

## Ley de los Senos

La ley o teorema de los Senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera, y que es útil para resolver ciertos tipos de problemas de triángulos. Especialmente los triángulos oblicuángulos, es decir, aquellos que carecen de un ángulo recto o de 90°.

La ley de los Senos dice así:

*En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

Su fórmula es la siguiente:

$$\frac{A}{\text{sen}(a)} = \frac{B}{\text{sen}(b)} = \frac{C}{\text{sen}(c)}$$

Donde A, B y C (mayúsculas) son los lados del triángulo, y a, b y c (minúsculas) son los ángulos del triángulo:

Las letras minúsculas de los ángulos se encuentran separadas de su letra mayúscula. Es decir, la a está en el ángulo opuesto de A. La b está en el ángulo opuesto de B. Y la c está en el ángulo opuesto de C.

### Resolución de triángulos por la ley de los Senos

Resolver un triángulo significa encontrar todos los datos que te faltan, a partir de los datos que te dan (que generalmente son tres datos).

\*Nota: No todos los problemas de resolución de triángulos se pueden resolver con la ley de los senos. A veces, por los datos que te dan, sólo la ley de los cosenos lo puede resolver.

En general, si en un problema de triángulos te dan como datos 2 ángulos y un lado, se usa la ley de los senos. Si por el contrario te dan dos lados y el ángulo que hacen esos dos lados, usa la ley del coseno.

Por ejemplo: resolver el triángulo siguiente:

Llamemos **b** al ángulo de 27° porque está opuesto al lado **B**; **a** al ángulo de 43° y **A** al lado de 5. Lo que se tiene entonces es lo siguiente:

$$A = 5 \quad B = ?$$

$$a = 43^\circ \quad C = ?$$

$$b = 27^\circ \quad c = ?$$

El ángulo **c** es muy fácil de encontrar, porque la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre suma 180°. Es decir: **c** = 180° - **a** - **b**. Se sustituye en esta expresión los ángulos:

$$c = 180^\circ - 43^\circ - 27^\circ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$c = 110^\circ$$

Con esto, se cuenta ya con los tres ángulos a, b y c. Para encontrar los lados faltantes usamos la ley de los senos:

$$\frac{A}{\sin(a)} = \frac{B}{\sin(b)} = \frac{C}{\sin(c)}$$

$\sin(a) \sin(b) \sin(c)$

Sustituyendo queda:

Se fija la atención en los dos primeros términos:

En este momento se ignorará el tercer término. De la igualdad que se encuentra en el recuadro se puede despejar B, (como el  $\sin 27^\circ$ ) y, debido a que está dividiendo abajo, pasa del lado izquierdo multiplicando arriba:

Entonces se calcula la siguiente expresión:

$$\frac{2.26995}{\sin(43^\circ)} = B$$

Solamente queda por calcular C. Para ello, se volverá a usar la ley de los Senos, pero ahora si tomaremos en cuenta la igualdad que contenga a la C:

$$\frac{3.32838}{\sin(27^\circ)} = \frac{C}{\sin(110^\circ)}$$

Se sustituye el valor de la B en la igualdad.

Se despeja la C, por lo tanto, como  $\sin 110^\circ$  está dividiendo abajo, pasa del lado izquierdo multiplicando arriba:

Se realiza la operación correspondiente y resulta:

$$\frac{3.12765}{\sin(27^\circ)} = C$$

Con este última dato queda resuelto todo el triángulo.

Obsérvese que si en lugar de haber usado la igualdad de la derecha se hubiera usado la de los extremos, el resultado habría sido exactamente el mismo:

$$\frac{5}{\text{sen}(43^\circ)} = \frac{3.32838}{\text{sen}(27^\circ)} = \frac{C}{\text{sen}(110^\circ)}$$

Escrito ya sin el término de en medio:

$$\frac{5}{\text{sen}(43^\circ)} = \frac{C}{\text{sen}(110^\circ)}$$

Se despeja la **C** :

$$\frac{5 \cdot \sin(110^\circ)}{\sin(43^\circ)} = C$$

Se realizan las operaciones, y el resultado obtenido es igual que el anterior: **C = 6.88925**

Ejemplos de resolución de triángulos oblicuángulos por la ley de senos.

