0ANALISIS DE VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

1.1. DEFINICIÓN.

Se denomina de esta manera a una barra sujeta a carga lateral; perpendicular a su eje longitudinal, en la que el número de reacciones en los soportes superan al número de ecuaciones disponibles del equilibrio estático, esto es: el número de incógnitas es mayor que:

La figura 1, muestra una viga de este tipo con un extremo simple A y el otro empotrado B bajo una carga puntual P.

A continuación se muestra la viga indicando las reacciones en los soportes. En el soporte A existe sólo reacción vertical puesto que el rodillo no impide el desplazamiento horizontal. En el empotramiento en B hay dos reacciones dado que este soporte no permite ni desplazamientos ni rotaciones.

Puesto que existen tres reacciones desconocidas; las fuerzas cortantes VA y VB y el momento flexionante MB y sólo se dispone de dos ecuaciones de equilibrio; *M y *Fy, la viga es estáticamente indeterminada o hiperestática pues no es posible conocer las tres reacciones con solo dos ecuaciones. (Hay más incógnitas que ecuaciones).

Otro tipo de viga hiperestática es aquella que tiene más de dos soportes, y que se denomina Viga Continua, como la que se muestra en la figura 2.

Este caso corresponde a una barra mucho más compleja de analizar puesto que ahora existen cinco reacciones externas de soporte; las fuerzas cortantes verticales y el momento flexionante en el empotramiento ubicado en A.

Para la solución de estas vigas se requieren ecuaciones adicionales a las del equilibrio estático, un camino a seguir consiste en hacer el análisis de las deformaciones angulares o rotaciones de los nodos cuando las barras se flexionan (pandean), bajo el efecto de las cargas aplicadas. Este análisis se plantea más adelante.

1.2. INDETERMINACIÓN ESTATICA.

Se define como el número de acciones redundantes o exceso de reacciones internas y externas, que no es posible determinar por medio del equilibrio estático. Se puede decir que es la diferencia entre el número de incógnitas y ecuaciones disponibles de equilibrio estático. Por ejemplo la viga de la figura 1 tiene tres reacciones desconocidas y solo se dispone de dos ecuaciones de equilibrio, la viga es indeterminada en grado 1:

Número de incógnitas = NI = 3

Ecuaciones de equilibrio = EE = 2

Grado de indeterminación = GI = NI − EE = 3 − 2 = 1

Viga de la figura 2:

NI = Reacciones verticales y momento en el empotramiento = 5

EE = Equil. vertical y suma de momentos = 2

GI = 5 − 2 = 3

En ambos casos los GI representan el número de ecuaciones adicionales para su solución.

1.3. SOLUCION DE VIGAS HIPERESTATICAS.

Se analizan vigas estáticamente indetermindas con objeto de conocer las reacciones externas e internas en los soportes, así como las deformaciones angulares y lineales que ocuren a través de su longitud cuando se les somete a carga axterna. Las deformaciones angulares son las rotaciones o pendientes que se miden mediante una tangente trazada a la curva elástica (Diagrama de deformación) y las lineales son los desplazamientos verticales que se miden entre el eje original de la viga y el eje cuando la barra se flexiona. La figura 3 muestra esta condición.

P = Carga aplicada.

*** = Rotación o pendiente.**

*** = Deformación lineal o flecha.**

- **METODO DE DE LA DOBLE INTEGRACIÓN.**

Es uno de tantos métodos que se basan en el análisis de las deformaciones, en particular la de los soportes. El método consiste en integrar sucesivamente una ecuación denominada Ecuación Diferencial de la Elástica dada por la expresión:

E = Módulo elástico del material del que está hecha la viga.

I = Momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro.

Mx = Ecuación de momentos a lo largo de toda la barra.

Al integrar sucesivamente la ecuación de momentos, aparecen constantes que será necesarios definir. Estas constantes se determinan en función de las condiciones de frontera, que generalmente las definen los tipos de apoyo o la simetría de la carga. Recordemos que un apoyo simple tiene pendiente pero no tiene flecha y un apoyo empotrado no tiene ni pendiente ni flecha. En un punto cualquiera de la viga, la pendiente es la misma analizando las cargas y momentos a la izquierda o a la derecha del punto.

