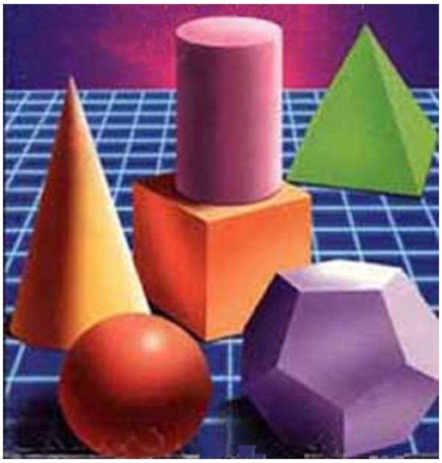

Ã ndice

Ejercicio 10, pÃ¡gina 184

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Para las afirmaciones que consideres que son falsas pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si tres vectores: , cumplen , entonces

Esta afirmaciÃ³n es falsa:

Podemos ver, que aplicando la propiedad del producto escalar:

Valor numÃ©rico

Aunque los valores de , el resultado sigue siendo el mismo: 1. Por lo tanto, podemos decir que la premisa es verdadera, pero no la soluciÃ³n.

b) No existen dos vectores cumpliendo y

Esta afirmaciÃ³n es falsa.

Primeramente porque es un producto escalar, por lo tanto, no tiene mÃ³dulo, asÃ– que la afirmaciÃ³n es falsa.

Lo que podemos considerar posible es:

=

3 = 1Â· 2 Â· cos cos= y como este resultado es >1, y sabemos que los valores de coseno no pueden serlo, no existe.

c) Si tres vectores , son linealmente independientes, entonces tambiÃ©n lo son los vectores , y

Para que se cumpla esta propiedad, los determinantes formados por estos vectores deben ser distintos de cero, es decir, el rango de la matriz determinada por los mismos debe ser de rango 3.

Entonces, si aplicamos la afirmaciÃ³n del enunciado:

Por lo que podemos concluir, que si aplicamos las propiedades de los determinantes, substituyendo una fila o columna por la suma de Ã©sta como combinaciÃ³n lineal de las otras, si determinante debe dar distinto de cero, significando que los tres vectores son independientes y por lo tanto puedes formar una base.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 3. OpciÃ³n A)

Ejercicio 20, pÃ¡gina 185

Se sabe que los puntos P1 (2,-3,3) y P2 (0, 1,-1) son vÃ©rtices de un cuadrado C. Halla los otros dos vÃ©rtices de C, sabiendo que estÃ¡n en la recta:

Primeramente, planteamos un esquema del enunciado, sabiendo que el punto donde se cruzan las dos diagonales del cuadrado C es el punto medio, que vamos a abreviar como PM

Sabemos que el punto P4 y el punto P2 estÃ¡n en la misma recta que P3 y P1, por lo tanto, PM tambiÃ©n estÃ¡ contenido en Ã©sta.

Sabemos que el punto P4 y el punto P2 estÃ¡n en la misma recta que P3 y P1, por lo tanto, PM tambiÃ©n estÃ¡ contenido en Ã©sta.

Calculamos el punto medio siguiendo la fÃ³rmula:

Sustituimos los valores de los puntos P3 y P1:

El Punto Medio es: (1, -1, 1)

De todos modos, para **comprobar** que el planteamiento, sustituimos este punto en la ecuaciÃ³n de la recta r para verificar, tanto que el resultado sea correcto, como que realmente este punto estÃ© contenido en la recta:

1 = 1 = 1. Se verifica.

Al ser un cuadrado, sabemos que la distancia del punto P1 al PM es la misma que la del punto P2 al PM, es decir:

De este modo, vamos a determinar los valores de que posteriormente nos van a servir para determinar los otros dos vÃ©rtices:

AclaraciÃ³n: *Para hallar los valores de P2, hemos planteado la recta r de forma paramÃ©trica:*

Seguidamente, calculamos los mÃ³dulos de los dos vectores encontrados anteriormente, aplicando la fÃ³rmula del mÃ³dulo:

=

= =

==

= = 0

Ahora, sustituimos los valores 0 y 2 en la ecuaciÃ³n paramÃ©trica de la recta r para hallas P2 y P4:

Para

Para

(Navarra. Septiembre 2008. Grupo 1. OpciÃ³n A)

Ejercicio 30, pÃ¡gina 186

a) Los puntos A (1,1,0), B(0,1,1) y C(-1,0,1) son vÃ©rtices consecutivos de un paralelogramos ABCD. Calcula las coordenadas del vÃ©rtice D y el Ã¡rea del paralelogramo.

