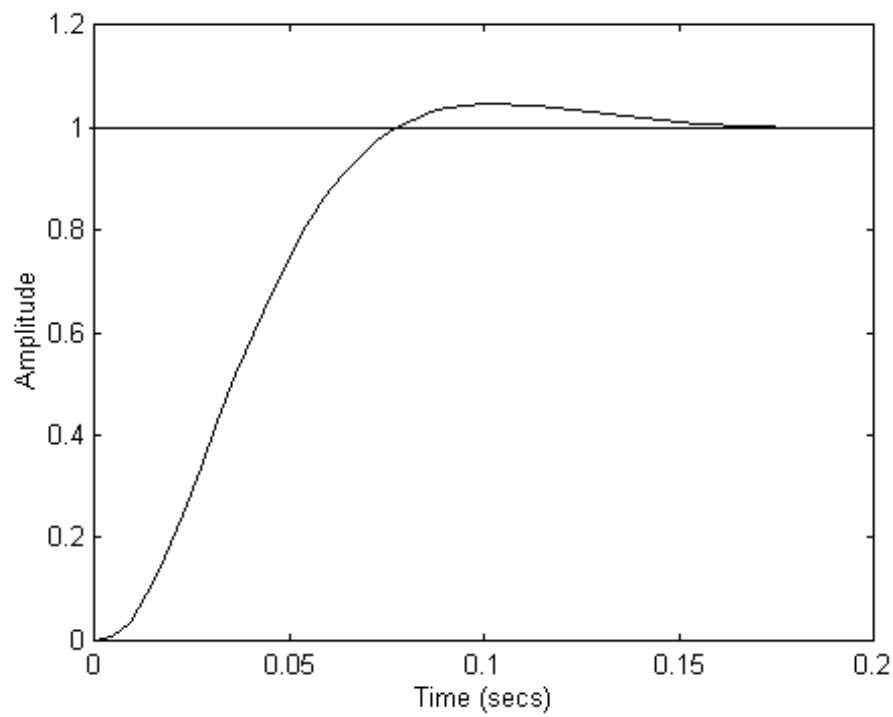
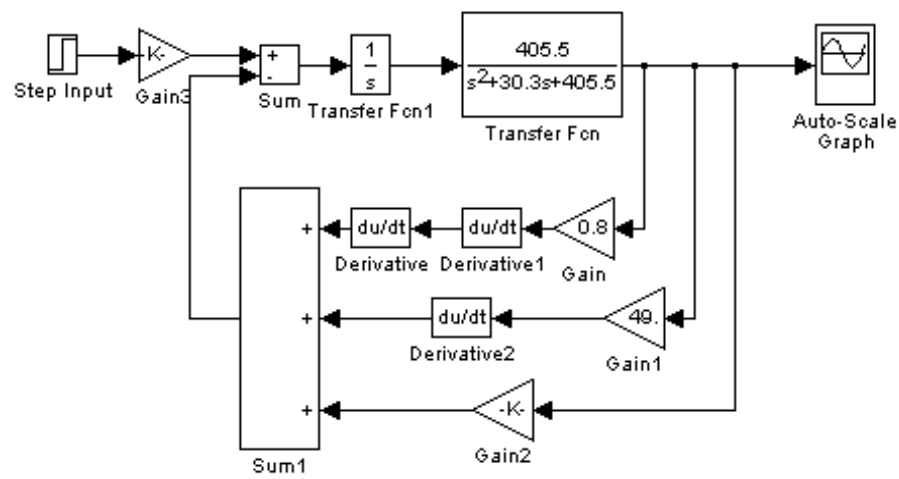
Aquest controlador seria marginalment estable perquè les arrels del polinomi característic estan a dins del cercle unitari $|z| = 1$, però n'hi ha una a $(z-1)$

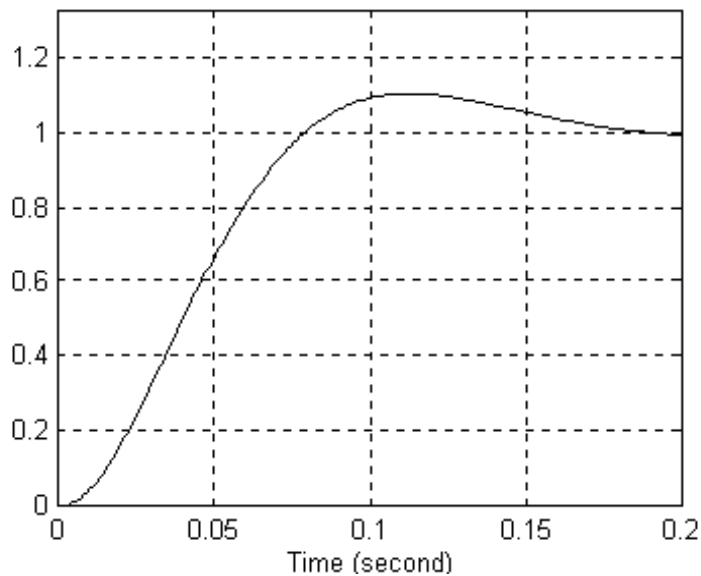
8.5. Efecte dels zeros del controlador: Assignació de pols completa

Si observem la funció de transferència del sistema controlat obtinguda a l'apartat 8.2 podem veure que si bé el denominador és aquell que nosaltres haguem fixat per disseny P(S) el numerador ha canviat. Respecte a funció de transferència del sistema sense controlar, per tant si observéssim la resposta del sistema controlat veuríem que no es correspon exactament amb la resposta desitjada. Això es deu a que hem afegit al numerador del sistema controlat un zero respecte a la funció del sistema sense controlar. Per evitar aquesta addició d'un zero que fa que la resposta no es correspongui exactament amb la desitjada hem de variar lleugerament l'estructura del sistema de control. Simplement reestructurant la posició del controlador dins del sistema de control tal com s'indica es pot comprovar que si recalculem la funció de transferència del sistema controlat s'obté:

$$T(S) = \frac{N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)} = \frac{405'S}{s^3+(30'S+405'SK_d)s^2+(395'S+405'SK_p)s+405'SK_i}$$

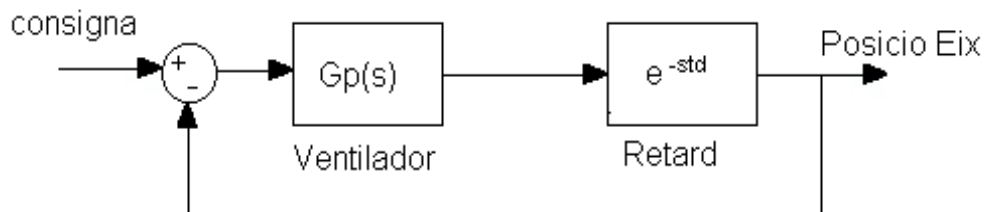
Aquest tipu de controlador s'anomena **d'assignació de pols completa**, perquè només modifica el denominador del procés sense fer variar el numerador.





8.6. Efecte del inestabilitzador del retard

Si tenim en compte el retard present en el model del sistema observarem al simular el sistema controlat que el seu efecte és el desestabilitzar el sistema.



Si determinem la funció de transferència del sistema realimentat veurem que el retard apareix com un terme més del denominador. Normalment l'efecte d'aquest terme és desestabilitzar el sistema realimentat.

$$T(S) = \frac{G_p(s) * e^{-std}}{1 + G_p(s) * e^{-std}}$$

$$1 + G_p(s) * e^{-std}$$

Per a poder estudiar l'efecte inestabilitzador del retard del sistema utilitzarem els diagrames de Bode. Es demana:

- Fent ús del diagrama de Bode determinar el marge de fase del sistema sense tenir en compte el retard i fent ús del lloc d'arrels determineu la Klímit per aquest sistema.
- Fent ús del diagrama de Bode determinar el marge de fase del sistema si tenim en compte el retard i fent ús del lloc d'arrels determineu la Klímit per aquest sistema.
- Veient els resultats dels apartats anteriors que podem afirmar sobre l'estabilitat del sistema de control d'un sistema amb retard.

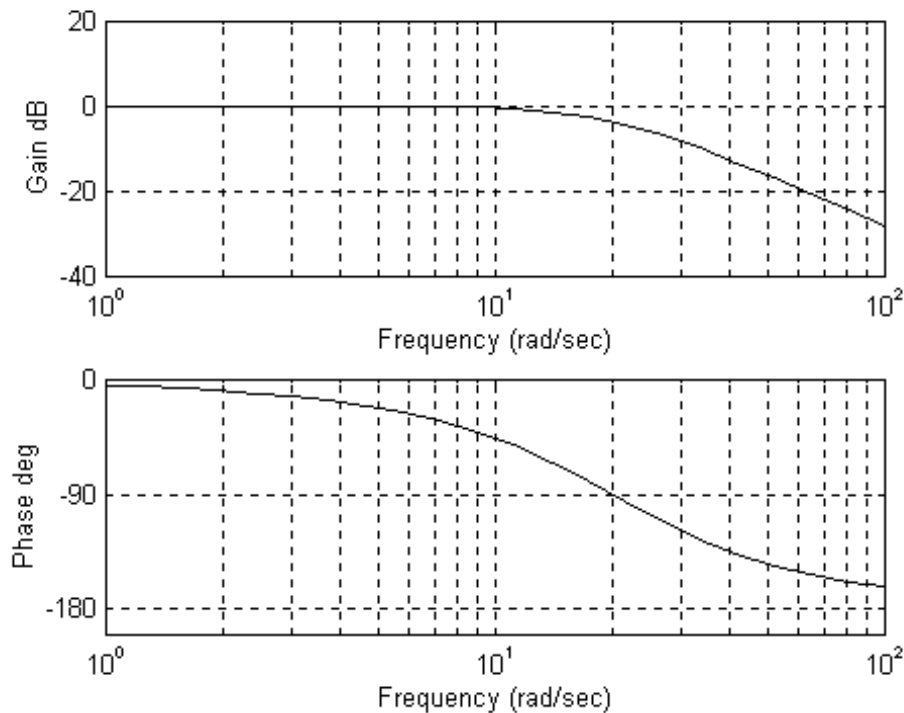
a)

Agafem la funció de transferència del ventilador solament:

$$G_p(s) = \frac{405'5}{s^2 + 30'3s + 395'6} \quad \text{realimentat: } \frac{405'5}{s^2 + 30'3s + 801'1}$$

$$s^2 + 30'3s + 395'6 \quad s^2 + 30'3s + 801'1$$

Fent el diagrama de Bode:



No cal utilitzar el lloc d'arrels per determinar la K límit. Sapiguent que és un sistema amb només 2 pols i cap zero, i mirant les trazes de Bode podem veure que mai es creuarà la línia dels -180° , per tant, la K límit serà infinit.

b)

Per fer-ho necessitem utilitzar l'aproximació de Padé. Aquesta aproximació ens diu:

$$e^{-td} \approx \frac{1 - tdS/2}{1 + tdS/2}$$

$$1 + tdS/2$$

Llavors la funció de transferència ens queda:

$$G_p(s) = \frac{405'5 \cdot (1 - tdS/2)}{s^2 + 30'3s + 395'6} = \frac{405'5 - 202'25Tds}{s^2 + 30'3s + 395'6}$$

$$s^2 + 30'3s + 395'6 \cdot (1 + tdS/2) = \frac{1}{2}TdS^3 + (1 + \frac{1}{2}Td)s^2 + (30'3 + 15'7Td)s + 395'6$$

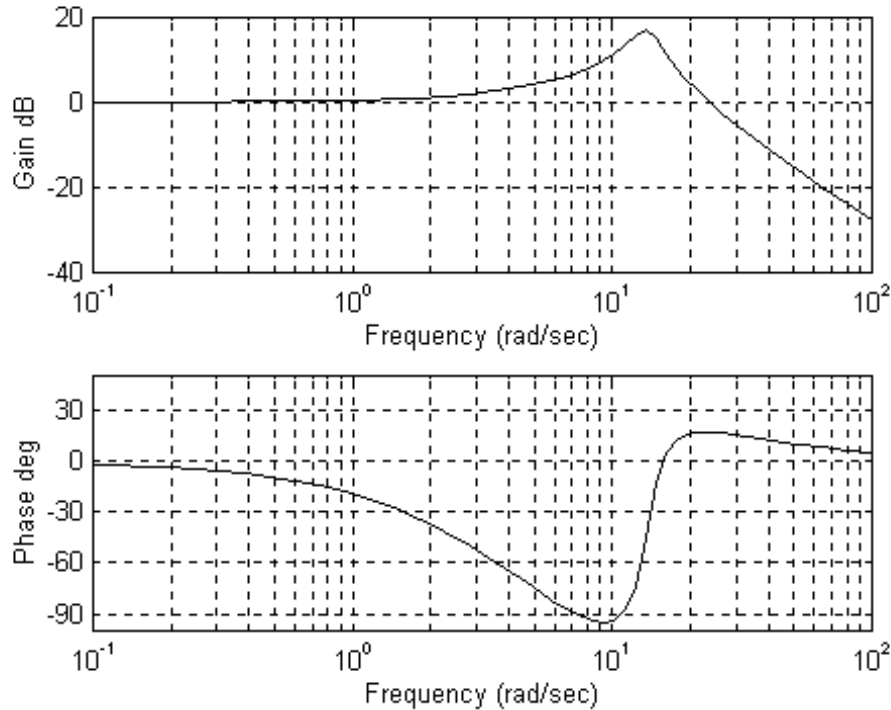
$Td = 0'5$ El retardo és de 0'5 seg en el sistema

Llavors substituint la funció de transferència en obert ens queda:

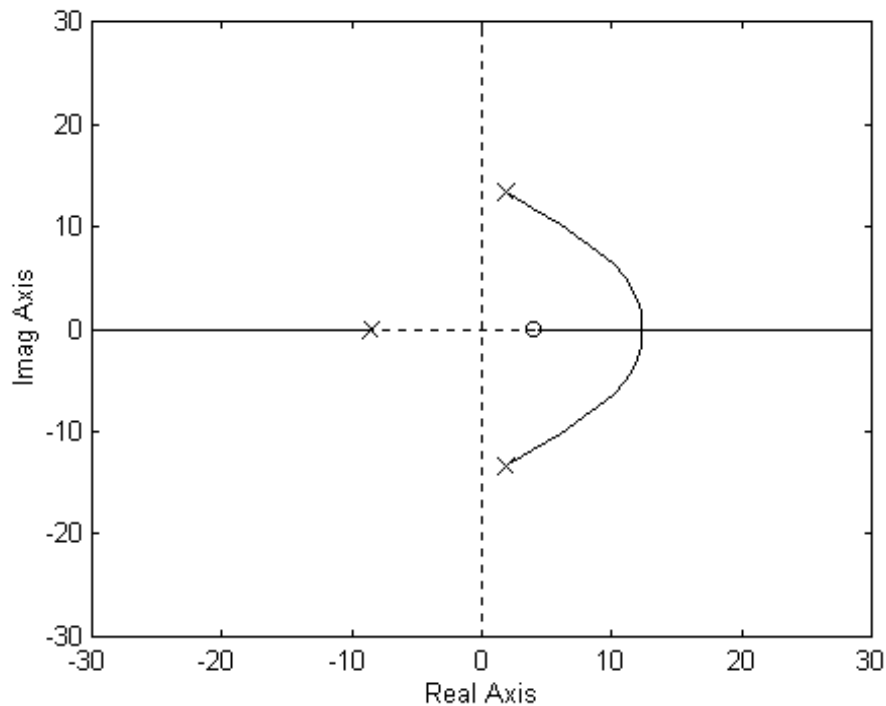
$$G_p(s) = \frac{1622 - 404's}{s^3 + 5s^2 + 152's + 1583}$$

$$s^3 + 5s^2 + 152's + 1583$$

Per intentar trobar la Klímit, buscarem quan els 3 pols són positius amb un lloc d'arrels per intentar aproximar la Klímit:



Advertencia La igualtat de Padé només serveix per a freqüències petites, a freqüències grans no ens serveix degut a què es una sèrie de Taylor i a valors grans l'error que cometem es molt gran i no ens serveix. Per tant el diagrama de Bode només es valid per a baixes freqüències (entre 0'1 i 10 Hz aproximadament)



Veiem que sempre és inestable per qualsevol K positiva. Per tant el que ens fa el retard es desestabilitzar-nos el sistema.

8.7. EL PREDICTOR SMITH

La funció de transferència amb el predictor Smith, és

$$T(S) = \frac{G_p(s)G_c(s)e^{-T_d s}}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

$$1 + G_p(s)G_c(s)$$

Calculant-la segons els nostres valors

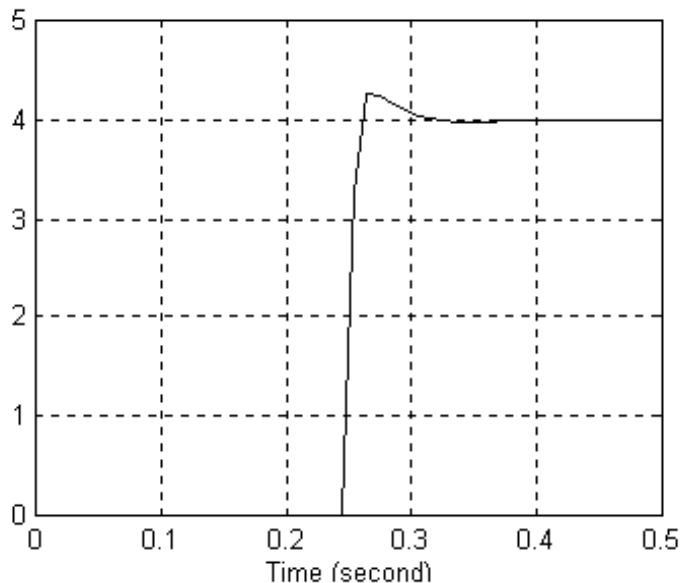
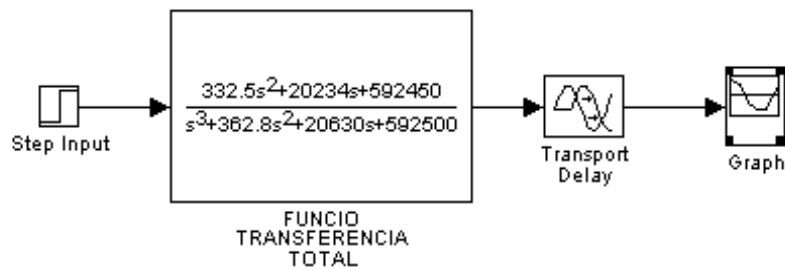
$$G_p(s) = \frac{405'5}{s^2 + 30'3s + 395'6} \quad G_c(s) = \frac{0'82s^2 + 49'9s + 1461}{s^3 + 362.8s^2 + 20630s + 592500}$$

$$s^2 + 30'3s + 395'6$$

$$T(S) = \frac{332'5s^2 + 20234s + 592450}{s^3 + 362.8s^2 + 20630s + 592500} e^{-0'5t}$$

$$s^3 + 362.8s^2 + 20630s + 592500$$

Fent us del simulink amb el PID de l'apartat 8.2, comprovar que s'obté la mateixa resposta que a l'apartat 8.3 llevat d'un retard.



Disseny del controlador PID fent servir el mètode de Ziegler Nichols

En aquest apartat, ajustarem els paràmetres d'un controlador PID analògic que ens permeti controlar el procés seguint el procediment empíric d'ajust en llaç tancat de Ziegler–Nichols.

El procediment consisteix inicialment en col·locar un controlador de tipus proporcional P, amb un guany petit, i obtenir la resposta del sistema controlat a una consigna de tipus graó. A continuació, augmentarem el guany del controlador i tornarem a aplicar un graó. Aquest procés s'anirà repetint fins a obtenir una resposta oscil·latòria mantinguda del sistema controlat. Una vegada aconseguida aquesta oscil·lació mantinguda, anotarem el guany crític que l'ha produïda K_{pc} així com el període de l'oscil·lació T_c

Segons Ziegler–Nichols el paràmetres del controlador són:

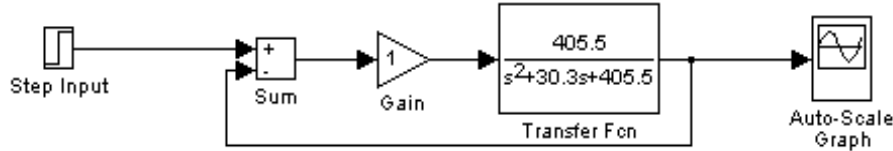
K		Ti	Td
PID Controler	0'6 K_{pc}	0'5 $\cdot T_c$	0'125 T_c
PI Controler	0'45 K_{pc}	$T_c/1.2$	
P Controler	0'5 K_{pc}		

On la funció de transferència el controlador PID és:

$$G_c(s) = K(1 + 1/TiS + Tds)$$

Es demana:

- Fent us del simulink i del model de la planta del sistema ventilador–planxa i sense tenir en compte el retard determineu els paràmetres d'un controlador PID pel mètode de Ziegler–Nichols que us acabem de presentar:



S'han anat provant diferents valors de K i s'ha aconseguit aquesta resposta per una K de:

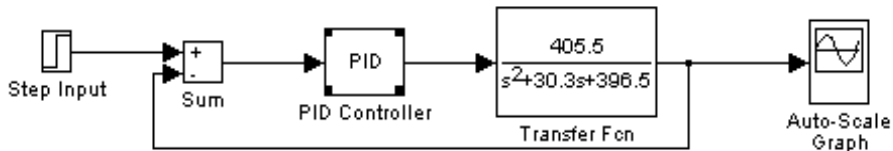
$$K = 2$$

$$T = 0.1 \text{ sec}$$

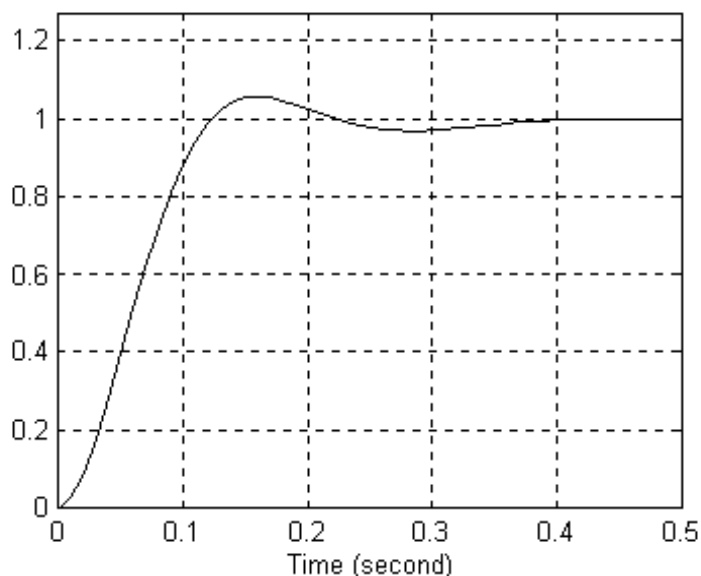
- Fent us del SIMULINK comproveu que el controlador PID aconsegueix controlar adequadament el sistema format pel ventilador–Planxa .

El sistema controlat segons la K i el T, el PID ens queda així

$$K = 1'2; K_i = 16; K_d = 0.0125$$



La resposta pel sistema controlat és la següent amb el PID de Ziegler–Nichols:



Podem veure el que el sistema controla satisfactòriament el sistema, nosaltres podríem variar els paràmetres

del controlador PID per obtenir un millor controlador:

- Si ara es té en compte el retard, fent ús del que hem vist en aquesta pràctica com eliminaríem el seu efecte de forma que no haguéssiu de redissenyar el PID obtingut per Ziegler–Nichols.

Per fer-ho hauríem d'utilitzar el predictor d'Smith, ja que aquest ens treu el factor de retard del denominador i fa que el sistema no se'n inestabilitzi. La nova funció de transferència enllaç tancat seria:

$$T(s) = \frac{G_p(s) \cdot G_c(s) \cdot e^{-sT_d}}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

També es podria intentar utilitzar el mètode de Ziegler–Nichols enllaç obert enlloc del que utilitzem que és enllaç tancat. Funciona si $T/L > 4$, en el nostre cas no funcionaria.

- Quina avantatge creus que presenta un mètode empíric com el de Ziegler–Nichols davant de mètodes algebraics com el d'assignació de pols:

Els avantatges són

- No cal conèixer la funció de transferència del sistema per aplicar Ziegler–Nichols
- Es poden utilitzar per controlar sistemes que tinguin un ordre molt més gran que 2, això ens portaria molta feina algebraicament en canvi així només es basa en fer proves al sistema i no perdre temps amb càlculs.
- Pot utilitzar-se per programar els PID's autoajustables, els controladors autoajustables realitzen ells mateixos les proves i llavors s'autoajusten amb els valors de Ziegler–Nichols. Llavors si volem canviar-los podem regular-los nosaltres.

PART TEÒRICA DE L'ASSIGNATURA

Apunts Bàsics de Regulació Automàtica

Diagrames de Block i funcions de transferència

Funcions de Transferència

$$G(s) = Y(s)/U(s) \text{ sortida } Y(s) = L[y(t)] \text{ entrada } U(s) = L[u(t)]$$

Normalment la funció de transferència s'obté a partir de l'equació diferencial

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0) U(s)$$

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Propietats de la funció de transferència

- ***definida solament per un sistema linial invariant amb el temps***
- ***Es la transformada de Laplace de la resposta a l'impuls***
- ***Relació entre la transformada de Laplace de la sortida i la de l'entrada***
- ***Totes les condicions inicials del sistema són iguals a 0***
- ***Es independent de l'entrada del sistema***
- ***S'expressa en la variable complexa s de Laplace***

- Es estrictament pròpia si $n > m$, pròpia si $n = m$ i impròpia si $n < m$

Polinomi característic

Es defineix com la equació que s'obté al igualar el polinomi de $G(s)$ a 0

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

Ens serveix per determinar l'estabilitat dels sistemes

Diagrames de blocks

S'utilitzen per a modelitzar sistemes. Estudiar les relacions de causa-efecte dels sistemes

Si es coneixen les lleis matemàtiques que governen el sistema

Els elements bàsics d'un diagrama de blocks són:

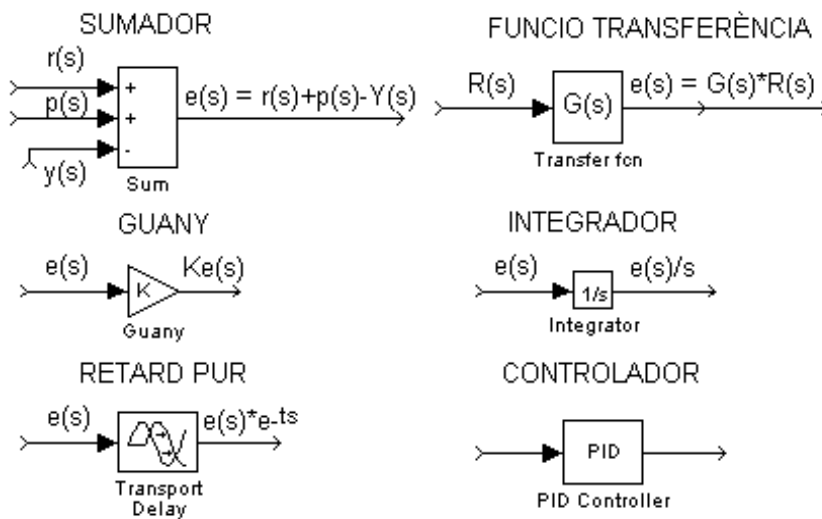
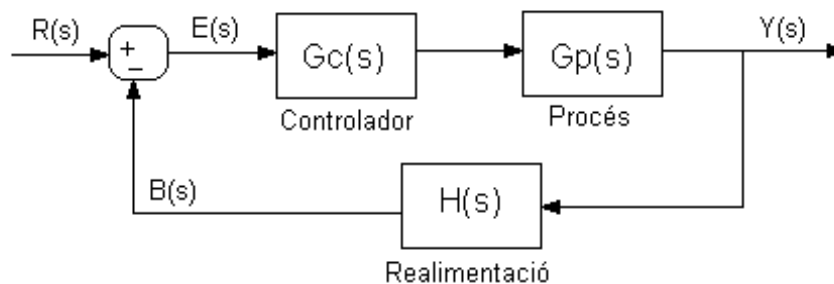


Diagrama de Blocs model en realimentació



$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$Y(s) = G_c(s) * G_p(s) * E(s)$$

$$B(s) = Y(s) / H(s)$$

Llaç obert

Es agafar la funció de transferència sense considerar la realimentació

$$G(S) = Y(S) / E(S) = G_c(s) * G_p(s)$$

Llaç tancat

Es considera la realimentació llavors la funció de transferència en llaç tancat és

$$M(S) = \underline{Y(S)} = \underline{G(S)} \underline{\quad}$$

$$R(S) \frac{1}{1+G(S)H(S)}$$

Simplificació de diagrames de Blocks

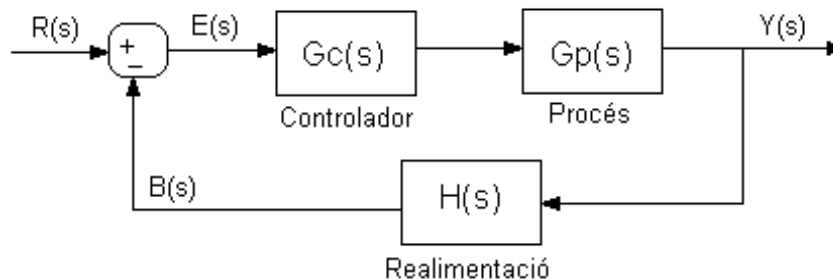
Normalment ens cal determinar $G(s)$ i $M(s)$ en un sistema de control en el qual hi ha moltes més coses: En general la funció de transferència total ens permet simplificar el sistema però perdem molta informació de com es comporta el sistema per dintre.

Totes les realimentacions es simplifiquen així:

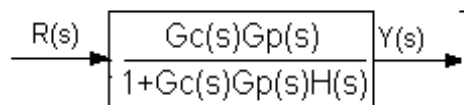
$$M(S) = \underline{Y(S)} = \underline{G(S)} \underline{\quad}$$

$$R(S) \frac{1}{1+G(S)H(S)}$$

Les funcions de transferència i guanys es treuen multiplicant:



Simplificat queda:



Estabilitat de Sistemes de control linial

El primer requeriment per un sistema és la ESTABILITAT

Estabilitat absoluta Simplement és saber si és o no és estable

Estabilitat relativa Si un sistema és estable saber com d'estable n'és

Relació entre arrels del polinomi característic i l'estabilitat

$$G(S) = L(g(t)) = \int_0^\infty g(t)e^{-stdt}$$

Si una o més arrels estan a la part negativa del pla complex llavors:

$$|e^{-st}| < 1 \text{ Però}$$

Si només una de les arrels està a la part positiva del pla complex llavors:

$$|e^{st}| \text{ Això tendeix a } \infty, \text{ que viola els requisits de l'estabilitat.}$$

Per tant:

Una arrel no pot estar al semiplà dret del pla complex o no pot tenir part real positiva.

Criteri de Hurwitz

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

On tots els coeficients són reals, perquè no presenti arrels amb parts reals positives:

- Tots els coeficients han de tenir el mateix signe
- Tots els determinants de Hurwitz han de ser positius

Els determinants de Hurwitz es formen com segueix

$$D_1 = a_{n-1} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

El criteri de Routh consisteix en arreglar aquests determinants

Tabulació de Routh Per una equació de 6è grau

$$F(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$s^6 \quad a_6 \quad a_4 \quad a_2 \quad a_0$$

$$s^5 \quad a_5 \quad a_3 \quad a_1 \quad 0$$

$$s^4 \quad \underline{a_5 a_4 - a_6 a_3} = A \quad \underline{a_5 a_2 - a_6 a_1} = B \quad a_0 \quad 0$$

$$a_5 \quad a_5$$

$$s^3 \quad \underline{A a_3 - a_5 B} = C \quad \underline{A a_1 - a_5 a_0} = D \quad 0 \quad 0$$

$$A \quad A$$

$$s^2 \quad \underline{BC - AD} = E \quad a_0 \quad 0 \quad 0$$

$$C$$

$$s^1 \quad \underline{ED - Ca_0} = F \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

E

s 0 a0 0 0 0

Perque un sistema sigui estable cal que tots els coeficient de la 1era columna, o sigui

a6, a5, A, C, E, F han de ser tots positius

A més el n° de intercanvis de signe en aquests elements indica el n° d'arrels amb parts positives que té l'equació.

Casos especials en la tabulació de Routh

Es poden presentar les següents dificultats aplicant la tabulació de Routh:

- El primer element de qualsevol dels renglons de la taula de Routh és 0
- Tots els elements d'una fila de la taula de routh són 0

En el primer cas es reemplaça el 0 per un numero petit arbitrari

Exemple:

S4 1 2 3

S3 1 2 0

S2 0 3 En aquí reemplaçem el 0 pel n° arbitrari

S2 3

S1 2 -3 / = -3/ 0 es comporta com si fos un 0 al numerador

S0 3

El segon cas es dona si una o vàries d'aquestes condicions poden existir

- L'equació té almenys 2 arrels d'igual magnitud i signes contraris
- L'equació té un o més parells d'arrels imaginàries
- L'equació té parells d'arrels complexes simètriques amb el punt (0,0)

Per arreglar-ho es fa el següent:

- $A(s) = 0$ utilitzant els coeficients de la fila que es troba dalt de la renglera de 0s
- Agafar la derivada $dA(s)/ds = 0$
- Reemplaçar la renglera de 0s pels coeficients de $dA(s)/ds = 0$

Exemple 2on Cás

S5 1 8 7

S4 4 8 4

S3 6 6 0

S2 4 4 0

S1 0 0 $A(s) = 4s^2 + 4s$

$dA(s)/ds = 8s$

S1 8 0 Son els coeficients de $dA(s)/ds$

S0 4

L'us de la taula de Routh s'utilitza per determinar la Klím d'estabilitat tractant la K com si fós un paràmetre

També s'utilitza per determinar el valor crític de paràmetres perquè un sistema sigui estable, quan nosaltres desconexim alguns dels paràmetres.

Anàlisi de sistemes de Control en el domini del temps

Error en l'estat estacionari, precisió

- resposta a un esglaió (error de posició)

$R(t) = K * U_s(t)$ $R(S) = K/s$

$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(S)H(S)$ per $s \rightarrow 0$ $Ess = 1/(1+K_p)$

- resposta a una rampa (error de velocitat)

$R(t) = K_t * U_s(t)$ $R(S) = K/s^2$

$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s * G(S)H(S)$ per $s \rightarrow 0$ $Ess = 1/K_v$

- resposta a una paràbola (error d'acceleració)

$R(t) = K_{t^2} * U_s(t)$ $R(S) = K/s^3$

$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 * G(S)H(S)$ per $s \rightarrow 0$ $Ess = 1/K_a$

Tipus	Error Posicio	Error Veloc.	Error Accel.
O	$R/(1+K_p)$	Infinit	Infinit
I	No en te	R/K_v	Infinit
II	No en te	No en te	R/K_a
III	No en te	No en te	No en te

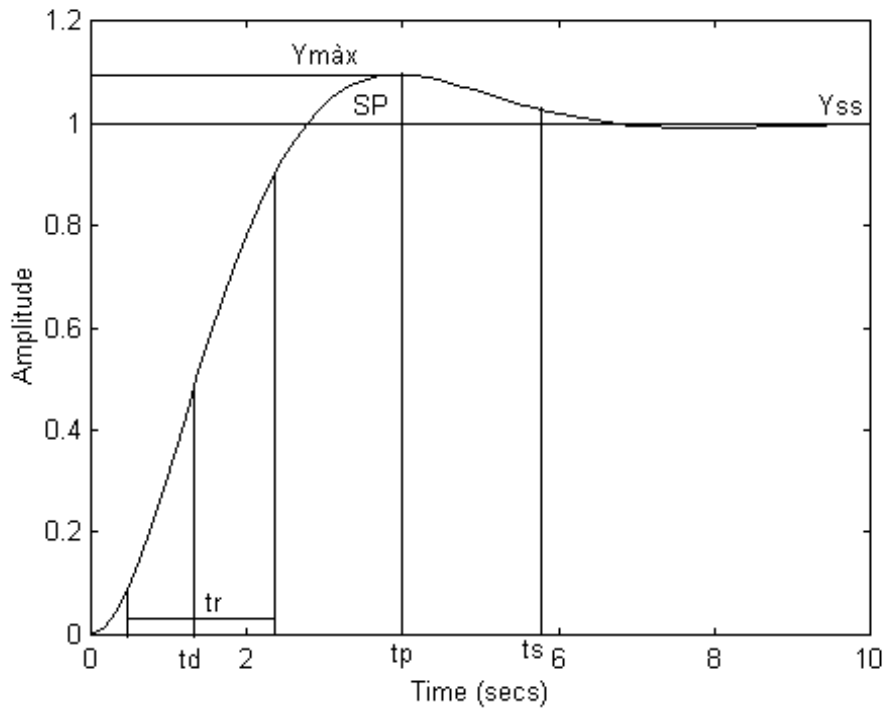
R = Magnitud de l'entrada $RU(s)$ en cas d'un esglaió

El tipus del sistema el determina el n° d'integradors que té el sistema.

Especificacions en el domini del temps

- Sobrepic màxim $Y_{ss} - Y_{m\grave{a}x}$ en %
- Temps de retard T_d , es el temps que tarda a aconseguir el 50% del valor final
- Temps d'alçament T_r , temps que tarda d'anar al 10% – 90% del valor final
- Temps d'assentament T_s , temps de permanència a una banda del X %

Normalment s'agafa un 5% o un 2%



Resposta d'un sistema prototipus de 2on ordre

$$G(S) = \frac{n^2}{s^2 + 2\zeta n s + n^2}$$

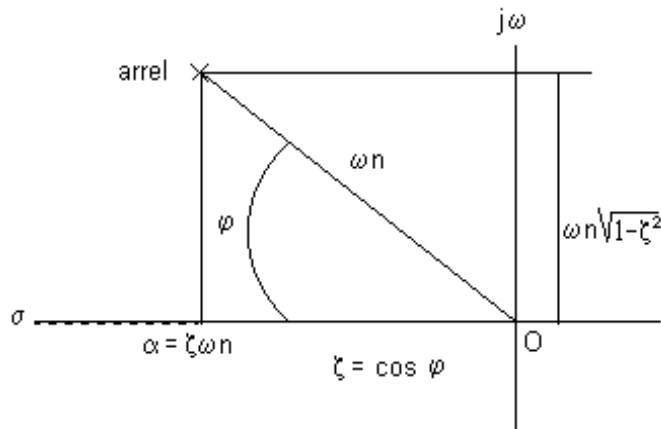
$$s^2 + 2\zeta n s + n^2$$

La solució d'aquest sistema ens dona les arrels que són:

$$= -\zeta n \pm j n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta n \pm j d \text{ on } d = \text{freqüència esmorteïda}$$

- n = Distància radial de les arrels a l'origen del pla s
- ζ = La part real de les arrels
- d = La part imaginària de les arrels
- $\cos$ = Cosinus de l'angle entre la línia radial de les arrels i l'eix negatiu

$$= \cos$$



Tipus de sistemes segons el paràmetre

- subesmorteït $0 < \zeta < 1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
- Críticament esmorteït $\zeta = 1$ $s_{1,2} = -\omega_n$
- Sobreesmorteït $\zeta > 1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
- No esmorteït $\zeta = 0$ $s_{1,2} = \pm j\omega_n$
- Subesmorteïment negatiu $-1 < \zeta < 0$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\omega_n > 0$
- Sobreesmorteïment negatiu $\zeta < -1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ $\omega_n > 0$

Calcul de les especificacions en el domini del temps

Sobrepic màxim i temps de pic

Tpic = _____ temps quan es presenta el sobrepic

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$SP = 100 \cdot \exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \quad SP = y_{m\grave{a}x} - y_{ss}$$

- Si reduïm l'esmorteïment, reduïm el sobrepic

Temps de retard i temps d'aixecament

$$\omega_n t_d = 1 + 0.7 \quad (t_d = \text{temps retard} = \text{temps que assolim el 50\% del valor})$$

$$\omega_n t_d = 1.1 + 0.125 \zeta + 0.469 \zeta^2$$

$$\omega_n t_r = 0.8 + 2.5 \zeta \quad (t_r = \text{temps d'aixecament} = \text{temps que passem del 10 a 90\% del valor})$$

$$\omega_n t_r = 1 - 0.4167 \zeta + 2.917 \zeta^2$$

- t_r i t_d proporcionals a $1/\omega_n$ i inversament a ω_n
- Si disminuïm ω_n augmentarem t_r i t_d

Temps d'assentament

$$\omega_n t_s = \frac{-1}{\zeta} \ln[0.05(1-\zeta^2)] \quad \text{temps d'assentament a una banda del 5\%}$$

- té una discontinuïtat per $\zeta = 0.691$ (sobrepic del 5%)
- Per $\zeta > 0.691$ ts és inversament proporcional a ζ i n
- Per $\zeta < 0.691$ ts és proporcional a ζ i inversament proporcional a n

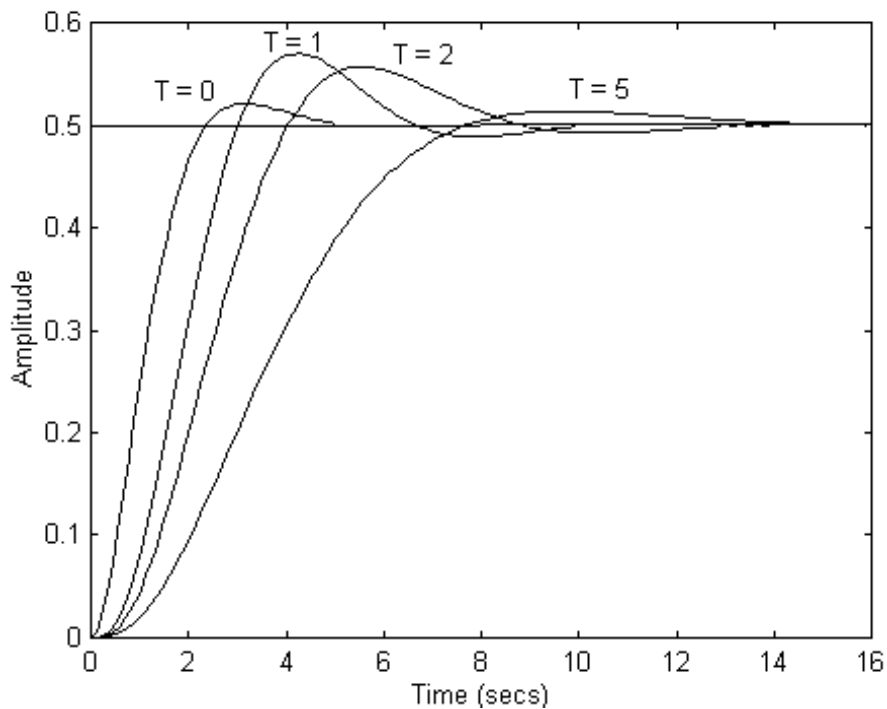
Efecte d'afegir un pol a la funció de transferència (llaç obert)

$G(S) = \frac{n^2}{s^2 + 2\zeta n + n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta n + n^2$$

$G(S) = \frac{n^2}{(Ts+1)(s^2 + 2\zeta n + n^2)}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$(Ts+1)s^2 + 2\zeta n + n^2$$



L'adició del pol ens afecta de la següent manera:

- Generalment: Augment del sobrepic i temps de pic
- Augment del temps d'establiment
- Inestabilització del sistema

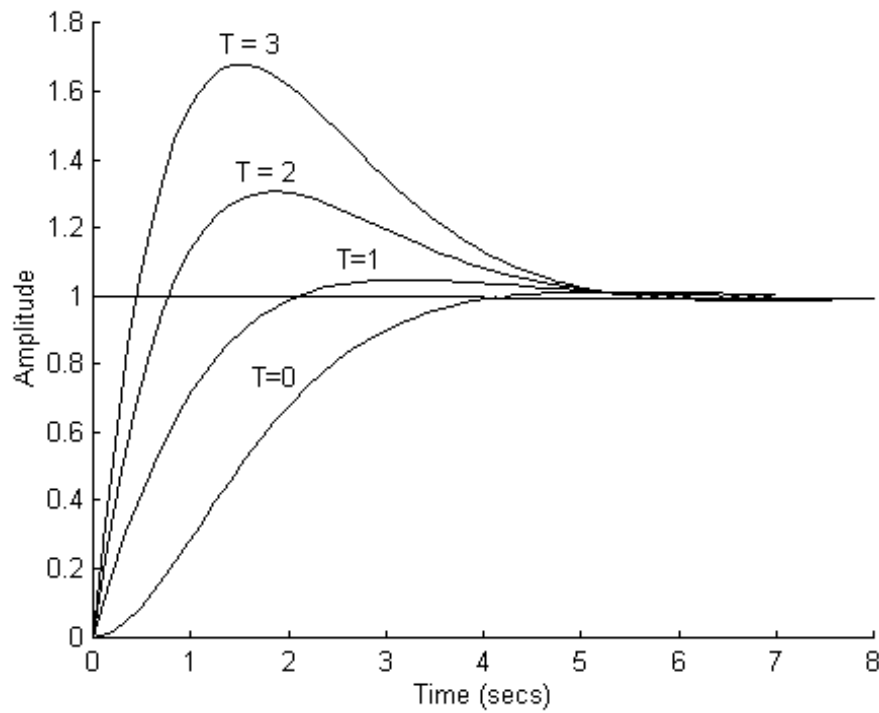
Efecte d'afegir un zero a la funció de transferència (llaç obert)

$G(S) = \frac{n^2}{s^2 + 2\zeta n + n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta n + n^2$$

$G(S) = \frac{(Ts+1)n^2}{s^2 + 2\zeta n + n^2}$ Afegint un pol a la funció de transferència:

$$s^2 + 2\zeta n + n^2$$



- Disminueix el temps d'aixecament
- Augmenta el sobrepic màxim
- Té l'efecte oposat del d'adició d'un pol

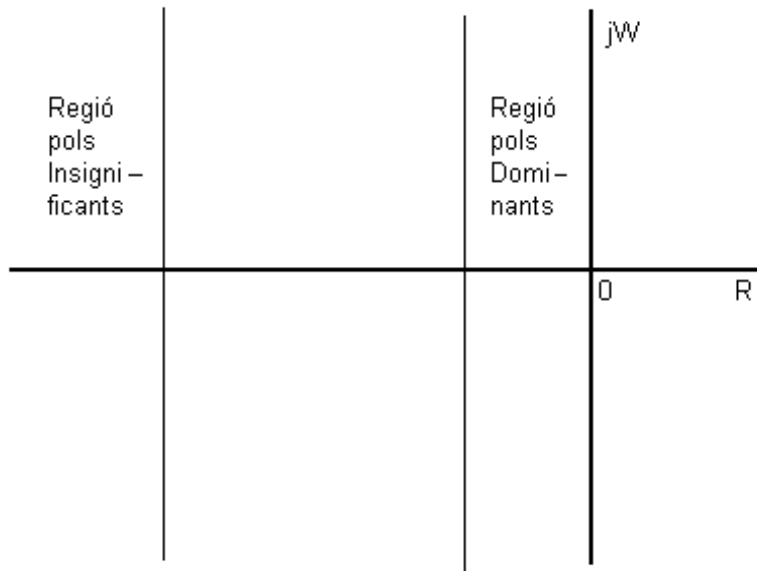
Els zeros i pols molt pròxims tenen efectes contraposats i es poden menystenir els seus efectes.

Pols dominants de les funcions de transferència

Pol dominant Es aquell que té un efecte molt significatiu en la resposta transitòria

Pol insignificant No tenen pes específic en la resposta transitòria

Els pols que estan vora l'origen fan créixer la resposta transitoria i decauran molt lentament en canvi que els pols que estan lluny cauen molt ràpidament.



Entre les 2 regions : Insignificants i dominants hi ha una distància D

D = Magnitud real 5 a 10 vegades major que els pols dominants.

Esmorteïment relatiu

Un sistema de 3er ordre o més que té pols dominants exemple:

$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)}$ Té 2 pols dominants a $1 \pm j = 0.707$

$R(s) = (s+10)(s^2+2s+2)$ El pol real es a 10 D = 10

Es pot dir que $r=0.707$ (esmorteïment relatiu)

Per despreciar el pol insignificant cal tenir en compte:

- El valor final Y_{ss} ha de ser el mateix que el del sistema simplificat

$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)} = \frac{20}{(s/10 + 1)(s^2+2s+2)} = \frac{20}{(s^2+2s+2)}$

$R(s) = (s+10)(s^2+2s+2) \cdot 10(s/10 + 1)(s^2+2s+2) = 10(s+10)(s^2+2s+2)$

Simplificació de sistemes

Es desitjable en sistemes d'ordre alt poder-los simplificar a un ordre més baix que la seva resposta transistòria sigui similar.

$M_H(s) = \text{Sistema d'ordre superior} = \frac{K(1+b_1s+b_2s^2+ \dots + b_ms^m)}{1+a_1s+a_2s^2+ \dots + a_ns^n}$

$1+a_1s+a_2s^2+ \dots + a_ns^n$

$M_L(s) = \text{Sistema ordre inferior} = \frac{K(1+c_1s+c_2s^2+ \dots + c_qs^q)}{1+d_1s+d_2s^2+ \dots + d_p s^p}$

$1+d_1s+d_2s^2+ \dots + d_p s^p$

K es la mateixa per assegurar que es mantingui el valor final en el sistema d'ordre baix

Càlcul de ML(s)

$$MH(s) = \frac{1+m_1s+m_2s^2+\dots+m_us^u}{1+l_1s+l_2s^2+\dots+l_vs^v}$$

$$ML(s) = \frac{1+m_1s+m_2s^2+\dots+m_us^u}{1+l_1s+l_2s^2+\dots+l_vs^v}$$

$$MH(j)\omega^2 = \frac{1+e_2s^2+e_4s^4+e_6s^6+\dots+e_{2u}s^{2u}}{1+f_2s^2+f_4s^4+f_6s^6+\dots+f_{2v}s^{2v}} = 1$$

$$ML(j)\omega^2 = \frac{1+e_2s^2+e_4s^4+e_6s^6+\dots+e_{2u}s^{2u}}{1+f_2s^2+f_4s^4+f_6s^6+\dots+f_{2v}s^{2v}}$$

Per la condició que hem expressat a dalt:

$$f_2 = e_2, f_4 = e_4, \dots \rightarrow \text{El que resta es l'error que cometem}$$

Iguant-ho obtenim que:

$$e_2 = 2m_2 - m_1^2$$

$$e_4 = 2m_4 - 2m_1m_3 + m_2^2$$

$$e_6 = 2m_6 - 2m_1m_5 + 2m_2m_4 - m_3^2$$

$$e_8 = 2m_8 - 2m_1m_7 + 2m_2m_6 - 2m_3m_5 + m_4^2$$

$$f_2 = 2l_2 - l_1^2 = e_2 = 2m_2 - m_1^2$$

$$f_4 = 2l_4 - 2l_1l_3 + l_2^2 = e_4 = 2m_4 - 2m_1m_3 + m_2^2$$

$$f_6 = 2l_6 - 2l_1l_5 + 2l_2l_4 - l_3^2 = e_6$$

$$f_8 = 2l_8 - 2l_1l_7 + 2l_2l_6 - 2l_3l_5 + l_4^2 = e_8 \text{ etc.}$$

Exemple: Simplificació sistema 3er grau a 2on grau

$$M(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{s^3+6s^2+12s+8} = \frac{1}{0.125s^3+0.75s^2+1.5s+1}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+12s+8}$$

Els pols están tots a s+2

$$ML(s) = \frac{1}{s^2+d_1s+d_2}$$

$$1+d_1s+d_2s^2$$

$$M(s) = \frac{1+d_1s+d_2s^2}{s^2+d_1s+d_2} = \frac{1+m_1s+m_2s^2}{1+l_1s+l_2s^2+l_3s^3}$$

$$ML(s) = \frac{0.125s^3+0.75s^2+1.5s+1}{1+l_1s+l_2s^2+l_3s^3}$$

$$L_1 = 1.5, L_2 = 0.75, L_3 = 0.125$$

$$f_2 = 2l_2 - l_{12} = e_2 = 2m_2 - m_{12} \quad 1.5 - 1.52 = -0.02 = 2d_2 - d_{12}$$

$$f_4 = -2l_{13} + l_{22} = e_4 = m_{22} \quad 0.1875 = d_{22}$$

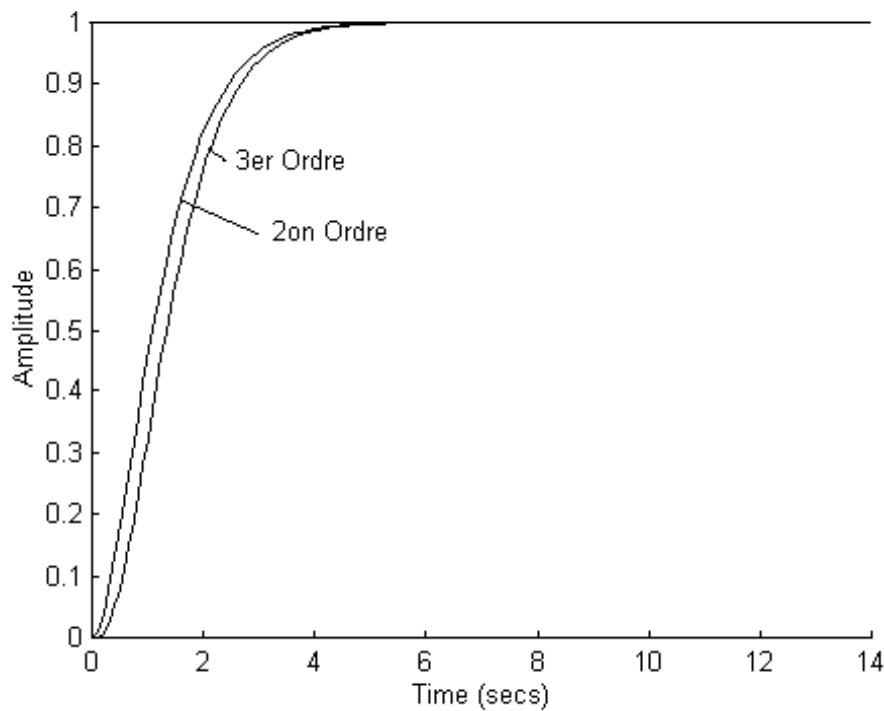
$$f_6 = -0.156 = \text{Error que cometem}$$

$$\text{Tenim que: } d_2 = 0.433; d_1 = 1.271$$

$$ML(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2} = \frac{1}{1 + 1.271s + 0.433s^2} = \frac{2.31}{s^2 + 2.936s + 2.31}$$

$$1 + d_1 s + d_2 s^2 = 1 + 1.271s + 0.433s^2$$

Comparació de les respostes dels 2 sistemes



L'aproximació es tan mes bona quanta més dominància de pols hi hagi.