Datos Fórmulas

$$A = 80^\circ 25', A + B + C = 180^\circ;$$

$$B = 35^\circ 43', a = b = c .$$

$$c = 60. \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$$

Cálculo de C.

$$A + B + C = 180^\circ; 80^\circ 25' + 35^\circ 43' + C = 180^\circ; 116^\circ 8' + C = 180^\circ$$

.

$$\therefore C = 180^\circ 116^\circ 8' = \mathbf{63^\circ 52'}$$

Cálculo de a.

$$a = c ; \underline{a} = \underline{60}$$

$$\text{Sen } A \text{ sen } C \text{ sen } 80^\circ 25' \text{ sen } 63^\circ 52'$$

$$\underline{a} = \underline{60}$$

$$0.98604 \ 0.89777$$

.

$$\therefore a = (\underline{60}) (\underline{0.98604}) = \underline{59.16240} = \mathbf{65.88}$$

$$0.89777 \ 0.89777$$

Cálculo de b.

$$b = c ; b = 60 .$$

$$\text{sen } B \text{ sen } C \text{ sen } 35^\circ 43' \text{ sen } 63^\circ 52'$$

$$\underline{b} = 60 .$$

$$0.58378 \ 0.89777$$

.

$$\therefore b = \frac{(60)(0.58378)}{0.89777} = 39.01$$

$$0.89777$$

### **Ejemplo no. 2**

$$a = 41$$

$$B = 27^\circ 50'$$

$$C = 51^\circ$$

$$A = 27^\circ 50' + 51^\circ - 180^\circ = A = 101^\circ 10'$$

*Cálculo de c*

$$\underline{a} = \frac{c}{41} = \frac{c}{c} = 32.4778$$

$$\text{Sen } A \text{ Sen } C \text{ Sen } 19^\circ 10' \text{ Sen } 51^\circ$$

*Cálculo de b*

$$\underline{b} = \frac{41}{b} = 19.5123$$

$$\text{Sen } 27^\circ 50' \text{ Sen } 101^\circ 10'$$

### **Ejemplo no. 3**

$$a = 78.6$$

$$A = 83^\circ 26'$$

$$B = 39^\circ 13'$$

$$C = 83^\circ 26' + 39^\circ 13' - 180^\circ C = 57^\circ 21'$$

*Cálculo de b*

$$\underline{78.6} = \frac{b}{b} = 50.0233$$

Sen83° 26' Sen39°13'

*Cálculo de c*

$$\underline{78.6} = \underline{c}, c = \mathbf{66.6168}$$

Sen83°26' Sen57° 21'

Ley del Coseno

La ley de los Coseno es un término que permite conocer cualquier lado de un triángulo, pero para resolverlo pide que conozcas los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado que quieres conocer. La ley de los Cosenos ayuda a resolver ciertos tipos de problemas de triángulos, como los triángulos oblicuángulos, los cuales carecen de un ángulo de 90°.

La ley del Coseno dice así:

*En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos, por el coseno del ángulo que forman*

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC \cos(a)}$$

Pero si tienes los lados, y quieres saber el ángulo que hacen los lados B y C, entonces realizaras la siguiente formula:

A, B y C son los lados del triángulo, y a, b y c son los ángulos del triángulo:

Las letras minúsculas y mayúsculas del mismo tipo no se encuentran juntas, es decir, la a está en el ángulo opuesto de A, la b está en el ángulo opuesto de B y la c está en el ángulo opuesto de C. Esto siempre debe ser así cuando resuelvas un triángulo. Si no lo haces así, el resultado seguramente te saldrá erróneo.

Observa que la ley del coseno sólo será cuando tienes los dos lados y el ángulo que hacen los lados, porque si no te dan el ángulo que hacen los lados, tendrás que usar la ley de senos.

Arriba se muestran las características que tiene que tener el triángulo para resolverlo por la ley de cosenos, es decir, los tres datos necesarios.

Recuerda que para sacar el ángulo interno la suma de los tres ángulos internos dará 180° y te quedara la formulita de la manera siguiente:

$$c = 180^\circ - a - b$$

### **Ejemplos de resolución de triángulos oblicuángulos.**

#### **Primer caso: Conocidos los tres lados.**

Ejemplo. Resolver el triángulo cuyos datos son:

$$a = 34, b = 40, c = 28.$$

Se aplica la ley de coseno.

Cálculo de A.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

Despejando  $\cos A$ :  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos A = \frac{40^2 + 28^2 - 40^2}{2 \times 40 \times 28} = \frac{1600 + 784 - 1156}{2240} = \frac{2284}{2240} = 0.54821.$$

$$2 \times 40 \times 28 = 2240$$

.

$$\therefore A = 56^\circ 45'.$$

Cálculo de B.

Análogamente:  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

.

$$\therefore \cos B = \frac{34^2 + 28^2 - 40^2}{2 \times 34 \times 28} = \frac{1156 + 784 - 1600}{1904} = \frac{340}{1904} = 0.17857.$$

$$(2) \quad (34) \quad (28) \quad 1904$$

.

$$\therefore B = 79^\circ 43'.$$

Cálculo de C.

Análogamente:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$2ab$$

$$\cos C = \frac{34^2 + 40^2 - 28^2}{2 \times 34 \times 40} = \frac{1156 + 1600 - 784}{2720} = \frac{1972}{2720} = 0.72500$$

$$(2) \quad (34) \quad (40) \quad 2720$$

.

$$\therefore C = 43^\circ 32'.$$

Es decir:

$$A = 56^\circ 45'$$

$$B = 79^\circ 43'$$

$$C = 43^\circ 32'$$

$$A + B + C = 178^\circ 120' = 180^\circ.$$

**Segundo caso. Se resolverá un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido.** Resolver el triángulo cuyos datos son:

$$A = 68^\circ 18'; b = 6; c = 10.$$

Datos Fórmulas

$$A = 68^\circ 18', a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

$$b = 6, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c = 10, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$c = 10, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$2ab$$

*Cálculo de a.*

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2(6)(10)(\cos 68^\circ 18')}.$$

$$a = \sqrt{36 + 100 - (120)(0.36975)} = \sqrt{136 - 44.37} = \sqrt{91.63}$$

$$a = 9.57$$

*Cálculo de B.*

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{9.57^2 + 10^2 - 6^2}{2(9.57)(10)} = \frac{91.63 + 100 - 36}{191.4}$$

$$\cos B = \frac{191.63 - 36}{191.4} = \frac{155.63}{191.4} = 0.81311.$$

$$\cos B = \frac{191.63 - 36}{191.4} = \frac{155.63}{191.4} = 0.81311.$$

$$\bullet 191.4$$

.

$$\therefore B = 35^\circ 36'.$$

*Cálculo de C.*

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9.57^2 + 6^2 - 10^2}{2(9.57)(6)} = \frac{91.63 + 36 - 100}{114.84}$$

$$\cos C = \frac{127.63 - 100}{114.84} = \frac{27.63}{114.84} = 0.24059.$$

$$\cos C = \frac{127.63 - 100}{114.84} = \frac{27.63}{114.84} = 0.24059.$$

$$\bullet 114.84$$

$$\therefore C = 76^\circ 6.$$

### Ejemplo no. 3

$$a = 41$$

$$b = 19.5$$

$$c = 32.48$$

*Cálculo de A*

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2a$$

$$\cos A = \frac{(19.5)^2 + (32.48)^2 - (41)^2}{2(19.5)(32.48)} = \frac{380.25 + 1054.9504 - 1681}{1266.72}$$

$$\cos A = -0.194044145 \quad A = \cos^{-1} -0.194044145 \quad A = 101.188^\circ$$

*Cálculo de B*

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2ac$$

$$\cos B = \frac{(41)^2 + (32.48)^2 - (19.5)^2}{2(41)(32.48)} = \frac{1681 + 1054.9504 - 380.25}{2663.36}$$

$$\cos B = \frac{2355.7004}{2663.36} = 0.88448 \quad B = \cos^{-1} 0.88448 \quad B = 27.8118^\circ$$

$$\cos B = \frac{2355.7004}{2663.36} = 0.88448 \quad B = \cos^{-1} 0.88448 \quad B = 27.8118^\circ$$

$$2663.36$$

*Cálculo de C*

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$2ab$$

$$\cos C = \frac{(41)^2 + (19.5)^2 - (32.48)^2}{2(41)(19.5)}$$

$$2(41)(19.5)$$

$$\cos C = \frac{1681 + 380.25 - 1054.9504}{1599} = \frac{1006.2996}{1599} = 0.62933$$

$$1599 \quad 1599$$

$$\cos -10.62933 \text{ C} = 50.9992^\circ$$

Ley de las tangentes:

Teorema según el cual en todo triángulo la tangente de uno de sus ángulos es igual a su seno dividido por su coseno:

$$\text{tg} = \text{sen} / \text{cos} .$$

Conclusión

En el presente trabajo se comprendieron las leyes de los senos y los cosenos, la función de cada una de ellas, algunos de sus despejes, así como ejemplos de sus aplicaciones para los distintos casos de incógnitas en los triángulos oblicuángulos.

Se espera que el documento cuente con los aspectos solicitados para el cumplimiento de los porcentajes de la presente evaluación.

Bibliografía

BALDOR. Geometría plana y del espacio y Trigonometría.

Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2002. © 1993–2001 Microsoft Corporation.

<http://www.paginasdeinternet.net/san calculo/mexico/trigonometria/>

<http://www.el-ladrillo.com/t.htm>

<http://www.math2.org/math/trig/es-identities.htm>

$$\text{B} = 3.32838$$

$$6.88925 = \text{C}$$