Primeramente, planteamos el enunciado con un esquema, considerando un paralelogramo cualquiera:

Seguidamente, para **calcular las coordenadas**, planteamos:

=

A - B = D - C

D = A - B + C

Por lo tanto:

(x,y,z) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (-1, 0, 1)

(x,y,z) = (1, 0,-1) + (-1, 0, 1)

(x, y, z) = (0, 0, 0), es decir, las coordenadas del vÃ©rtice D son (0, 0, 0)

Para **hallar el Ã¡rea**, enunciamos, primeramente, la fÃ³rmula que nos va a permitir calcularla:

Ã rea =

Para calcular planteamos el siguiente determinante:

AsÃ– que, siendo y y :

Ahora, para hallar el Ã¡rea, calculamos el mÃ³dulo de ese vector:

Por lo tanto, el Ã¡rea es

b) Calcula la ecuaciÃ³n del plano que pasa por el punto B (0,1,1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (1,1,0) y C (-1,0,1)

Primeramente, definimos la recta que contiene los puntos A y C:

(x,y,z) = (1,1,0) + k(-2,-1,1)

AclaraciÃ³n: *El vector (-2,-1,1) es el vector que forman los dos puntos A y C, es decir:*

Seguimos operando con la recta definida de forma vectorial para hallar el vector perpendicular a Ã©sta:

$x = 1 - 2k$

$y = 1 - k$ Por lo tanto, el vector perpendicular a esta recta es: (-2, -1, 1)

$z = k$

Una vez hallado este vector, lo sustituimos a la ecuaciÃ³n general del plano, es decir del tipo:, sustituiremos los valores de A,B,C por el vector (-2, -1, 1), y los valores de x, y, z por el punto B (0,1,1), de este modo, vamos a encontrar el coeficiente D

- Sustituimos los coeficientes por (-2, -1, 1) $-2x - y + z + D = 0$
- Sustituimos x, y, z por (0,1,1) -2Â·0 + -1Â·1 + 1Â·1 + D = 0
- Operamos $-1 + 1 + D = 0$ $D = 0$

La ecuaciÃ³n del plano que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta que pasa por A y C es: $-2x - y + z = 0$

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 2. OpciÃ³n 1)

Ejercicio 40, pÃ¡gina 187

Dados el plano , donde , y la recta , se pide:

a) Demuestra que para cualquier valor , la recta r es paralela al plano

Primeramente, representamos el plano y la recta en un esquema, con sus vectores directores:

Una vez considerado el esquema y que ambos vectores directores son perpendiculares, calculamos el producto escalar de ambos vectores directores (al ser perpendiculares, el resultado debe ser cero):

Por lo tanto, este resultado indica que el hecho de que el plano y la recta sean paralelos no depende de K.

b) Determina el valor de de forma que la recta r estÃ© contenida en el plano :

Primeramente, obtenemos el punto Pr de la recta, que serÃ¡ Pr (3, -1, 0), y luego substituimos estos valores en la ecuaciÃ³n del plano:

Por lo tanto, cuando k=-4, la recta estÃ¡ contenida en el plano.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2008. Bloque 4. Pregunta B)

Ejercicio 50, pÃ¡gina 187

Sean P y Q los puntos de coordenadas P(a, b, 0) y Q (1, 2,3). Â¿Existen valores de a y b para los cuales la recta que une P y Q contenga al punto R dado por R (0,0,1)? Razona la respuesta en caso negativo. Si la respuesta es positiva calcular los valores de a y b.

Primeramente, dibujamos un esquema que contenga la recta y los tres puntos:

Establecemos la razÃ³n de proporcionalidad entre los vectores:

Calculamos los vectores:

Seguidamente, planteamos la razÃ³n de proporcionalidad, ya que los puntos deben estar alineados:

Sustituimos los valores:

Para comprobar que los valores hallados de a y b son correctos, sustituimos los puntos en la razÃ³n de proporciÃ³n citada anteriormente:

Los valores son correctos.