Construcció de diagrames de Bode

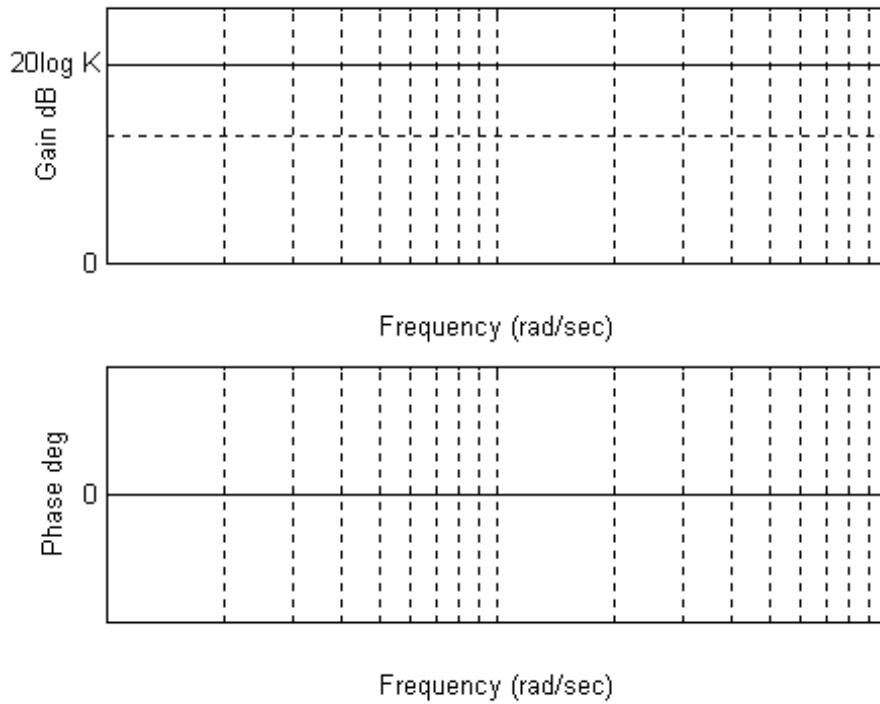
En els diagrames de Bode ens podem trobar aquests cinc tipus de factors simples:

- factors Constants K
- Pols i Zeros en el origen: $1/s$ ó s , integradors i derivadors
- Pols i Zeros a $s = -a$: Factors $(s+a)$
- Polts i zeros complexes: $(1 + 2\zeta n + n^2)$
- Retards purs e^{-Tds}

Constant real K

Totes les K's son positives, per tant; $K_{dB} = 20 \cdot \log K$

El seu diagrama de Bode és el següent:



Pols i zeros a l'origen, $1/s$ i s Integradors i derivadors

Integradors

El seu pendent és de -20 dB/dec i passen per 0 dB quan $\omega = 1$

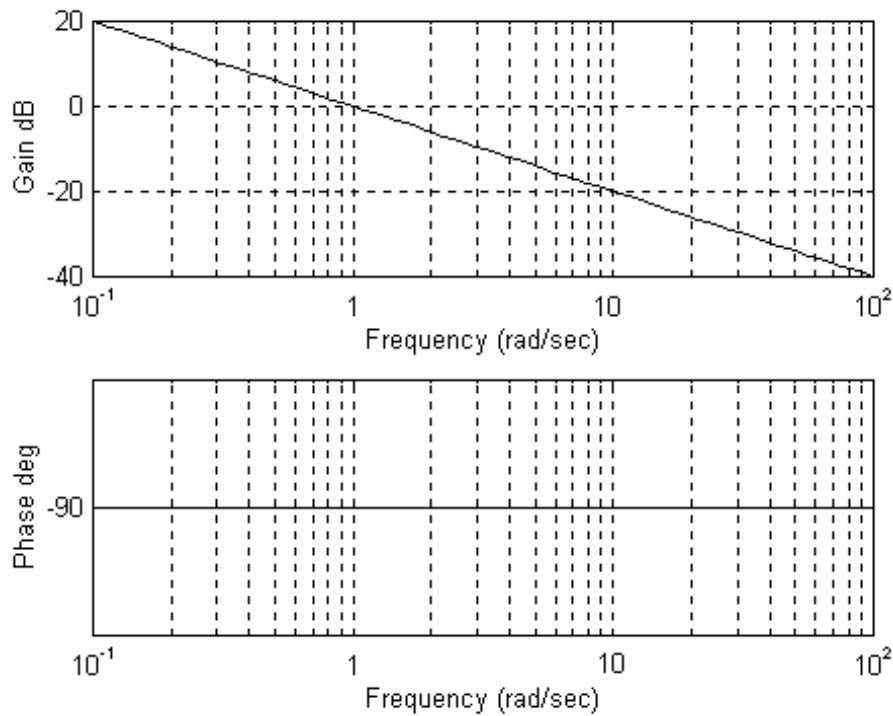
El seu defasatge és de -90°

Derivadors

El seu pendent és de 20 dB/dec i passen per 0 dB quan $\omega = 1$

El seu defasatge és de -90°

El diagrama de Bode per un integrador és:



Pol Simple

La funció del pol simple és $1/(Ts+1)$

Guany

Asíntotes | per $<1/T$ el guany és 0 dB

| per $>1/T$ Té un pendent de -20 dB/dec

Podem calcular-ho més acuradament si

$$\text{Guany} = 20 \cdot \log(1 + T^2)^{1/2}$$

Defasatge

| per $<1/10T$ el defasatge és 0°

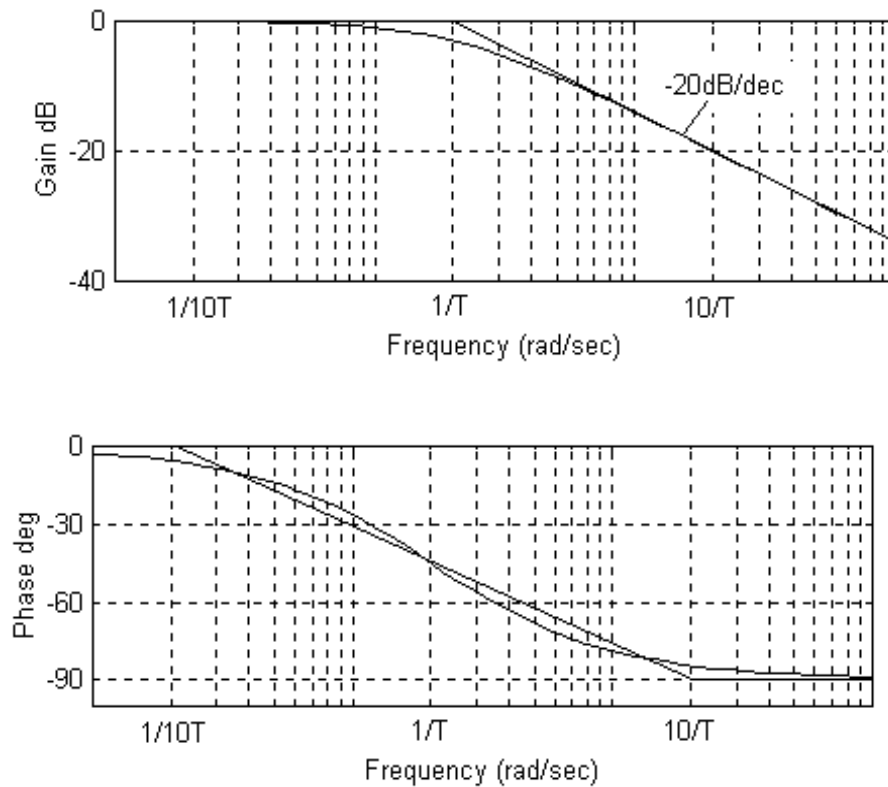
Asíntotes | per $>10/T$ el defasatge és -90°

| passa per -45° quan $\omega = 1/T$

Podem calcular-ho més acuradament

$$\text{Defasatge} = \arctg(T\omega)$$

El seu diagrama de Bode és el següent:



Els zeros simples són iguals tret que els pendents són positius i defasatges també.

Pols Complexes

La funció de transferència és:

$$n^2 / s^2 + 2 \zeta n + n^2$$

Tenim les següents característiques que hem de calcular

Freqüència Ressonància: $r = n(1-2\zeta^2)^{1/2}$

Magnitud Pic : $M_r = 1 / [2 (1-\zeta^2)^{1/2}]$

Ampla de Banda : $BW = n[(1-2\zeta^2) + (-4\zeta^2 + 2)^{1/2}]^{1/2}$

Guany

Asíntotes | per $\omega < 1/T$ el guany és 0 dB

| per $\omega > 1/T$ Té un pendent de -40 dB/dec

Ressonància | Si $\zeta < 0.707$ $M_r = 1 / [2 (1-\zeta^2)^{1/2}]$; $r = n(1-2\zeta^2)^{1/2}$

| Si $\zeta > 0.707$ No presenta pic de ressonància

Defasatge

| per $< n/10$ el defasatge és 0°

Asíntotes | per $> 10 \cdot n$ el defasatge és -180°

| passa per -90° quan $\omega = \omega_n$

El diagrama de Bode (Canviant esmoreïments) són els següents:

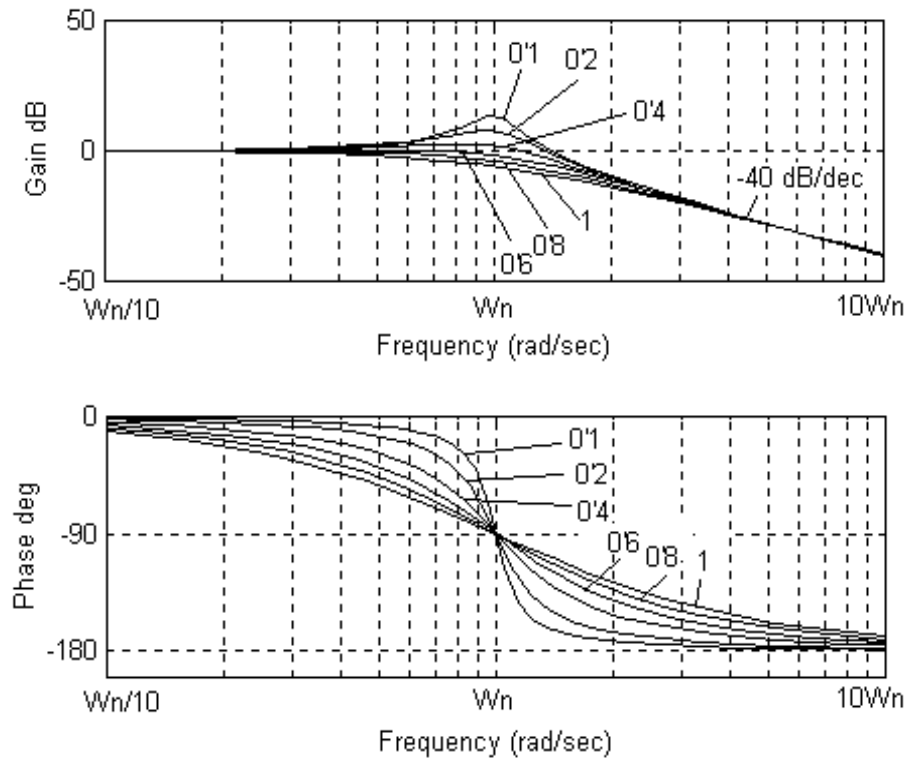
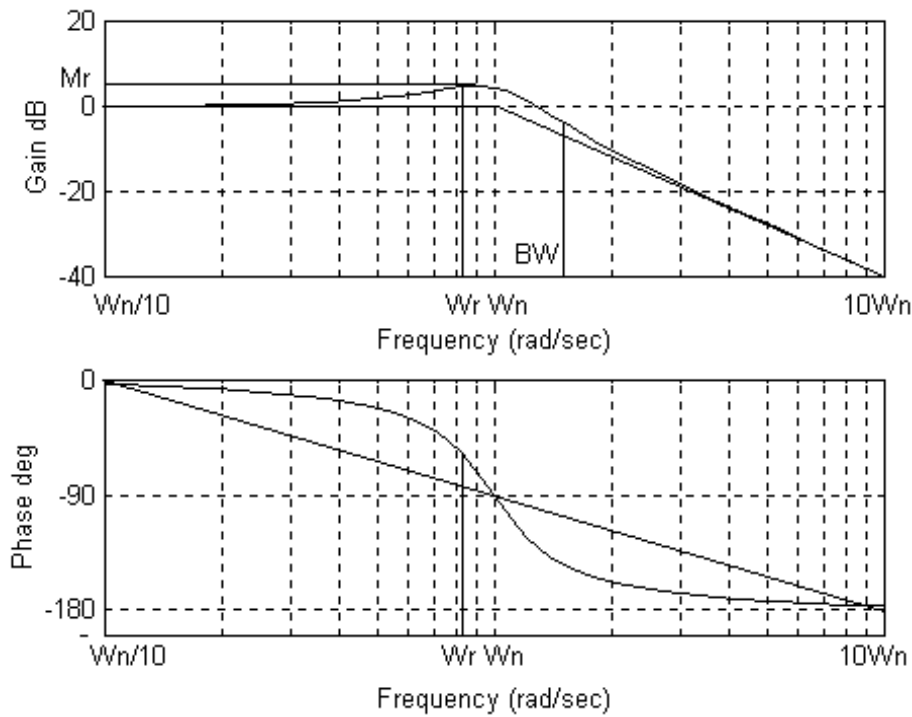
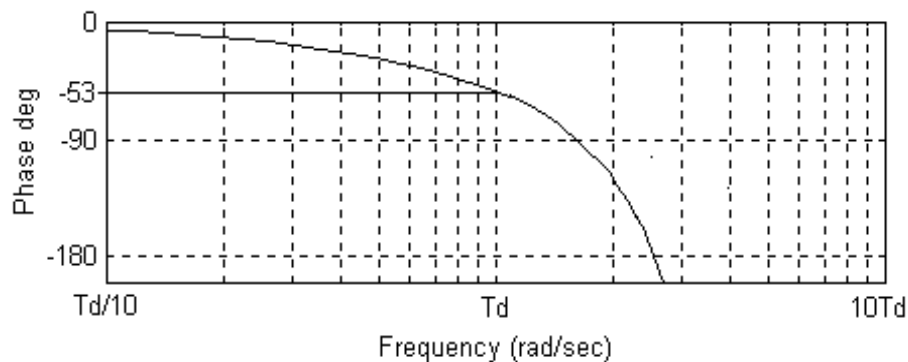


Diagrama de Bode d'un pol complex amb ressonància



Retard Pur e-Tds

El seu guany és 0 i el seu defasatge és aquest:



a $Td/10$ (-5.3°), a Td (-53°) a $10Td$ (-530°)

Construcció del lloc geomètric de les arrels (Conceptes Bàsics)

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0 \quad K \text{ entre } (-, +)$$

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad n \text{ i } m = \text{Enters positius.}$$

Propietats Bàsiques:

En sistemes de Control

$$Y(S) = \underline{G(S)} = \underline{G(S)}$$

$$R(S) = \frac{1}{1+G(S)H(S)} = \frac{1}{1+KG(S)H(S)}$$

Condició de magnitud

$$G(S)H(S) = -1/K \quad K \text{ entre } (-, +)$$

Condicions d'angle

$$G(S)H(S) = (2i + 1) \text{ per } K > 0 \text{ (no es contemplen } K \text{'s negatives)}$$

Construcció del lloc d'arrels

$$G(S)H(S) = \frac{K(s+Z_1)(s+Z_2) \dots (s+Z_m)}{(s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)}$$

$$(s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)$$

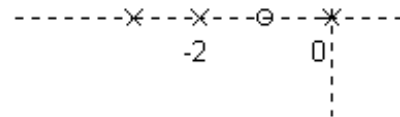
Punts on $K=0$ i $K=\infty$

$$K = 0 \text{ Solucionar el denominador característic } (s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)$$

$$K = \infty \text{ Solucionar el numerador } (s+Z_1)(s+Z_2) \dots (s+Z_m)$$

Així els pols són quan $K = 0$ i els Zeros quan $K = \infty$

$$\text{Exemple } K(s+1)/s(s+2)(s+3)$$



Angles de les asíntotes per K 's positives

M = Ordre del numerador

N = Ordre del denominador: llavors:

Hi haurà $[N-M]$ asíntotes que descriuen el comportament del lloc d'arrels per $s = \infty$

Per valors grans de s , els angles de les asíntotes seràn:

$$\theta_i = \frac{(2i + 1) \cdot 180^\circ}{N - M}$$

$$i = 0 \text{ a } [N-M-1]$$

Intersecció de les asíntotes (centroide)

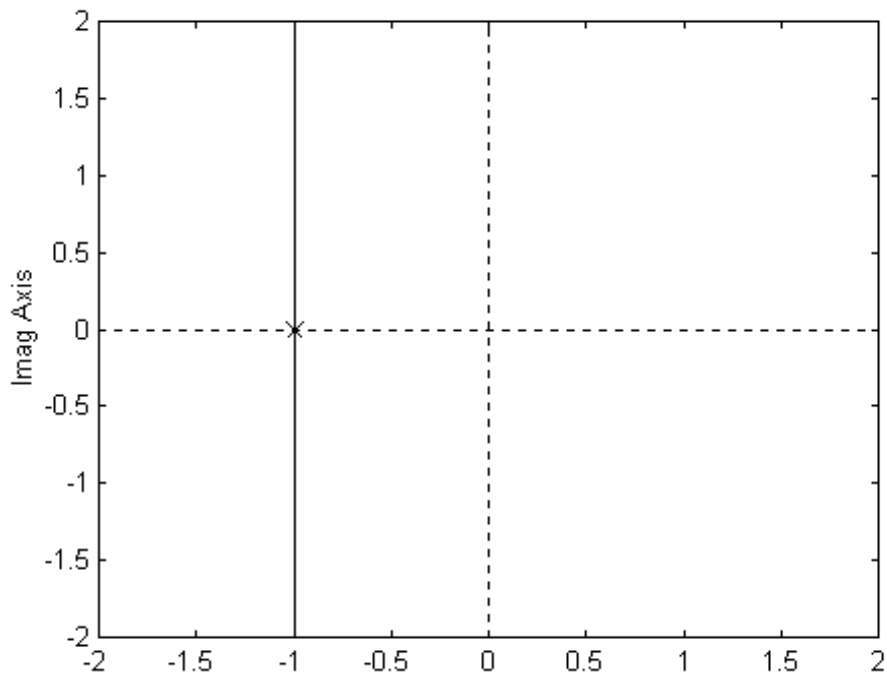
La intersecció de les $[N-M]$ asíntotes del lloc d'arrels la dóna la següent equació:

$$\sigma = \frac{\text{parts reals dels pols de } G(S)H(S) - \text{parts reals dels zeros de } G(S)H(S)}{N - M}$$

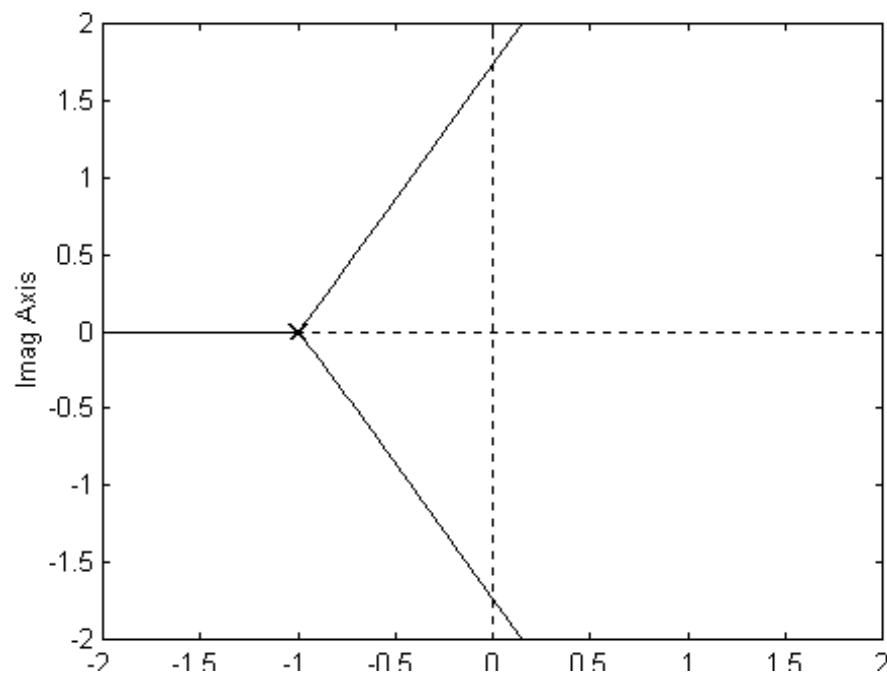
N - M

Examples:

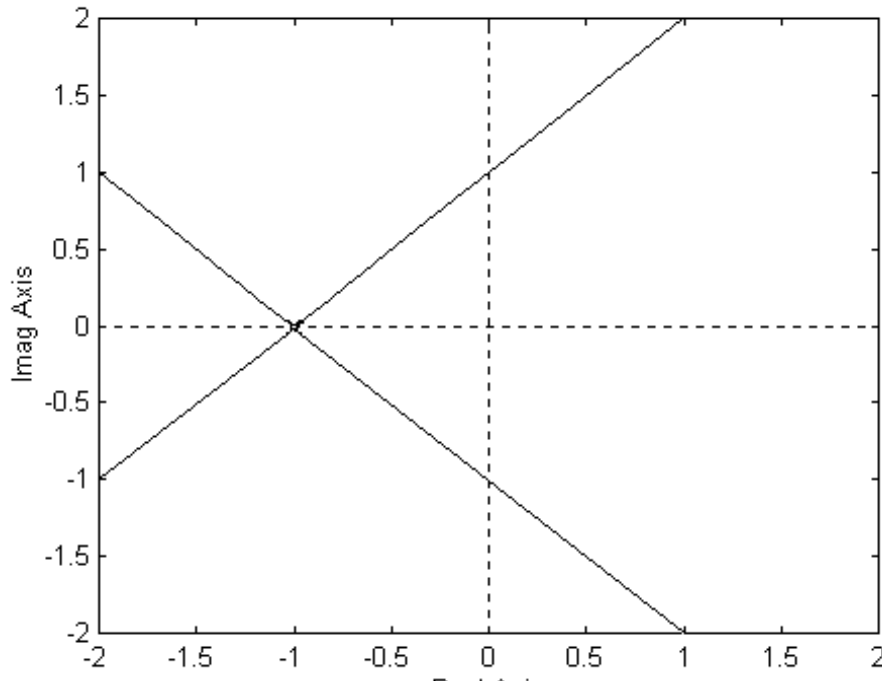
Nº zeros = 0; Nº pols = 2; asintotes à 90 i 270°



Nº zeros = 0; Nº pols = 3; asintotes à 60, 180 i 300°



Nº zeros = 0; Nº pols = 4; asintotes à 45, 135, 225 i 315°



Anàlisi de l'estabilitat relativa amb el Diagrama de Bode

Marge de Guany i Marge de Fase

En el domini de la freq. es quantifica l'estabilitat amb el MG i MF

Marge de Guany

Un creuament de fase és quan la traza de Bode intersecta a -180°

p = Freq on hi ha el creuament de fase

$$\angle L(j p) = 180^\circ$$

El MG es la quantitat de guany en dB que es poden afegir al llaç abans que el sistema es torni inestable:

$$K_{\text{Lím}} = \text{MG} \quad \text{MG} = 20 \log (1/|L(j p)|)$$

Si no hi ha creuament de fase llavors $\text{MG} = \infty$

Marge de Fase

Un creuament de guany és quan la traza de Bode intersecta a 0dB ó $|L(j g)|=1$

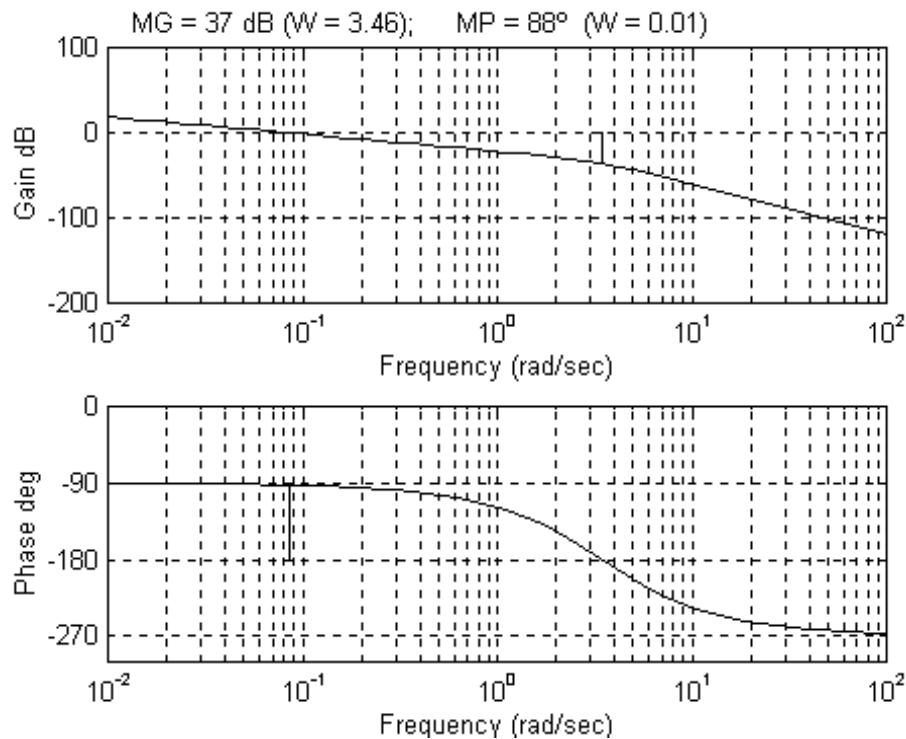
g = Freq on hi ha el creuament de guany

$$|L(j g)| = 1$$

el MP es l'angle en graus que la traza s'ha de girar al voltant de l'origen perquè el creuament de fase passi per -180°

$$\text{Llavors MP} = \angle L(j g) - 180^\circ$$

Si no hi ha creuament de fase llavors $MG = \infty$



Si hi ha retards purs cal recordar que $e^{-Tds} \approx 1 - tds/2$

$1 + tds/2$

O que quan $td = 1$ l'angle es 53° , a $td = 10$ l'angle és 5.3°

* Estabilitat: $K_{lím}$ (en dB) = MG

Un sistema es inestable si $MG > 0$ dB o $MP < 0^\circ$ **TIPUS DE CONTROLADORS**

Controlador PI

$$G_c(s) = K_p + K_i/s = K_p(1 + (K_i/K_p)s)/s$$

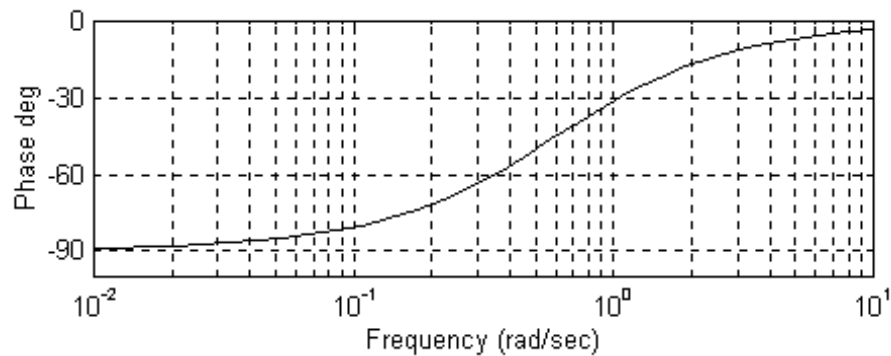
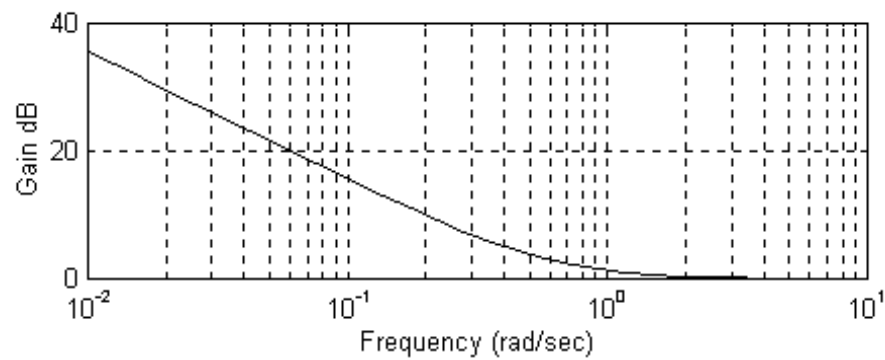
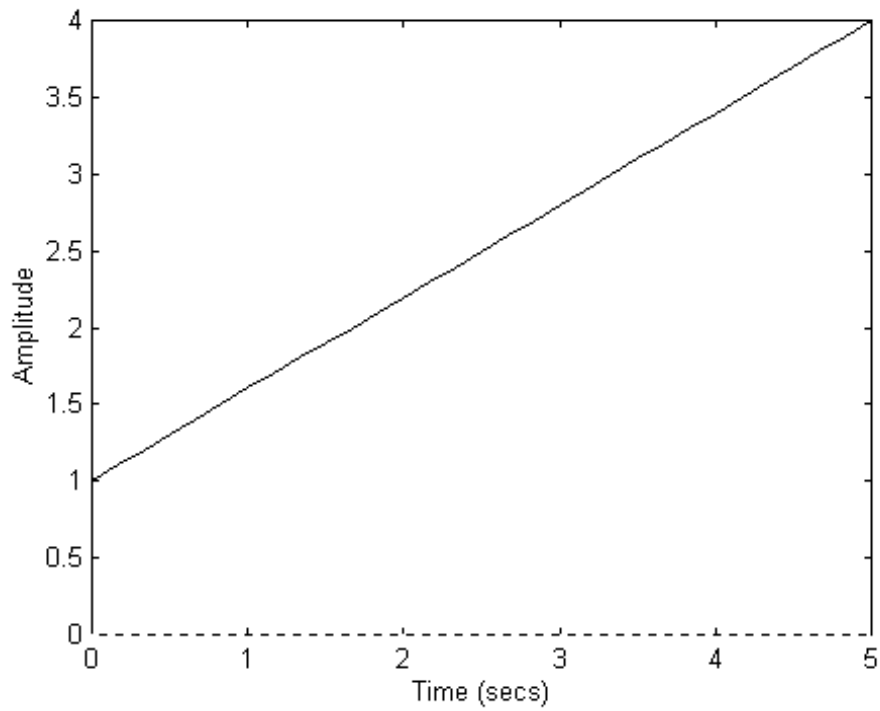
En el domini temporal:

$$G_c(t) = K_p * e(t) + K_i * \int e(t) dt$$

Com podem veure té un 0 a $-K_p/K_i$ i un pol a l'origen

Aventatges i desventatges del controlador PI

Resposta a una entrada graó d'un PI



- Ens augmenta el tipus del sistema en 1 (redueix l'error)
- Ens alenteix la resposta (Baixa BW, Pugen T_r, T_p, T_s)
- Si no es sintonitza bé pot inestabilitzar el sistema
- Es pot saturar a baixes freqüències (es filtre passa-baixos)
- Ens augmenta el sobrepic de la resposta (MP disminueix)

Controlador PD

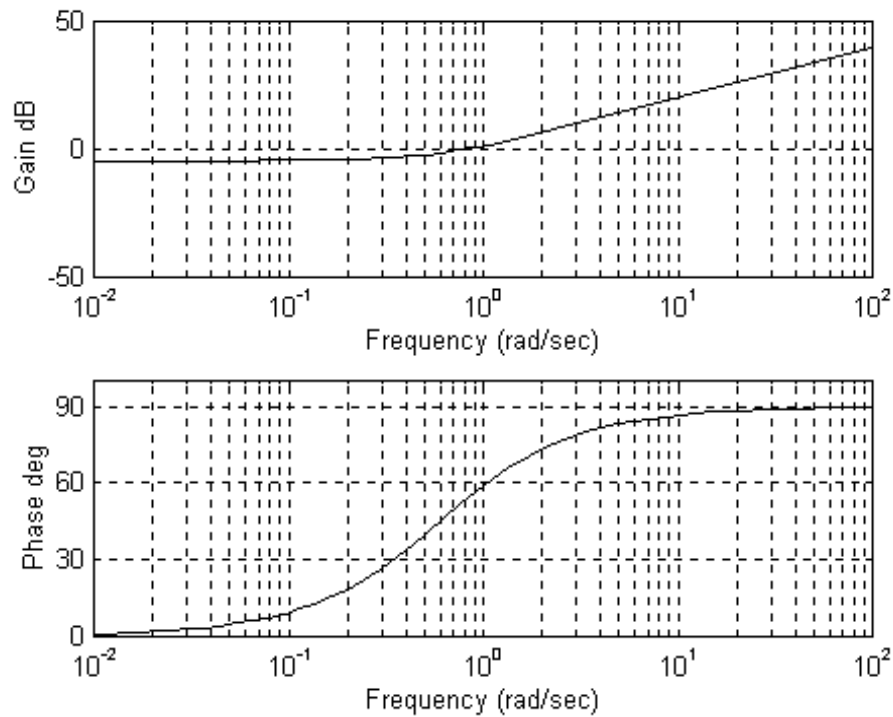
$$G_c(s) = K_p + K_d s = K_p [1 + (K_d/K_p)s]$$

En el domini temporal:

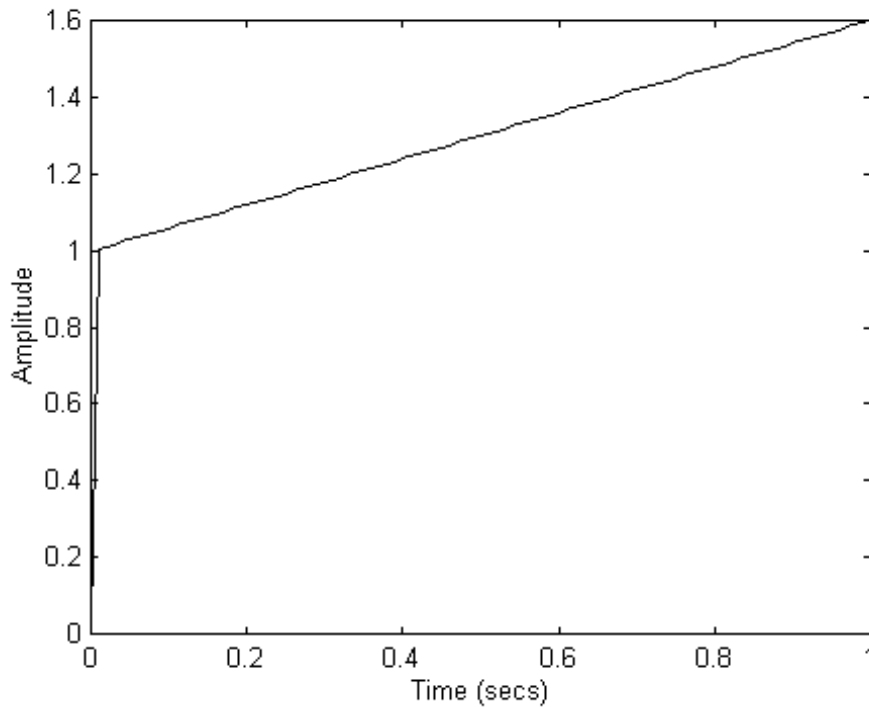
$$G_c(t) = K_p * e(t) + K_d * de(t)/dt$$

Com podem veure té un zero a $-K_p/K_d$ i cap pol

Aventatges i desventatges del controlador PI



Resposta a una entrada rampa d'un PD



- Redueix l'esmoreiment i el sobrepic
- Redueix temps d'aixecament i establiment, accelera el sistema
- Millora MG, MF i incrementa l'ampla de Banda
- Es pot saturar per altes freqüències (es un filtre passa alts)
- No funciona per sistemes poc esmoreïts o inicialment inestables
- No ens corregeix l'error (ens deixa el tipus del sistema tal qual)

Controlador PID

Es com una combinació d'un PI i un PD

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s = K_p(1 + (K_i/K_p)/s + (K_d/K_p)s)$$

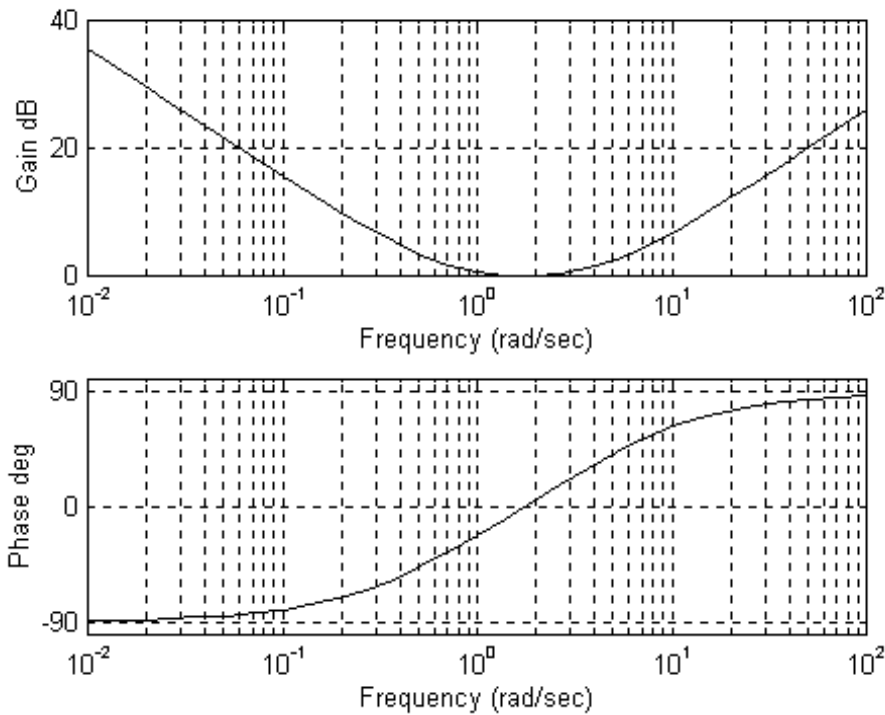
Veiem que té:

- 2 zeros (Poden ser reals o bé complexes)
- 1 pol a l'origen

Es com un entremig entre el PI i Pd, té els següents avantatges i inconvenients:

- Pot ajustar 3 especificacions al mateix temps: 3 paràmetres: K_p, K_i, K_d
- Es pot saturar a altes i baixes freqüències
- Augmenta en 1 el tipus d'un sistema però no l'alenteix
- Podem triar amb ell la posició del pol real perquè sigui insignificant
- Costa més de sintonitzar que un PI o un PD

La seva resposta freqüencial per $K_p = 1$, $K_d = 0.2$, $K_i = 0.6$ és aquesta:



A baixes freq ens disminueix MP (augmenta SP) i a altes es al revés

Podem fer moltes combinacions amb MP, MG i BW depenent d'on col·loquem els paràmetres.

Podem ajustar-los amb regim temporal o amb el diagrama de Bode

DISSENY DE CONTROLADORS

Disseny de controladors fent servir el mètode d'assignació de pols

El controlador que es proposa utilitzar per aconseguir controlar el nostre procés pot ser un controlador PID, PI, PD o P

En el cas d'un PID

$$G_c(s) = K_p + K_i/s + K_d s$$

L'ajuste d'aquest controlador es farà fent servir el mètode **d'assignació de pols simple**

El disseny de controladors mitjançant el mètode d'assignació de pols simple consisteix en determinar el controlador a partir de la condició de què el sistema controlat tingui els pols en el lloc desitjat, sigui:

$$G_c(s) = N_c(s) / D_c(s)$$

La funció de transferència del controlador i sigui:

$$G_p(s) = N_p(s) / D_p(s)$$

La funció de transferència del procés a controlar, llavors la funció de transferència del sistema controlat suposant que la realimentació és unitària valdrà:

$$T(s) = \frac{N_c(s) \cdot N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$$

A partir de les especificacions de disseny determinarem la posició dels pols del sistema controlat i per tant el polinomi denominador $P(s)$ de la funció de transferència del sistema en llaç tancat $T(s)$. Igualment el polinomi desitjat amb el polinomi a ajustar determinarem els paràmetres del controlador

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) = P(s) \text{ que es el polinomi desitjat}$$

Aquesta equació s'anomena **equació diofàntica**.

Exemple amb un controlador PD

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+100)} \quad M(s) = \frac{1000}{s^2+10s+1000}$$

$$s(s+100) \quad s^2+10s+1000$$

Especificacions:

- $SP < 5\% \Rightarrow 0.707$
- $Tr = 0.05 \text{ sec} \quad Tr = 0.8 + 2.5 / n \quad n = 51.35$

Pols del nostre sistema: Pols Sistema controlat (especificacions)

$$s^2+10s+1000 \quad s^2 + 0.707 \cdot 51.35s + 51.35^2 = s^2+36.3s+2638$$

Per un PD:

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad G_c G_p = \frac{1000(K_p + K_d s)}{s(s+100)} \quad M(s) = \frac{1000(K_p + K_d s)}{s^2+10s+1000}$$

$$s(s+100) \quad s^2+(10+1000K_d)s+1000K_p$$

$$P(s) = s^2+36.3s+2638 = s^2+(10+1000K_d)s+1000K_p$$

$$K_d = 26.3/1000 = 0.0263; \quad K_p = 2638/1000 = 2.638$$

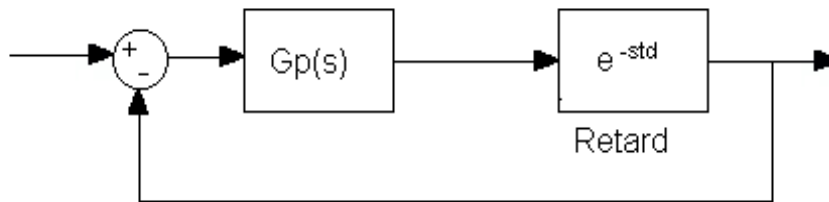
La funció de transferència total ens queda:

$$M(s) = \frac{2638+26.3s}{s^2+36.3s+2638} \text{ el zero està a } s=-100$$

$$s^2+36.3s+2638$$

Efecte inestabilitzador del retard

Si tenim en compte que els sistemes normalment tenen un retard present en el model del sistema observarem al simular el sistema controlat que el seu efecte és el desestabilitzar el sistema.



Si determinem la funció de transferència del sistema realimentat veurem que el retard apareix com un terme més del denominador. Normalment l'efecte d'aquest terme és desestabilitzar el sistema realimentat.

$$T(S) = \frac{G_p(s) * e^{-std}}{1 + G_p(s) * e^{-std}}$$

$$1 + G_p(s) * e^{-std}$$

Per a poder estudiar l'efecte inestabilitzador del retard del sistema utilitzarem cal utilitzar els diagrames de Bode, el que fa el retard es canviar-nos el marge de Fase.

Disseny de controladors empíricament: Ziegler–Nichols

Hi ha mètodes empírics que ens permeten ajustar controladors: Ziegler–Nichols.

Ajust en llaç tancat

El procediment consisteix en:

- Col·locar controlador P amb guany petit i obtenir la resposta a un esglaió
- Augmentar la K fins a obtenir una resposta oscil·latòria mantinguda
- Anotar guany crític (K_{pc}) i període d'oscil·lació T_c

Segons Ziegler–Nichols els paràmetres del controlador són:

K		Ti	Td
PID Controler	$0.6K_{pc}$	$0.5 * T_c$	$0.125 T_c$
PI Controler	$0.45K_{pc}$	$T_c / 1.2$	
P Controler	$0.5K_{pc}$		

On la funció de transferència el controlador PID és:

$$G_c(s) = K(1 + 1/T_i s + T_d s)$$

Ajust en llaç obert

El procediment s'utilitza en sistemes 1er ordre amb retard, consisteix en:

- Obtenir la resposta en llaç obert del sistema amb retard
- Anotar L = temps retard i T = constant de temps

Nomes funciona si $T/L \geq 4$ ó més. Entre 3 i 4 funciona amb reparos

Segons Ziegler–Nichols el paràmetres del controlador seràn:

K		Ti	Td
PID Controler	1'2T/L	2L	0'5L
PI Controler	0'9T/L	L/0'3	
P Controler	T/L		

Controladors d'avanç i atrasament de fase

S'utilitzen perquè la seva resposta és físicament real

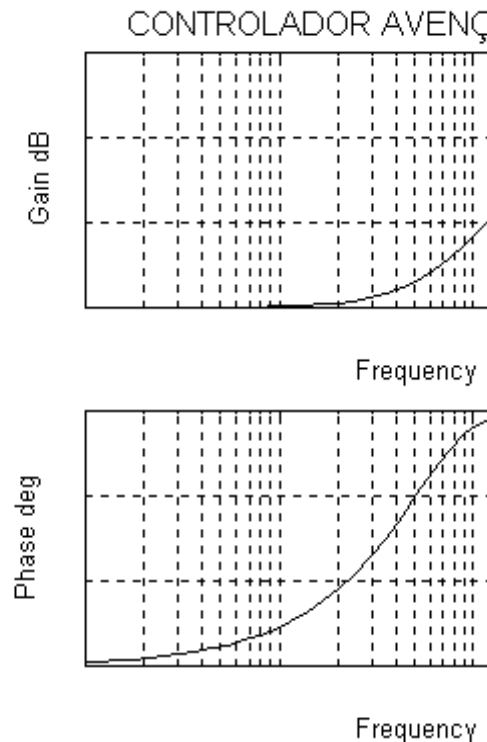
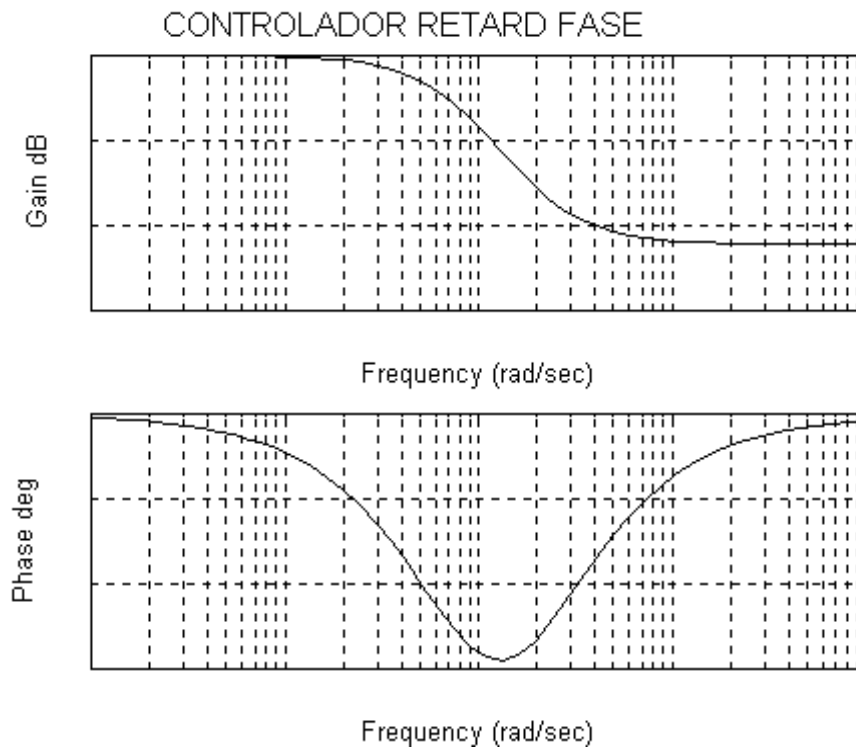
$G_c(s) = \frac{s+Z1}{s+P1} = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ Presenten un pol a $s+P1$ i un zero a $s+Z1$

$s+P1$ $1+Ts$

Avanç de Fase $P1 > Z1$ $a < 1$

Retard de Fase $P1 < Z1$ $a > 1$

La seva resposta freqüencial és: Es sintonitzem utilitzant els diagrames de Bode



Disseny dels controladors Avanç–Retard fase

Per sintonitzar–los calen 2 especificacions, Normalment MP (Sobrepic) i error.

- dibuixar Bode per $K = 1$ de $G_p(s)$
- Mirar MP i comparar–lo amb el desitjat
- " $G_c(j) = G_p(j) - MP$ "

$$n = 1/a * T \text{ Freq. tall del sistema}$$

Si coneixem l'angle $\angle G_c(j) = m$ obtenim a com:

$$a = (1 + \sin m) / (1 - \sin m) \text{ m l'escollim segons els especificacions}$$

el guany del controlador en alta freq és: $GF = 20 * \log a$

Cal ajustar perquè la freq. Estigui a $-GF/2$, llavors utilitzar la fórmula

$$n = 1/a * T \text{ Per determinar la T}$$

Perquè sigui efectiu el valor de T ha de ser petit.

Filtres de cancelació de zeros

Normalment al dissenyar controladors PI, PD i PID cal mirar on cauen els 0s

CASOS:

- 0's insignificants Estàn a $D > 10$, el controlador funciona
- 0's a $5 < D < 10$ podem despreciar els efectes tot hi que afecten poc
- 0's pròxims a pòls del controlador, cancelen els afectes, cal eliminar-los
- 0's dominants. Cal eliminar-los perquè ens afecten la resposta
- altres casos: Cal avaluar l'efecte dels 0s

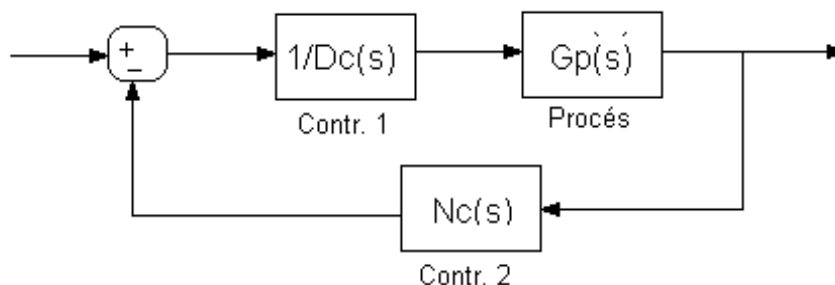
Per eliminar els 0's hem de dissenyar filtres que permetin eliminar-los

Assignació de pòls completa

Per evitar aquesta addició d'un zero que fa que la resposta no es correspongui exactament amb la desitjada hem de variar lleugerament l'estructura del sistema de control. Simplement restructurant la posició del controlador dins del sistema de control com es mostra a la figura la funció de transferència ens queda:

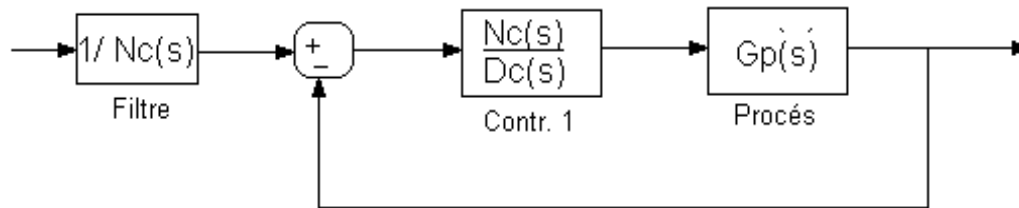
$$T(s) = \frac{N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \quad N_p(s) = \text{num. Procés}, D_p(s) = \text{den. Procés}$$

$$D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s) \quad N_c(s) = \text{den. controlador} \quad D_p(s) = \text{den. contr.}$$



Filtre de Muesca

Una altra forma de treure els 0's és fer un controlador és utilitzar un pre-filtre a l'entrada per suavitzar la senyal i que ens ajudi a cancel.lar els 0's



Possibles problemes a tenir en compte

- ***Linealització de processos no lineals, aproximació de processos complexes***
- ***Errors de precisió, modelització. Estadística dels paràmetres***
- ***Variacions de les propietats dinàmiques del sistema i que els pols es moguin***
- ***Paràmetres controlador limitats pels components físics disponibles***
- ***Perturbacions variables en el sistema***

...

Això fa que la cancel·lació de pols/zeros sigui pràcticament impossible