

### Objetivos.

Percatarse de la influencia del coeficiente de fricción en el valor de la fuerza motriz de cada uno de los movimientos, por separado y en conjunto.

Considerar las distintas posibilidades de deslizamiento y vuelco de un cuerpo apoyado sobre una superficie plana rugosa, al aplicársele una fuerza genérica, y determinar, mediante el programa MATHEMATICA, la evaluación precisa de ésta en cada caso.

### Material.

- Ordenador, que contiene el programa de cálculo simbólico y numérico MATHEMATICA.
- Impresora, para la expresión gráfica de los resultados.

### Planteamiento del problema.

Una caja cúbica homogénea de arista  $a$  y peso  $W$  está sustentada sobre un suelo horizontal. El coeficiente estático de rozamiento entre dichas superficies es  $\mu$ .

Se tira de la caja mediante una cuerda que ejerce una fuerza  $T$ , según indicamos en la figura adjunta. Se pide:

- El menor valor de  $T$  para que la caja se deslice.
- El menor valor de  $T$  para que la caja vuelque.
- El menor valor de  $T$  para que la caja se deslice y vuelque simultáneamente.

El valor del ángulo que forma la fuerza con la horizontal está comprendido en el intervalo:  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

### Método y resultados.

Introducimos en el programa los parámetros característicos del cuerpo (el peso de la caja  $W$  y su geometría, definida al ser cúbica por la arista  $a$ ), así como el coeficiente de fricción entre las superficies de contacto de la caja y el suelo.

Los valores utilizados para estos parámetros serán aleatorios (aunque obviamente positivos), y el valor numérico del peso se introducirá en unidades de kg.

Realizamos el programa para varias series de parámetros diferentes (particularmente para varios casos en los que sólo varíe el coeficiente de rozamiento).

- Menor valor de  $T$  para que deslice.

Analizamos la situación de la caja en el momento de equilibrio ( $\sum F = 0$ ).

$$T \cos(\theta) - F_{roz} = 0$$

$$T \cos(\theta) = N$$

$$N = \frac{T \cos(\alpha)}{\mu}$$

$$FV = N + T \sin(\alpha) - W = 0$$

$$N = -T \sin(\alpha) + W$$

$$\text{Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos: } \frac{T \cos(\alpha)}{\mu}$$

$$= -T \sin(\alpha) + W$$

Y desarrollándolo obtenemos la expresión de la tensión en función de W,  $\mu$  y  $\alpha$ :

$$\frac{T \cos(\alpha)}{\mu} + T \sin(\alpha) - W = 0$$

$$T \cos(\alpha) + [T \sin(\alpha) - W] \mu = 0$$

$$T = \frac{\mu W}{\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha)}$$

Y para obtener la expresión de la T<sub>min</sub> derivamos e igualamos a cero:

$$T' = \frac{\mu W [-\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)]}{[\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha)]^2}$$

$$= 0$$

$$W [-\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)] = 0$$

$$-\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha) = 0$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$= \tan(\alpha)$$

$$= \arctan(\alpha)$$

$$\text{Y entonces } T_{\min} = \frac{\mu W}{\cos[\arctg(\mu)] + \mu \sin[\arctg(\mu)]}$$

b)– Menor valor de T para que vuelque.

Analizamos la situación de la caja en el instante anterior al vuelco (  $M = 0$  ).

$$MC = T \sin(\alpha) a + T \cos(\alpha) a + N_0 - W(a/2) = 0$$

$$a [T (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) + 0 - W/2] = 0$$

$$T = \frac{W/2}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}$$

Y para obtener la  $T_{\min}$  de vuelco, derivamos e igualamos a cero:

$$T = \frac{W/2 \cos[\cos(\alpha) - \sin(\alpha)]}{[\sin(\alpha) + \cos(\alpha)]^2}$$

$$= 0$$

$$W/2 [\cos(\alpha) - \sin(\alpha)] = 0$$

$$[\cos(\alpha) - \sin(\alpha)] = 0$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{Y entonces } T_{\min} = \frac{W/2}{\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)}$$

Cuestiones.

- **Para unos valores determinados del peso  $W$  y del coeficiente de fricción  $\mu$ , ¿qué influencia tiene en la solución del problema la longitud de la arista  $a$  de la caja?**

La solución del problema depende del coeficiente de rozamiento ( $\mu$ ), del peso ( $W$ ) y del ángulo que forma la cuerda con la caja al ejercer una fuerza ( $T$ ), así que la longitud de la arista de la caja (con la geometría anteriormente indicada) no influye sobre dicha solución.

- Para un peso de  $W = 200\text{kg}$  y un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0.4$ , realice pormenorizadamente los cálculos pertinentes que resuelven el problema y compruebe sus resultados con los obtenidos en el programa.

Para el deslizamiento: 
$$T_{\min} = \frac{\mu W}{\cos[\arctg(\mu)] + \mu \sin[\arctg(\mu)]}$$

Sustituyendo los valores anteriores obtenemos:

$$T_{\min} = \frac{0,4 \cdot 200}{\cos[\arctg(0,4)] + 0,4 \sin[\arctg(0,4)]}$$

$$= 74,2781 \text{ kg.}$$

Siendo  $\theta = \arctg(\mu) = 21,8014^\circ$ .

Para el vuelco: 
$$T_{\min} = \frac{W/2}{\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)}$$

Sustituyendo los valores propuestos obtenemos:

$$T_{\min} = \frac{200/2}{\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)}$$

$$= 40,7107 \text{ kg.}$$

Siendo el valor de  $\theta$  en este caso de  $45^\circ$ .

- En lo que concierne a la parte c) del problema, analice rigurosamente todas las posibilidades que se pueden dar, dependiendo del valor del coeficiente de fricción  $\mu$ , y que se concretan en las siguientes proposiciones:

a)– Si  $\mu > 1/2$ .

Las curvas que representan las funciones correspondientes a los valores de las tensiones  $T$  que hacen inminentes los movimientos de deslizamiento y vuelco del cuerpo, por separado, no tienen intersección, lo que hace ver que el valor más pequeño de la fuerza  $T$  necesario para producir los dos movimientos a la vez es el valor más pequeño que hace inminente el deslizamiento del cuerpo.

b)– Si  $\sqrt{2} - 1 < \mu < 1/2$

.

Las curvas de las funciones tienen un punto de intersección, pero se puede apreciar que no corresponde al menor valor de  $T$  necesario para que se produzcan los dos movimientos simultáneamente. El valor mínimo necesario, de esta fuerza, en este caso es el correspondiente al valor más pequeño que hace inminente el deslizamiento.

c)– Si  $1/3 < \mu < \sqrt{2} - 1$

.

El punto intersección de las dos curvas, que corresponde al valor de  $T$  necesario para que sean inminentes los movimientos de deslizamiento y de vuelco simultáneamente, también corresponde con el menor valor que

realmente produce a la vez dichos movimientos.

d)– Si  $0 < \mu < 1/3$

.

El punto de intersección de las curvas, en este caso no coincide con el menor valor de  $T$  que consigue los dos movimientos simultáneos del cuerpo. El valor mínimo necesario corresponde al valor más pequeño de  $T$  que hace inminente el vuelco.

A continuación presentamos las impresiones de los resultados facilitados por el programa de ordenador (MATHEMATICA), con el fin de comprobar gráficamente lo anteriormente explicado.