Por lo tanto, los valores buscados de a y b son:

a =

b = -1

(PaÃ–s Vasco. Junio 2007. Bloque B. CuestiÃ³n B)Ejercicio 60, pÃ¡gina 188

Los lados de un triÃ¡ngulo rectÃ¡ngulo estÃ¡n sobre las rectas:

a) Calcula los vÃ©rtices del triÃ¡ngulo. Â¿Es un triÃ¡ngulo rectÃ¡ngulo? Razona la respuesta.

Primeramente, hacemos un esquema, dibujando **un triÃ¡ngulo cualquiera:**

Seguidamente y para iniciar el cÃ¡lculo de lo vÃ©rtices, pasamos todas las ecuaciones como intersecciÃ³n de dos planos:

Siguiendo el esquema, determinamos el vÃ©rtice A como intersecciÃ³n entre r1 y r2, el vÃ©rtice B como intersecciÃ³n de r1 y r3, y finalmente, el vÃ©rtice C como intersecciÃ³n de r2 y r3, por lo tanto, para hallar el punto de intersecciÃ³n, que serÃ¡ el vÃ©rtice, resolvemos el sistema determinado por las dos rectas.

A r1 y r2

El vÃ©rtice A es el punto A = (1, 1,-1)

B r1 y r3

El vÃ©rtice B es el punto B = (3,-1,3)

C r2 y r3

El vÃ©rtice C es el punto C = (-1,-1,-1)

Para determinar si es un triÃ¡ngulo rectÃ¡ngulo, calcularemos los mÃ³dulos de los vectores que determinan los lados para finalmente aplicar PitÃ¡goras.

Aplicando PitÃ¡goras:

a c

b

Si el triÃ¡ngulo estudiado cumple esta igualdad, entonces serÃ¡ un triangulo rectÃ¡ngulo:

Como la igualdad se cumple, efectivamente, el triangulo estudiado es rectÃ¡ngulo.

b) Calcula la ecuaciÃ³n del plano que contiene al triÃ¡ngulo. Calcula la intersecciÃ³n del plano con los ejes X, Y, Z.

Primeramente, hacemos un esquema:

Sabemos que para definir un plano, necesitamos un punto y dos vectores; Vamos a elegir el punto del vÃ©rtice A = (1, 1,-1) y los vectores y :

(x ,y ,z) =

La ecuaciÃ³n del plano que contiene el triÃ¡ngulo es: .

Ahora, calculamos la intersecciÃ³n de este plano con los ejes X, Y, Z:

Eje x La intersecciÃ³n con el eje X es el punto (1, 0, 0)

Eje y La intersecciÃ³n con el eje Y es el punto (0,-1,0)

Eje z La intersecciÃ³n con el eje Z es el punto (0, 0,-1)

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 2. OpciÃ³n 2)

Ejercicio 70, pÃ¡gina 188

a) Determina la posiciÃ³n relativa del plano x - y + 2 = 2 **y la recta de ecuaciones:**

Para determinar la posiciÃ³n relativa de un plano y una recta, debemos calcular el rango de la matriz formada por ambos; Recordamos las propiedades de la posiciÃ³n relativa:

Secantes: *La recta y el plano se cortan en un punto. El sistema es compatible determinado. Rango (M) = 3 y Rango (M*)=3*

Paralelos: *La recta y el plano no se cortan. El sistema es incompatible.*

Rango (M)=2 y Rango (M)=3*

Recta contenida en el plano: *La recta estÃ¡ contenida en el plano. El sistema es compatible determinado. Rango (M)=2 y Rango (M*)=2*

DespuÃ©s de haber recordado las propiedades, planteamos el sistema entre la recta (que la expresamos como intersecciÃ³n de dos planos) y el plano dados:

Rango 2

Rango 3

b) Calcula la distancia entre la recta y el plano anteriores.

Para determinar la distancia entre un plano y una recta, calculamos la distancia entre un punto contenido en la recta y el mismo plano siguiendo la fÃ³rmula:

Un punto contenido en la recta es: Pr = (0,-1,-2), ahora, sustituimos los valores en la fÃ³rmula:

(Extremadura. Septiembre 2007. OpciÃ³n B. Ejercicio 4)

Ejercicio 80, pÃ¡gina 189

Dados los puntos de coordenadas A (3, 1, 1), B (0, 2, 2) y C (-1,-1,-1)

a) Determina la ecuaciÃ³n general del plano que los contiene.