Problema 1. Determine los momentos flexionantes y las reaciones verticales en la viga de la figura 4). Tomar EI constante. El apoyo 1 es simple el 2 es empotramiento.

Ecuaciones de momento. Se traza el diagrama de cuerpo libre indicando las reacciones desconocidas y la carga aplicada. Enseguida se plantea la ecuación de momentos y se le integra sucesivamente.

Integrando:

Cálculo de las constantes. La ecuación 1) proporciona la pendiente (dy/dx) en cualquier punto de la viga. El apoyo 2) está empotrado y no tiene pendiente por lo que sustituyendo x = 8 e igualando a cero se tiene:

La ecuación 2) proporciona la flecha (Y) en cualquier punto de la viga. El apoyo 1) es simple y no tiene

flecha, por lo que sustituyendo x = 0 e igualando a cero, se tiene: C2 = 0

En la misma ecuación 2) la flecha es cero en x = 8 y sustituyendo C1 logramos obtener una ecuación en función de la reacción V1 la que al resolverse nos da su valor.

V1 = 1500.00 kg

Por equilibrio de fuerzas verticales se obtiene la reacción V2.

V1 + V2 − 500(8) = 0

V2 = 2500.00 kg

Conocidas las reacciones verticales, el momento M2 puede calcularse sumando momentos en el nodo 1) o en el 2) o sustituyendo x = 8 en la ecuación de momentos.

***M1 = M2 + 500(8)4 − 2500(8) = 0**

M2 = 4000.00 kg.m

Fin del problema.

Problema 2. Obtenga los momentos y reacciones verticales para la viga de la figura 5). Trace también los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Si la sección transversal es compacta rectangular de 15x25 cm, calcule la flecha al centro del claro para un móduloelástico de 250,000.00 cm4.

Ecuaciones de momento. Se traza el diagrama de cuerpo libre indicando las reacciones desconocidas y la carga aplicada. Enseguida se plantea la ecuación de momentos y se le integra sucesivamente.

Integrando la ecuacion 1).

En las ecuaciones 3) y 4), la pendiente (dy/dx) y la felcha (Y) son cero en el apoyo 1, esto es cuando x = 0. Para esta condición C1 y C2 son cero.

C1 = C2 = 0

Integrando la ecuación 2).

En las ecuaciones 3) y 5) la pendiente es la misma cuando x = x1 = 5. Al comparar estas ecuaciones resulta C3 = 0

En las ecuaciones 4) y 6) la flecha es la misma cuando x = x1 = 5. Al comparar estas ecuaciones resulta C4 = 0

Se requieren ahora 2 ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones se obtienen para x1 = 10 en 5) y 6), ya que en este apoyo la pendienete y la flecha son cero.

En 5) cuando x1 = 10, (dy/dx1 = 0):

50V1 − 10M − 10,000.00 = 0 −−−−−−−− 7)

En 6) cuando x1 = 10, (Y = 0):

166.666 V1 − 50 M1 − 16,666.666 = 0 −−−−−−− 8)

Resolviendo las ecuaciones 7) y 8).

V1 = 400 kg

M1 = 1000 kg.m

Diagramas de cortante y de momento.

Flecha al centro del claro. Se obtiene en la ecuaciómn 4) para x = 5.00 m.

E = 250,000.00 kg/cm2

Fin del problema.

Problema 3. La viga de la figura 6) tiene ambos extremos empotrados y recibe una carga uniformemente variable de 1200 kg/m. Determine los momentos y las reacciones verticales en los empotramientos. Tomar EI constante.

Incógnitas y ecuación de momentos.

La altura (y) de la carga triangular a la distancia (x) se obtiene por triangulos semejantes.

La resultante del triangulo ubicado en la longitud (x) y de altura (y) es su área (yx/2) y se ubica a (x/3) que es su centro de gravedad de derecha a izquierda. La ecuación de momentos es entonces:

Se escribe la ecuación diferencial y se integra sucesivamente.

En esta ecuación cuando x = 0, la pendiente dy/dx es cero y por tanto la constante C1 = 0.

En esta ecuación cuando X = 0, la flecha Y = 0 y por tanto la constante C2 = 0.

En las ecuaciones (1) y (2) cuando x = L, la pendiente y la flecha son cero. De aquí resultan dos ecuaciones con dos incognitas.

dy/dx = 0. En la ecuación 1.

x = L

Y = 0. En ecuación 2.

X = L

La solución de las ecuaciones (3) y (4) dan los siguientes resultados:

La reacción vertical en B se obtiene por equilibrio de fuerzas.

El momento en B se obtiene por suma de momentos en A o en B.

Resultados finales.

Fin del problema.

Problema 4. La viga de la figura 7) tiene ambos extremos empotrados y recibe una carga uniformemente distribuida de 1200 kg/m. Determine los momentos y las reacciones verticales en los empotramientos. Tomar EI constante.

Incógnitas y ecuaciones de momento.

Integrando sucesivamente:

En las Ec. (2) y (3) la pendiente dy/dx y la flecha y, son cero por estar el apoyo empotrado y por tanto, las constantes C1 y C2 son cero.

Integrando:

En las ecuaciones (2) y (5) la pendiente tiene el mismo valor cuando

x = x1 = 5, por tanto, al igualar estas ecuaciones, resulta C3 = 0.

En las ecuaciones (3) y (6) la flecha tiene el mismo valor cuando

x = x1 = 5, por tanto al igualar estas ecuaciones, resulta C4 = 0.

En la Ec. (5) la pendiente dy/dx es cero cuando x1 = 10, sustituyendo este valor resulta la siguiente ecuación:

En la Ec. (6) la flecha es cero cuando x1 = 10:

Al resolver las ecuaciones (7) y (8), resulta:

MA = 781.25 kg.m

VA = 281.25 kg

VB =1,218.75 kg Se obtiene por equilibrio vertical.

MB=1,718.75 kg.m

Verificación de los momentos con fórmula:

Fin del problema.

Problema 5. Determinar los momentos y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga de la figura 8).

Reacciones desconocidas y ecuaciones de momento.

La altura (y) del triángulo de base (x) se obtiene por triángulos semejantes

(y =100x) y su resultante es su área (R = yx/2) aplicada a 2/3 de la base (x) a partir del extremo izquierdo o 1/3 del extremo derecho (x/3).

Integrando sucesivamente:

En la Ec. 3), cuando x = 0, la flecha (Y) es cero, y por tanto C2 = 0.

Ecuación de momentos a la distancia x1: Para esta distancia debe tomarse la resultante total de la carga triangular ya que queda ubicada a la izquierda del punto donde se está cortando, es decir: (R = 400(4)/2 = 800 kg) y se aplica al centroide, esto es a (2/3 de 4 = 8/3 = 2.666).

Integrando sucesivamente:

Comparando las ecuaciones 2) y 4) en x = x1 = 4, la pendiente es la misma:

Comparando las Ec. 3) y 5) en x=x1 = 4, la flecha es la misma:

Sustituyendo Ec. 6):

C4 = 884.9383

En Ec. 4) cuando x1 = 8, la pendiente es cero (dy/dx1 = 0):

En Ec. 5) cuando x1 = 8, la flecha es cero (Y = 0):

V1 = 420.00 kg.

Por equilibrio vertical:

Por suma de momentos en el nodo 1):

Verificación con fórmula:

Punto donde la fuerza cortante es cero.

X = 2.898275 m

La ecuación de momentos es:

X = 2.898275 m

M = 811.52 kg.m

X = 4.00 m

M = 613.34 kg.m

Fin del problema.

- **TEOREMAS DE OTTO MOHR.**

Es un método semigráfico ideado por Christian Otto Mohr (1835−1918) y que representa una

alternativa importante para calcular pendientes y flechas en puntos específicos de una viga. El procedimiento se conoce también como Método del Area de Momentos y consiste en establecer de manera independiente la variación de la pendiente y de la flecha en los puntos extremos de un intervalo cualquiera, generalmente definido por los apoyos. En este intervalo intervienen las áreas de los diagramas de momentos y el momento de tales áreas. Es recomendable utilizar las áreas de los diagramas de momentos por partes ya que estos facilitan el cálculo del área así como de su centro de gravedad. El método consta de dos teoremas, a saber:

Primer Teorema de Mohr. La variación o incremento de la pendiente (AB) entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualquiera A y B es igual al producto 1/EI por el área del diagrama de momentos flectores entre estos dos puntos. En la figura 9) se indica esta condición.

Donde:

AB = Cambio de pendiente entre las tangentes a la curva elásica.

AAB = Area del diagrama de momentos entre A y B.

EI = Rigidez a la flexión.

Segundo Teorema de Mohr. La desviación de un punto cualquiera B respecto de la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A, en dirección perpendicular al eje inicial de la viga, es igual al producto de 1/EI por el momento respecto de B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B. La figura 10) muestra esdta condición.

Donde:

BA = Desplazamiento vertical en B trazado perpendicularmente al eje original

de la viga hasta intersectar con la tangente por A.

ABA = Area del diagrama de momentos entre los puntos B y A.

X = cg = Centro de gravedad del diagrama de momentos medidos desde B.

Problema 6). Calcular el momento en el empotramiento para la viga de la figura 11). Determinar también las reacciones verticales.

Incognitas en la viga.

Diagrama de momentos por partes. Se obtienen dos vigas equivalentes simplemente apoyadas; una con la carga de 800 kg/m y la otra con MB.

El objetivo es obtener el momento MB y puesto que la viga está empotrada en B la pendiente es cero y una tangente por ese punto es horizontal y entonces en el punto A el desplazamiento vertical es tambien cero. La ecuación que se requiere se obtiene sumando momentos en A para las áreas de los diagramas de momento, es decir es el producto de las áreas y el centro de gravedad de cada una medido desde A. Las áreas arriba del eje x se toman positivas.

Se recuerdan las áreas y centroides de algunas figuras geométricas.

MB = 3600.00 kg.m

Reacciones verticales.

VB = 3000.00 kg.

VA = 800(6) − 3000 = 1800.00 kg.

Otra forma de resolver el problema. Considerense los diagramas de momentos reales para cada viga simple.

El área total del diagrama de la carga uniforme es 2ML/3. El momento máximo para esta carga es wL2/8 = 3600 kg.m.

MB = 3600.00 kg.m

Fin del problema.

Problema 7. Calcular la pendiente en el extremo A y la flecha al centro del claro de la viga del problema anterior, Fig. 12). Tomar EI constante.

Trazar una tangente a la curva elástica por el punto A y una vertical por B.

El desplazamiento YB se obtiene sumando momentos en B para las áreas de los diagramas de momentos.

La pendiente en A se obtiene dividiendo YB entre la longitud.

El valor de la flecha al centro del claro máx. se obtiene relacionando geométricamente los desplazamientos indicados en la figura anterior.

máx. = Yo − Y1

Donde Yo se obtiene por triángulos semejantes y Y1 se obtiene sumando momentos para las áreas situadas a la izquierda del centro del claro.

Cg = Centro de gravedad de derecha a izquierda.

Fin del problema.

Prtoblema 8. Calcular los momentos flexionantes para la viga con ambos extremos empotrados de la figura 13). Tomar EI constante.

Incógnitas en la viga.

Digrama de momentos para cada acción actuando por separado. El momento máximo para la carga uniforme es wL2/8 = 15,000.00 kg.m. Estas gráficas y momentos corresponden a vigas simplemente apoyadas.

Como ambos extremos están empotrados, las pendientes en esos puntos son cero, y por tanto, una tangente trazadas por estos extremos son horizontales y entonces los desplazamientos o desviaciones verticales son tambien cero.

Resolviendo las ecuaciones 1) y 2):

M1 = M2 = 10,000.00 kg.m

Fin del problema.

Problema 9. Calcular los momentos flexionantes en los extremos de la barra de la figura 14). Ambos extremos están empotrados.

Momentos desconocidos.

Diagramas de momentos para vigas simplemente apoyadas. El momento máximo para la carga puntual es (PL/4).

Si ambos extremos están empotrados las desviaciones verticales respecto a tangentes trazadas por ellos, son cero.

Puesto que M1 y M2 son iguales debido a la simetría, la solución de la ecuación anterior arroja los siguientes resultados:

Fin del problema.

Problema 10. Calcular el momento flexionante en el extremo empotrado de la barra de la figura 15).

Incógnitas en la viga.

Diagramas de momentos para vigas simplemente apoyadas.

La desviación vertical en el apoyo 2 es cero debido a que no hay pendiente en el empotramiento.

M1 = 900.00 kg.m

Verificación con fórmula.

Fin del propblema.

Problema 11. Calcular los momento flexionantes en los extremo empotrados de la barra de la figura 16). Calcular también las reacciones verticales y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

Incógnitas en la viga.

Diagramas de momentos para las vigas equivalentes simplemente apoyadas.

Para ambos extremos la desviación vertical respecto a la tangente por cualquiera de ellos es cero.

94,750.00 − 16.666 M1 − 33.333 M2 = 0 Ec. 1).

77,750.00 − 33.333 M1 − 16.666 M2 = 0 Ec. 2).

Resolviendo las ecuaciones 1) y 2):

M1 = 1,215.00 kg.m

M2 = 2,235.00 kg.m

Verificación con fórmula.

Reacciones verticales. Conocidos los momentos de empotramiento pueden calcularse por equilibrio estático.

V1 = 548.00 kg.

V2 = 1452.00 kg.

Fin del problema.

1.3.3. METODO DE LA VIGA CONJUGADA.

Se denomina viga conjugada a una barra en la que las cargas son los diagramas de momentos de las cargas reales dadas. La figura 17) muestra un

ejemplo de este tipo de vigas.

Relaciones entre la viga real y la viga conjugada.

a.− La longitud de la viga real y de la conjugada es la misma.

b.− La carga en la viga conjugada es el diagrama de momentos de la viga real.

c.− La fuerza cortante en un punto de la viga conjugada es la pendiente en el

mismo punto de la viga real.

d.−El momento flexionante en un punto de la viga conjugada es la flecha en el

mismo punto de la viga real.

e.−Un apoyo simple real equivale a un apoyo simple en la viga conjugada.

f.− Un apoyo empotrado real equivale a un extremo libre o voladizo de la viga

conjugada.

g.− Un extremo libre (voladizo) real equivale a un empotramiento conjugado.

h.− Un apoyo interior en una viga continua equivale a un pasador o rticulación

en la viga conjugada.

RELACIONES ENTRE LOS APOYOS

VIGA REAL	VIGA CONJUGADA	NOTAS
1.− Apoyo simple	**1.− Apoyo simple**	**Un apoyo simple real no tiene flecha pero si tiene pendiente y por tanto el conjugado no tiene momento pero si tiene cortante;**

		equivale a un apoyo simple.
2.− Apoyo empotrado.	**2.− Sin apoyo: libre.**	**Un apoyo empotrado no tiene flecha ni pendiente y por tanto, el conjugado no tiene momento ni cortante; equivale a un voladizo.**
3.−Voladizo.	**3.− Apoyo empotrado.**	**El extremos libre tiene pendiente y flecha y por tanto el conjugado tiene cortante y momento; equivale a un empotramiento.**
4.− Apoyo interior.	**4.− Apoyo articulado o pasador.**	**Un apoyo interior tiene pendiente pero no tiene flecha y por tanto tiene cortante pero no tiene momento; equivale a una articulación.**

Problema 12. Para la viga simple de la figura 18), calcular la pendiente en los extremos y la flecha máxima. Tomar EI constante.

Viga conjugada. Tiene los mismos apoyos, la misma longitud y la carga es el diagrama de momentos de la viga real.

La pendiente en el apoyo 1) es la fuerza cortante V1), en la viga conjugada dividida entre el producto EI.

Por simetría el cortante V1, es el área del triángulo a la mitad del claro.

Verificación con fórmula.

Flecha al centro del claro. Es el momento al centro del claro para la viga conjugada.

Verificación con fórmula.

Fin del problema.

Problema 13. Calcular el momento en el empotramiento para la viga apoyada−empotrada de la figura 19).

Diagramas de momentos para vigas simplemente apoyadas. La viga conjugada será una barra apoyada−volada.

El momento en el apoyo 1) para las cargas de la viga conjugada es cero, por ser apoyo simple.

M1 = 1800.00 kg.m

Fin del problema.

1.4. VIGAS CONTINUAS.

Se da el nombre de viga continua a una barra apoyada en más de dos soportes. La figura 20) muestra una viga de este tipo.

Para el análisis de estas vigas existen una gran cantidad de métodos, pero en la mayoría de ellos se consideran los momentos de los nodos como las incognitas principales, para posteriormente, por equilibrio estático, obtener el resto de las incógnitas.

1.4.1. ANALISIS POR SUPERPOSICION.

El principio de superposición establece que el efecto de un conjunto de cargas que actua simultáneamente, es el mismo cuando se suman los efectos de cada una de ellas actuando por separado. Bajo este concepto, es posible solucionar una viga continua analizando las rotaciones en los extremos de las barras para las cargas dadas considerando a cada barra simplemente apoyada. Para su aplicación es necesario conocer las formulas de estas rotaciones para vigas simples y cualquier tipo de carga. A continuación se dan las de uso común.

Notación.

Carga	**Rotación** **Extremo Izquierdo**	**Rotacion** **Extremo Derecho**
1.− Carga uniforme.		
2. −Carga parcial uniforme.		
3.−Carga parcial iforme.		

Carga	**Rotación** **Extremo Izquierdo**	**Rotacion** **Extremo Derecho**
4.− Carga puntual.		
5. Carga puntual.		
6.− Carga variable.		
7.− Carga variable.	**EI**	
8.− Momento en extremo.		
9.−Momento en extremo.		
10.− Momento en la barra.		

Problema 14). Calcule los momentos y las reacciones verticales en los nodos de la viga continua de la figura 21).

Incognitas en la viga. Se dibujan los claros 1−2 y 2−3 por separado indicando cargas y momentos desconocidos. En este caso solo hay un momento descocnocido, el momento del nodo 2; M2 y se obtienen las vigas equivalentes simplemente apoyadas. Habrá tantas vigas equivalentes como momentos de extremo y cargas haya en el claro correspondiente. En la figura siguiente se mestra esta condición.

Se hacen las siguientes consideraciones:

1.− La rotación o pendiente es cero en extremos empotrados.

2.− En un soporte interior la pendiente es la misma a la izquierda y a la

derecha de dicho soporte.

3.− Se indican las pendientes en los extremos de cada soporte con el criterio

siguiente:

a.− Carga cualquiera. b).− Momento en extremo.

Para nuestro caso solo se necesita plantear una ecuación de equilibrio, pues solo hay un momento desconocido, M2. Esta ecuación se obtiene sumando las pendientes en el apoyo 2, igualando las pendientes de la izquierda con las pendientes de la derecha.

M2 = 1,612.50 kg.m

Reacciones verticales. Se obtienen por equilibrio estático mediante suma de momentos a la izquierda o a la derecha de los soportes.

Sumando momentos a la ezquierda del soporte 2:

V1 = − 18.75 kg.

Sumando momentos a la derecha del soporte 2:

V3 = 998.4375 kg

Sumando cargas verticales:

V1 + V2 + V3 − 500 − 300(8) = 0

V2 = 1,920.3125 kg.

Fin del problema.

Problema 15). Calcule los momentos y las reacciones verticales en los nodos de la viga continua de la figura 22).

Vigas equivalentes:

P

a

b

A

B

Fig. 1. Viga apoyada−empotrada.

VA

P

VB

MB

P

P

w

L1

L2

L3

A

B

C

D

Fig. 2. Viga continua

VB

MA

VC

P

*****

VA

VD

*****

w

P

P

Eje original no deformado

Curva elástica de deformación

Tangente

Fig. 3. Viga deformada por flexión

8.00 m

500 kg/m

1

2

x

V1

500 kg/m

V2

M2

Fig. 4

4000 kg.m

2500

1500 kg

800 kg

500 kg/m

5.00 m

5.00 m

1

2

x

X1

M1

M2

800 kg

V1

V2

Criterio de signos:

+

+

Criterio de signos:

Fig. 5)

800 kg

400 kg

400 kg

1000 kg.m

1000 kg.m

400

400

1000

1000

1000

Fuerza Cortante

W = 1200 kg/m

Momento Flector

L = 6.00 m

A

B

MB

MA

VA

W = 1200 kg/m

VB

x

y

1080

1440

2160.00

W = 1200 kg/m

2520

Fig. 6

W = 300 kg/m

A

B

5.00 m

5.00 m

MB

VA

MA

VB

W = 300 kg/m

x

X1

Fig. 7

1218.75

1718.75

281.25

781.25

281.25

1218.75

W = 300 kg/m

4.0625

781.25

625

756.84

1718.75

%

4.00 m

4.00 m

1

2

400 kg/m

Fig. 8

y

400 kg/m

x

X1

V1

V2

%

M2

400 kg/m

420

380

906.66

4.00

4.00

420

380

811.52

906.66

613.34

Fuerza Cortante

Momento Flexionante

P

L

A

B

AB

Viga con carga cualquiera.

Tangentes por A y B.

Cambio de pendiente AB.

M

Diagrama de momentos cualquiera..

Fig. 9). Viga simple con carga cualquiera.

Fig. 10). Viga simple con carga cualquiera.

Diagrama de momentos cualquiera y centro de gravedad respecto al punto B.

M

BA

Viga con carga cualquiera.

x

B

A

L

P

%**cg**

6.00 m

800 kg./m

A

B

Fig. 11). Viga apoyada−empotrada.

+

VB

MB

800 kg./m

VA

2400

MB

800 kg./m

2400

MB/6

MB/6

14400

14400

MB

6.00

6.00

x

x

%

cg

M

2L/3

L/3

L

cg

%

x

A = ML/(n + 1)

X = L/(n + 2)

n = grado de la curva

M

3000

1800

3600

800 kg./m

x

x

6.00

3.00

MB

3.00

MB/6

MB/6

2400

2400

+

MB

800 kg./m

Mmáx.

3.00

3.00

yB

Y0

Y1

.

.

.

máx.

3600

3600

A

B

B

A

1800

3600

máx.

.

.

.

Y1

Y0

yB

3.00

3.00

M

L

A = ML/3

Cg = 3L/4

10.00 m

1200 kg/m

1

2

M1

M2

1200 kg/m

V1

V2

1200 kg/m

15000

M1

M1

M2

M2

Fig. 13

P

L/2

L/2

1

2

Fig. 14

V1

V2

P

M2

M1

P

L/2

L/2

PL/4

M1

M1

M2

M2

200 kg/m

4.00

4.00

1

2

Fig.15 Viga empotrada−apoyada

4.00

M1

200

V1

V2

200 kg/m

4.00

M1

8.00

4800

1600

4800

M1

1600

3200

4.00

500

1500

3.00

5.00

2.

2.

1.

Fig. 16. Viga con ambos extremos .empotrados.

M1

M2

V1

V2

1500

500

500

1500

3

5

2

3500

3000

6500

M1

M1

M2

M2

10.00

10.00

P

M1

M2

a

b

1452

548

2235

1215

1500

500

429

2235

1215

1452

48

548

669

Diagrama de Cortante

Diagrama de momentos

a

b

P

b

a

Fig. 17). Viga simple real y viga conjugada.

Viga Real

Viga Conjugada

%

600 kg

3.00

3.00

1

2

Fig. 18). Viga simple.

900

V1

V2

400 kg/m

6.00 m

1

2

400 kg/m

6.00

7200

7200

6.00

M1

M1

V1

6.00 m

Viga Conjugada

Fig. 19)

Cargas en la Viga Conjugada

+

P

P

P

L1

L2

1

2

3

Fig. 20). Viga continua indicando cargas y

reacciones desconocidas.

M1

M2

V2

V3

V1

w

L

L

1

2

L/2

w

L/2

b

a

w

M2

=

L2 = 8

M2

+

Ñ

300 kg/m

Ñ

w

P

500 kg

3

2

1

8.00 m.

3.00

3.00

P

M2

L1 = 6

L/2

L/2

P

a

b

P

w

L

w

a

b

L

M

L

M

M

a

b

w

1

2

Ó

=

+

M2

Ó

2

3

Ê

Ñ

P

M

Ê

Ñ

Pendientes positivas

Pendiente negativa

Fig. 21). Viga continua.

V1

300 kg/m

500 kg

3

2

1

8.00 m.

3.00

3.00

V2

V3

1612.50

Criterio de signos:

+

300 kg/m

1

2

3

4

5

5.00

5.00

8.00 m

3.00

Figura 22. Viga continua con carga uniforme en todo el calro.

w

Ê

Ñ