Para determinar un plano, necesitamos dos vectores y un punto, calcularemos los vectores y , y vamos a elegir el punto A:

Empezamos planteando la ecuaciÃ³n vectorial para llegar a la general:

b) Calcula la distancia entre el punto P (0 ,0 ,4) a dicho plano.

Para calcular la distancia entre el punto y el plano aplicamos la fÃ³rmula:

Sustituimos los valores:

La distancia entre el punto P (0, 0, 4) y el plano es de

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 4. Pregunta B) Ejercicio 90, pÃ¡gina 190

Dados el punto P (2, 2, 1) y el plano de ecuaciones , se pide:

a) Distancia del punto P al plano .

Primeramente, hacemos un esquema:

Para hallar la distancia entre el punto P y el plano aplicamos la fÃ³rmula:

b) Ecuaciones generales de la recta que pasa por el punto P y el perpendicular a

Primeramente, hacemos un esquema:

Para determinar el Vn del plano, cogemos los coeficientes de las incÃ³gnitas en la ecuaciÃ³n general (-1,-1,2), debemos tener en cuanta que es perpendicular al plano, por lo tanto, la recta que contenga el punto y pase por el Vn perpendicular al plano, tambiÃ©n serÃ¡ perpendicular, y eso es lo que buscamos.

Para definir una recta, necesitamos un vector y un punto, elegimos el punto P y el Vn del plano:

Las ecuaciones generales de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano son:

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2008. Bloque 4. Pregunta B)

Ejercicio 100, pÃ¡gina 191

Considera los puntos A (1, 0, -2) y B (-2, 3, 1)

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

Primeramente hacemos un esquema:

Como los tres segmentos son iguales:

Calculamos y

Aplicamos substituimos los valores en :

El punto C = (0, 1, -1)

Ahora, calculamos el punto medio entre C y B para hallar D:

El punto D = (-1, 2, 0)

Por lo tanto, los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales son C = (0, 1, -1) y D = (-1, 2, 0)

b) Calcula el Ã¡rea del triÃ¡ngulo de vÃ©rtices A, B y C donde C es un punto de la recta de ecuaciÃ³n r: -x = y-1 = z. **Â¿Depende el resultado de la elecciÃ³n concreta de C?**

Primeramente, hacemos un esquema de un **triÃ¡ngulo cualquiera:**

Seguidamente, para hallar el punto C, resolvemos el sistema que se nos planeta cuando escribimos la ecuaciÃ³n de la recta como intersecciÃ³n de dos planos:

Como este sistema solo tiene dos ecuaciones y tres incÃ³gnitas, debemos poner una de ellas en funciÃ³n del parÃ¡metro :

Los tÃ©rminos independientes, en este caso (0, 1, 0) es el punto genÃ©rico de la recta, es decir C.

Ahora, determinamos y.

Finalmente, para calcular el Ã¡rea aplicamos la fÃ³rmula:

Sustituimos los valores:

(AndalucÃ−a. Septiembre 2006. OpciÃ³n B. Ejercicio 4)

12

PM

P4

P3= (0, 1,-1)

P1 = (2,-3,3)

P2 = (x,y,z)

D = (x,y,z)

C = (-1,0,1)

B = (0,1,1)

A = (1,1,0)

Por lo tanto los dos vÃ©rtices del cuadrado que buscÃ¡bamos, P2 y P4 son:

P2 = (3, -2, -1)

P4 = (-1, 0 ,3)

Es importante tener en cuenta que el Vd del plano y el Vd de la recta son perpendiculares cuando el plano y la recta son paralelos

P = (a,b,0)

Q = (1,2,3)

R = (0,0,1)

A

B

C

Consultando las propiedades citadas anteriormente, determinamos que plano y recta son paralelos.

La distancia entre el plano y la recta es:

La ecuaciÃ³n general del plano que contiene a los tres puntos es:

- **P (2,2,1)**

Vd de la recta

La distancia entre el plano y el punto es: 2u

- **P (2,2,1)**

Vd de la recta

Vn (normal) del plano

A C (x,y,z) D B

A = (1, 0, -2)

$B = (-2, 3, 1)$

$C = ?$

Es un punto de r: $-x = y-1 = z$

Por lo tanto el Ã rea buscada es: