

INTRODUCCIÓN Durante el siglo XVIII, los matemáticos trabajaron mucho para enriquecer el análisis matemático con numerosos algoritmos y descubrimientos interesantes: mencionemos las soluciones explícitas de problemas de geometría y de mecánica recurriendo a funciones familiares, las relaciones explícitas entre las funciones exponenciales y logarítmicas, etc. Por el contrario, las demostraciones del teorema fundamental del cálculo y del resto de Taylor, para no citar más que dos ejemplos, siguen siendo imprecisas e intuitivas. En el siglo XIX, la preocupación por el rigor se manifiesta con la máxima intensidad y los matemáticos se dan cuenta de las grandes diferencias entre las propiedades de las funciones de variables reales y las de variables complejas. De ello resultará una integración armoniosa de los resultados ingeniosos de los siglos precedentes y de las teorías sistemáticas de las funciones de variable real y de variable compleja. En el campo del álgebra, a principios del siglo XIX, el problema central sigue siendo el de la resolución de las ecuaciones de grado superior a cuatro, y la solución de este problema no se obtendrá hasta que la teoría de grupos y de cuerpos esté suficientemente elaborada, gracias a los trabajos de Gauss, Abel, Galois, Jordan, Sylow, Kronecker, Cayley, Klein y Lie. La importancia concedida al estudio de los problemas lineales se manifiesta en numerosos trabajos consagrados a los determinantes y a las matrices, en el estudio de las formas algebraicas y de los invariantes, en la teoría de los cuaterniones de Hamilton y de los números hipercomplejos y, por último, en la introducción del concepto de tipos nuevos de álgebra. Paralelamente, asistimos a la difusión del cálculo vectorial, al considerable auge del análisis vectorial y a los comienzos del cálculo tensorial. La renovación de la geometría pura está asegurada por los trabajos de Poncelet, que marcan la verdadera creación de la geometría proyectiva como una rama autónoma de la geometría. Las innovaciones importantes de Mobius, completadas por los trabajos de Steiner y de Chasles constituyeron verdaderamente la doctrina proyectiva, independientemente de toda noción métrica (distancia, ángulo, etc.) y sobre la única base de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Es durante el siglo XIX cuando los trabajos críticos emprendidos desde mucho tiempo antes para profundizar en la significación del postulado de las paralelas conducen por fin a la fundación de la geometría hiperbólica, gracias a los trabajos independientes de Gauss, Lobachevski y Bolyai. La geometría elíptica, introducida por Riemann a mediados del siglo XIX, ilustra un segundo ejemplo de geometrías no euclídeas, que serán ampliamente difundidas e interpretadas después de 1868. A lo largo del siglo, la revisión cada vez más atenta de los fundamentos del análisis, reforzada por la difusión de las geometrías no euclídeas, lleva a los geómetras a un análisis crítico de los principios y de los fundamentos de la geometría clásica. La notable síntesis de Hilbert en este campo inspirará grandemente a la escuela axiomática del siglo XX. La geometría analítica, por su parte, conoce una expansión brillante, marcada por los trabajos de la escuela francesa sobre las notaciones y el principio de los multiplicadores, por el papel dominante de Plücker en la renovación de los métodos y la extensión del concepto de coordenadas, por la introducción de la geometría reglada y de los espacios de n dimensiones y por la intervención del álgebra lineal. También durante el siglo XIX, la renovación de los métodos de estudio de las curvas y superficies algebraicas suscita el desarrollo de una disciplina nueva: la geometría algebraica, que tomará su forma definitiva en el siglo XX y conocerá entonces un desarrollo rápido. La geometría diferencial moderna será obra de los trabajos fundamentales de Monge, Gauss y Riemann. Aunque la topología había sido presentada antes por Leibniz bajo el nombre de geometría de situación, y a ella están ligados problemas célebres como el de los puentes de Königsberg, el de los nudos y el de coloreado de un mapa geográfico, esta disciplina no comienza a dibujarse como tal hasta los trabajos de Cayley, Listing y Mobius. Fue Riemann quien fundó verdaderamente esta nueva rama de las matemáticas, a la que consideró como el estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de transformaciones biunívocas continuas. El ulterior desarrollo de la topología fue influenciado por la célebre teoría de conjuntos de Cantor, por los progresos de la teoría de los números reales de Dedekind y de Bolzano, y por el estudio de las funciones de variables reales. Ya desde el siglo XVII, Leibniz había intentado extender los límites de la lógica de Aristóteles y abordar el estudio de las operaciones lógicas con proposiciones mediante el análisis de las formas del lenguaje habitual y del pensamiento científico. Este ambicioso proyecto de Leibniz tuvo poca resonancia, y hará falta esperar hasta mediados del siglo XIX, con los trabajos de la escuela inglesa, para asistir a la colocación de las verdaderas bases de la lógica matemática. Al comienzo de este siglo, algunos autores ingleses (Peacock, Babbage y J. Herschel) resaltan el fundamento lógico de las matemáticas; después, De Morgan se preocupa por presentar la lógica

bajo una forma matemática y por analizar, bajo la perspectiva lógica, el conjunto de los símbolos, las operaciones y las leyes matemáticas. George Boole dio un impulso decisivo a esta doble corriente de investigaciones, lo que le valió el ser considerado como el verdadero creador de la lógica matemática moderna. Bajo la influencia de Boole, se constituyó una escuela de lógica simbólica que preparó la unificación progresiva de la lógica y la matemática. La importancia adquirida por la lógica matemática desde finales del siglo XIX proviene de los trabajos emprendidos por De Morgan y Boole, que se desarrollaron gracias a las contribuciones de los matemáticos Jevons (inglés), Peirce (americano), Schroder, Hankel y Frege (alemanes) y Peano (italiano). Los *Principia mathematica* de Russell y de Whitehead, marcan un momento culminante en la edificación de la lógica matemática a principios del siglo XX. Gauss: *Disquisitiones arithmeticae*, que ocupó el centro de la literatura sobre el tema. Después de Gauss, la teoría de números se ha enriquecido, entre otros, con los imaginarios de Galois, con el método fundamental de reducción continua de Hermite, con importantes resultados obtenidos en el tema del enigmático teorema de Fermat, con teorías sobre los cuerpos de números algebraicos y de números ideales con resultados importantes sobre la distribución asintótica de los números primos y sobre los números trascendentes. La escuela biométrica inglesa contribuyó grandemente durante el siglo XIX al desarrollo de la teoría de probabilidades y de la estadística. Reanimada por Galton, Weldon y Pearson, esta escuela, a la que debemos mucho, nos ha legado la noción de correlación y de esperanza matemática y las primeras comprobaciones de hipótesis estadísticas, y fue la responsable de la introducción de conceptos como el de regresión y dispersión condicionada. En el tema de los fenómenos colectivos aleatorios, es importante la obra del matemático belga Quetelet. Los trabajos de los matemáticos rusos Chebychev, Markov y Liapunov son notables por lo que se refiere a la teoría de errores (introducida por Laplace) y las propiedades de la convergencia en probabilidad. Asimismo, los matemáticos franceses Poisson, Poincaré y Borel destacan también por sus estudios sobre el azar y consideraciones de conjunto de sucesiones infinitas de ensayos, etc. Subrayemos, por último, que problemas propuestos por la física, como los de la teoría cinética de la materia (movimiento browniano) y de los gases, de la distribución del conjunto de sistemas mecánicos son el origen de investigaciones interesantes sobre las leyes de distribución estadística (Poisson, Maxwell, Boltzman, etc.). A principios del siglo XX no hay campo científico en el que sea ignorado el concepto de variable aleatoria. El siglo XIX asiste igualmente a la creación y considerable expansión de la física matemática, con los trabajos de Fourier, Sadi Carnot. Poisson, Green, Kelvin, Stokes, Maxwell y Gibbs. Utilizando los recursos del instrumental matemático, proporcionará fecundos temas de estudio y orientará así la evolución de ciertas ramas matemáticas.

CONDICIONES NUEVAS DEL PROGRESO Las condiciones del trabajo científico en el siglo profundamente con respecto a las que prevalecían en el siglo anterior. La Revolución francesa, y después el Imperio, crearon condiciones extremadamente favorables para el desarrollo futuro de las matemáticas, además de preparar el camino a la revolución industrial en el continente europeo. La reforma de la enseñanza superior, científica y técnica, realizada en Francia por la Revolución, estimuló el cultivo de las ciencias físicas y creó nuevas clases sociales que consideraban las cosas de forma diferente y cuyo interés por la educación científica y técnica era manifiesto. Las ideas democráticas invaden la vida académica, las formas antiguas de razonamiento se vuelven a discutir seriamente, la enseñanza se organiza sobre bases renovadas. La democratización creciente de la enseñanza superior, el crecimiento cierto del sentimiento nacional y la profesionalización de la actividad del matemático constituyen el factor decisivo en el desarrollo de las diferentes ramas de las matemáticas en el siglo XIX. De ello resultará directamente un aumento considerable del número de investigadores, y se asistirá a una verdadera explosión del número de publicaciones científicas. En las universidades y las escuelas superiores, se reserva a las matemáticas un lugar mucho más importante que en el pasado; el álgebra, la geometría, el análisis y la mecánica figuran ventajosamente en los planes de estudio. Los estudiantes reciben así una enseñanza que les permite adquirir una base sólida sobre la que podrán edificar a continuación. Los que se sienten atraídos por la investigación científica saben que pueden orientarse hacia la carrera del profesorado, porque ésta está dotada de una importante función social que libera al profesor de las preocupaciones materiales más inmediatas. Los maestros a quienes se confían las principales cátedras se complacen en comunicar a sus alumnos sus descubrimientos, e incluso les asocian a ellos; las comunicaciones entre científicos son más continuadas y sus trabajos se conocen más rápidamente. La reforma de la enseñanza ha favorecido la eclosión de vocaciones mucho más numerosas, poniendo la enseñanza en contacto con la investigación y abriéndola a clases más amplias de esta sociedad renovada. En el siglo XIX se contempla también el desarrollo de un sentimiento

nacional mucho más profundo que anteriormente, periodo en el cual científicos como Huygens, los Bernoulli, Euler, Lagrange hablan dividido una parte importante de su vida entre diferentes países. Muy al contrario, tales intercambios serán raros en el siglo XIX, y el verdadero oficio del matemático profesional se ejercerá en la patria de origen, constituyendo así un factor eminente de progreso científico. Esta corriente de origen francés se extiende a los otros países de Occidente, particularmente a Alemania, con la acción eficaz de Von Humboldt, y la expansión geográfica de la cultura matemática se manifiesta a finales del siglo XIX en numerosos países, incluyendo Estados Unidos y Rusia. Resultará de ello un crecimiento manifiesto de la productividad científica de acuerdo con una ley de crecimiento exponencial. (En general, el número de científicos o de publicaciones tiende a duplicarse en el curso de un período de diez a quince años. Además, cada vez que se duplica la población, el número de científicos se triplica, y hay aproximadamente siete científicos vivos por cada ocho que hayan existido en toda la historia. Sin embargo, el crecimiento exponencial de la ciencia alcanza un límite (curva logística), más allá del cual la tasa de crecimiento disminuye y la curva alcanza entonces un límite de saturación previsible). Según Taton, el total anual de las publicaciones se duplica entre los años 1870 y 1909.

PRINCIPALES CENTROS DE ACTIVIDAD MATEMÁTICA Los focos principales se sitúan en las universidades y las escuelas, más que en las academias, que abandonan algo su papel de inspiradoras para limitarse a difundir, mediante sus publicaciones, los descubrimientos más recientes de la ciencia. Durante el siglo XIX, Francia, Alemania e Inglaterra son los principales centros matemáticos, mientras que Italia vuelve a salir a la superficie y los Estados Unidos y Rusia hacen su aparición por primera vez en este campo. Cuna indiscutible de los estudios matemáticos desde la Revolución francesa, Francia siguió siendo durante todo el siglo XIX uno de los primeros centros de enseñanza de las matemáticas. Fundada en 1794, la Escuela Politécnica de París formará durante cerca de 50 años una pléyade de matemáticos, y la lista de los antiguos alumnos que alcanzan la celebridad en este campo es larga. Gracias a la enseñanza impartida por sus profesores, un gran número de estudiantes y de investigadores extranjeros se sentirán atraídos por París durante el primer tercio de siglo. La creación de la Facultad de Ciencias, de la Escuela Normal Superior, de las Escuelas Especiales de Minas, de Caminos y de Ingenieros Navales pondrá fin hacia mediados de siglo, al casi monopolio de la politécnica, pero manteniendo siempre el renombre de la enseñanza francesa. Felix Klein calificaba los cursos publicados por la Escuela Politécnica en los siguientes términos: «Toda una serie de tratados clásicos admirables que siguen siendo aún hoy la base del estudio matemático de toda Alemania». Dominada por el matemático más grande de la época, Gauss, la escuela matemática alemana conoce éxitos resonantes en numerosos campos, y supera incluso a la escuela francesa, tanto por el número de sus centros de actividad matemática como por sus representantes. Entre los centros más activos, es preciso citar a Gotinga, marcada por la talla imponente de Gauss, y a finales de siglo, por el eminente geómetra Hilbert y su escuela; Berlín, donde Weierstrass formará a numerosos discípulos; Königsberg, con sus siete puentes, es célebre en topología, por la enseñanza del matemático Jacobi y, principalmente, por una escuela de física matemática. La escuela británica no se liberó de su sujeción demasiado servil a la tradición newtoniana hasta principios del siglo XIX, gracias a la modernización de los métodos de enseñanza y, especialmente, a la aceptación gradual de los beneficios de la notación infinitesimal de las matemáticas continentales. Los resultados no se hicieron esperar, y la escuela británica desempeñó un papel preponderante en la elaboración de la lógica matemática, del álgebra lineal y de la geometría algebraica, en el desarrollo de la física matemática y en la fundación de la célebre escuela de biometría inglesa. Italia conoce una renovación matemática importante durante la segunda mitad del siglo XIX, gracias a una notable obra original en geometría algebraica y en geometría diferencial. Los matemáticos italianos van a significarse también en el estudio lógico de los principios matemáticos. Otros países producirán algunos matemáticos de talento. Es el caso de Suiza, Bélgica y los Países Bajos, mientras que nuevas regiones entrarán en el campo de las matemáticas: Escandinavia con Abel, Rusia con Lobachevski, Markov y Liapunov, Hungría con Bolyai y Checoslovaquia con Bolzano. Subrayemos finalmente la entrada en escena, por primera vez, de los Estados Unidos de América en la segunda mitad del siglo XIX con las importantes contribuciones de Benjamín Peirce, G. W. Hill y Josiah W. Gibbs.

LAS REVISTAS Y SOCIEDADES MATEMÁTICAS Si el siglo XVII fue la época de las correspondencias y las polémicas entre científicos y el XVIII desempeñó un papel preponderante en la fundación de las academias, el siglo XIX (el siglo de las revistas) se caracteriza porque los investigadores publican rápidamente sus descubrimientos, facilitando así la difusión de los conocimientos. Esta extensión de las investigaciones se verá favorecida grandemente por la creación de revistas científicas en

diversos países. Después de la Revolución francesa, la primera de estas revistas parece ser el *Journal de l'Ecole Polytechnique* (1795); después vienen los célebres *Annales de mathématiques de Gergonne*, que aparecen en Nîmes entre 1810 y 1831, y son durante bastante tiempo las únicas revistas consagradas exclusivamente a las matemáticas. Entre tanto, Alemania toma la iniciativa con la fundación en 1826 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik de Crelle*, que existe todavía en la actualidad. Poco después, Joseph Liouville funda en París, en 1836, el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, que tampoco ha dejado de publicarse desde entonces. En la misma época, los *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences* de París, fundados en 1835, aseguran la rápida difusión de los nuevos resultados. En Francia, Pasteur funda, en 1864, los *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, y a continuación Darboux crea el *Bulletin des Sciences Mathématiques* en 1870. En 1872, la *Société Mathématique* de France edita su importante boletín. Subrayemos la aparición de las primeras revistas consagradas a la enseñanza de las matemáticas: los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1842) y *L'Enseignement Mathématique*, fundado por Laisant y Fehr en 1899. Fuera de Francia, encontramos los *Philosophical Transactions* de Londres, los *Mathematische Annalen* de Leipzig (1868), los *Acta Mathematica* de Estocolmo (1882), el *Ameritan Journal of Mathematics* (1878), y otros muchos. Subrayemos que la primera revista consagrada principalmente a la pedagogía de las matemáticas fue fundada por J. C. J. Hoffman en 1870. El siglo XIX vio nacer igualmente las sociedades matemáticas de diversos países: *London Mathematical Society* (1865), *Société Mathématique de France* (1872), *Edinburgh Mathematical Society* (1883), *Circolo Matematico di Palermo* (1884), *Ameritan Mathematical Society* (1888), *Deutsche Mathematische Vereinigung* (1890). Estas sociedades científicas publican revistas especiales tales como los *Proceedings of London Mathematical Society*, los *Anuales de la Société Scientifique de Bruxelles*, el *Bulletin de la Société Mathématique de France*, etc. A finales del siglo XIX se desarrolla la institución de los congresos matemáticos internacionales, en donde se reúnen los matemáticos del mundo entero. Sus exposiciones y conferencias raramente carecen de interés y son, a veces, la ocasión de confrontaciones apasionantes. El primero de todos fue el de Zürich en 1897, y el segundo, celebrado en París en 1900, fue la ocasión ofrecida a Hilbert para establecer a la vez el notable balance de las investigaciones recientes y una lista de 23 problemas particularmente difíciles de resolver.

7. LA ÉPOCA DE GAUSS Y CAUCHY

INTRODUCCIÓN

Las figuras dominantes en esta época son, evidentemente, Gauss, el príncipe de las matemáticas, y Cauchy, uno de los más ilustres matemáticos que haya dado Francia. La imponente talla de Gauss marca, por así decirlo, la transición entre el siglo XVIII y el XIX porque, por una parte, su gusto pronunciado por el trabajo solitario, su habilidad para manejar igualmente bien las matemáticas puras y las aplicadas, su preocupación constante por la astronomía y su frecuente uso de la lengua latina están ligados de alguna manera a las actividades del siglo XVIII y, por otra parte, la naturaleza de sus trabajos anuncia ya el espíritu del nuevo período. Sus *Disquisitiones arithmeticae* son una colección de aportaciones importantes de sus predecesores; contienen un enriquecimiento tal que marca el comienzo de la moderna teoría de números. Sus trabajos en astronomía, en geodesia y en cartografía contribuyeron grandemente a enriquecer el patrimonio de las ciencias experimentales y aplicadas. Preocupado por diversos problemas teóricos planteados por estas ciencias aplicadas, Gauss desarrolló un marcado interés por la geometría en general y, en particular, por la geometría no euclídea. Se interesó también por casi todas las ramas de las matemáticas y, en la mayoría de estos campos, sus originales contribuciones prepararon el camino hacia nuevas cimas o nuevos descubrimientos. Autor de más de setecientas memorias y libros, Cauchy introdujo innovaciones en diversos aspectos de las matemáticas. Fundador de la teoría de las funciones analíticas, hizo progresar de modo gigantesco la teoría de determinantes y la teoría elástica de los cuerpos y contribuyó, de una manera sistemática, a instaurar el rigor en el análisis. Cauchy tocó numerosos temas científicos, y sus cientos de memorias constituyen una obra que le coloca entre los más grandes por su calidad intrínseca. Durante este fértil período, hay algunos científicos que se significaron también en el campo de las matemáticas. Los más importantes son Dirichlet, Abel, Jacobi y Bolzano.

GAUSS Karl-Friedrich Gauss (1777–1855) nació en Gotinga (Alemania), el 30 de abril de 1777. Su madre era una mujer inteligente pero poco instruida, y su padre, llamado Gerhard, fue calificado por Karl como «digno de estima», pero también como «dominante, rudo y poco refinado». Su madre había sido sirvienta antes de convertirse en la segunda esposa de su padre, que vivía pobremente ejerciendo diversos oficios: jardinero, jornalero, contra maestro para el mantenimiento de las canalizaciones, tesorero de una pequeña caja

de seguros, etc. De niño, Karl debía ser respetuoso y obediente con un padre que no veía la utilidad de instruir a su hijo. Por el contrario, su madre esperaba mucho de su «maravilloso» Karl, y aunque su matrimonio fue bastante desgraciado, se consagró enteramente a la carrera de su hijo. Gauss testimonió mucho afecto y gratitud durante toda su vida a su madre, que murió a los noventa y siete años, habiendo pasado los últimos veintidós años de su vida en la casa de Karl. Sin ayuda de ningún tipo, Gauss aprendió a «calcular antes de hablar». A los tres años, corrigió un error en la paga de los obreros de su padre, y por sí solo estudió y profundizó la aritmética. A los ocho años mostró su genio precoz con ocasión de un problema propuesto por su profesor de la escuela elemental para ocupar a sus alumnos: encontrar la suma de los cien primeros números naturales. Gauss asombró literalmente al tosco y autoritario profesor revelándole rápidamente la respuesta escrita en su pizarra. Completamente estupefacto ante este rasgo de genio, el profesor tuvo la sabiduría de procurarle libros de aritmética para que el joven Gauss pudiera proseguir su aprendizaje de las matemáticas. A los once años Gauss conoció a Martin Bartels, entonces profesor ayudante de la escuela y más tarde profesor de Lobachevski. Impresionado por su inteligencia, Bartels habló de él al duque Carlos Guillermo, quien le envió a estudiar a sus expensas, primero a un colegio de la ciudad y luego a la universidad de Gotinga, en 1795. Ya a su entrada en el colegio Gauss poseía una formación clásica y científica que sobrepasaba netamente, en esa época, la de un estudiante de quince años. Además de estar familiarizado con la geometría elemental, el álgebra y el análisis, Gauss había adquirido habilidades muy excepcionales con respecto a los números. Durante su estancia en el colegio, perfeccionó sus conocimientos de aritmética de los números, estudió los Principia de Newton y el *Ars conjectandi* de Bernoulli, y ello simplemente porque la mayor parte de las otras obras clásicas de matemáticas no estaban disponibles. Ello no le impidió formular el método de los mínimos cuadrados, descubrir la ley de reciprocidad cuadrática, formular la hipótesis del teorema de los números primos y encontrar resultados compatibles con una geometría no euclídea. A los diecinueve años, Gauss duda todavía entre la filología y las matemáticas, pero el 30 de marzo de 1796 obtiene, a partir de un estudio sistemático de las ecuaciones ciclotómicas, la construcción del polígono regular de diecisiete lados con sólo la regla y el compás. Su elección está hecha, se hará matemático y, desde ese día, consigna la primera anotación en su célebre diario matemático en el que, durante dieciocho años, inscribirá 146 enunciados extremadamente breves de los resultados de sus trabajos. El interés científico e histórico de ese diario personal de tan sólo diecinueve páginas es indiscutible. Revela una visión íntima del matemático sorprendido al natural en su actividad profesional y nos permite seguir el desarrollo de su talento. Gauss, a quien le gustaban el rigor y la perfección, publicaba muy poco y muy tarde, y por ello su diario es precioso para establecer la fecha y la autenticidad de ciertos resultados, lo que permite dilucidar cuestiones relativas a la prioridad de algunos descubrimientos. Este diario no fue encontrado hasta 1898, y su contenido fue publicado por primera vez por Felix Klein en 1901. En 1798, Gauss vuelve a Brannschweig para continuar allí sus trabajos en solitario, y al año siguiente obtiene el doctorado por la Universidad de Helmsted bajo la dirección, según parece, del matemático wurtemburgués Johann Friedrich Pfaff, quien se convierte luego en su amigo. Su tesis de doctorado contiene una demostración de que toda ecuación polinómica, $p(x) = 0$, posee al menos una raíz, cualquiera que sea la naturaleza real o imaginaria de los coeficientes de la ecuación. Dará más adelante otras tres demostraciones del mismo teorema fundamental del álgebra en trabajos subsiguientes. En 1801, Gauss escribe y publica su gran tratado titulado *Disquisitiones arithmeticae*, en el que presenta un resumen de los trabajos aislados de sus predecesores, da soluciones a las cuestiones más difíciles, formula conceptos y cuestiones que indicarán, durante al menos un siglo, las líneas maestras de la investigación en teoría de números. A lo largo del mismo año, Giuseppe Piazzi (1746–1826) descubre el planeta Ceres, pero no llega a determinar exactamente su posición. Gauss decide localizar este planeta, y de septiembre a diciembre de este mismo año, utiliza una teoría orbital de los planetas fundamentada en la elipse y recurre a métodos numéricos basados en el método de mínimos cuadrados, para llegar finalmente a la determinación exacta de la trayectoria de este planeta. Esta hazaña coincide con el comienzo de sus investigaciones astronómicas, que absorberán una buena parte de sus energías durante casi veinte años. Las dos primeras contribuciones importantes de Gauss en el campo de la ciencia le valieron el ser nombrado, en 1807, profesor de astronomía y director del observatorio de Gotinga. Aparte de una visita a Berlín en el marco de un congreso de científicos, Gauss permaneció en su ciudad natal el resto de su vida. Sus trabajos de astronomía, que comenzaron con el estudio de Ceres, le llevaron, después de algunos años, a publicar su *Theoria metas corporam coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* en 1809, en el cual Gauss desarrolla

sistemáticamente su método del cálculo orbital, en el que utiliza el método de mínimos cuadrados. El período 1801–1809 marca una etapa decisiva en la vida de Gauss. En el plano profesional, es la época en la que se opera la transición del matemático al astrónomo y al físico. Aunque el duque de Brunswick había aumentado sus emolumentos en 1801, Gauss buscaba un puesto que le garantizara una mayor seguridad, y la astronomía parecía entonces una alternativa atrayente. Poco interesado en hacerse profesor de matemáticas para confinarse a enseñar casi exclusivamente a estudiantes más o menos motivados, consideraba también Gauss que las matemáticas no eran lo suficientemente útiles por sí mismas. Además' el puesto de astrónomo profesional llenaba en gran parte sus expectativas: poca enseñanza que impartir y mucho tiempo disponible para la investigación. También durante este período Gauss emprende una correspondencia personal y profesional con los científicos de la época sobre numerosos temas de investigación salvo, posiblemente, las matemáticas. En efecto, aparte de algunas cartas intercambiadas con su amigo Wolfgang Bolyai sobre los fundamentos de la geometría y alguna correspondencia dispersa con otros matemáticos (la escuela de París), Gauss será toda su vida un matemático solitario que no tendrá ni colaboradores, ni corresponsales, ni siquiera estudiantes que trabajen en estrecha colaboración con él. Sin embargo, Gauss inspirará a numerosos matemáticos, entre los cuales se cuentan Dirichlet y Riemann. En el campo de las ciencias, por el contrario, estará rodeado de numerosos estudiantes, colaboradores y amigos y, en particular, Von Humboldt y Von Lindenau desempeñarán un papel privilegiado en la vida profesional de Gauss y en el desarrollo de la ciencia en Alemania. Gracias a mejoras económicas sucesivas, otorgadas por el duque, a los veintiocho años Gauss se encuentra en condiciones de contraer matrimonio con Johanne Ostof, el 9 de octubre de 1805. De su unión nacen Joseph y Minna, y durante cuatro años Johanne hace que la atmósfera familiar sea alegre y atrayente. Pero en 1807 una primera desgracia se abate sobre Gauss al enterarse de que su amigo y protector, el duque Fernando, ha muerto a la cabeza de los ejércitos prusianos contra Napoleón. Ya Gauss veía en Napoleón la personificación de los peligros de la revolución y, a raíz de este trágico accidente, sus opiniones políticas y nacionalistas evolucionan de tal manera que se convierte en un fiel nacionalista y realista. En 1809 nace un tercer hijo, de nombre Louis; de las secuelas de este nacimiento muere su amada Johanne, y además el niño sólo sobrevive algún tiempo. Éstos dos acontecimientos desgraciados, sucedidos en este corto período, sumieron a Gauss en una soledad tal que no fue capaz ya nunca de superarla completamente. El 4 de agosto de 1810 se casa por segunda vez con la amiga íntima de su primera esposa, Minna Waldeck, y de este matrimonio nacen dos niños y una niña. Se dice que Gauss dominaba a sus dos hijas y discutía con sus hijos menores quienes, por otra parte, emigraron a los Estados Unidos. Sólo después de la muerte de su segunda esposa Minna, en 1831, mejoró bastante el clima familiar, gracias sobre todo a su hija Thérèse, la más pequeña de la familia, que se convirtió en la acompañante íntima de su padre durante sus veinticuatro últimos años. Durante los primeros años en Gotinga, Gauss realiza estudios y lleva a cabo investigaciones en diversos frentes a la vez y redacta numerosas memorias: un primer estudio riguroso de las series y la introducción de las funciones hipergeométricas (1813); una contribución importante a la aproximación de las integrales y uno de los primeros análisis de los estimadores estadísticos (1816); trabajos en astronomía, inspirados por su estudio del planeta Palas y una memoria notable sobre la determinación de la atracción de un planeta a su órbita. Se interesa también por el estudio de las líneas paralelas, la declinación de las estrellas, la teoría de números, las cantidades imaginarias, etc. Mientras tanto, Gauss emprende la edificación del observatorio de Gotinga, que, después de muchos esfuerzos consagrados a su realización material, comienza a funcionar en 1816, aunque no a pleno rendimiento hasta 1821. También en la misma época Gauss somete a su reflexión sus primeras concepciones relativas a una geometría no euclídea y, de una manera lenta y gradual, madura sus ideas y piensa incluso en publicar su nueva geometría. Pero en 1831 Gauss conoce los trabajos de Janos Bolyai, y decide escribir al padre de Janos, Farkas, para hacerle saber que él ya está en posesión de tal geometría. Después de saber que Lobachevski también habla concebido una nueva geometría, Gauss se negó a utilizar su prestigio e influencia para apoyar y mantener el valor intrínseco de estas nuevas geometrías. Desde 1817 a 1847, Gauss consagró una buena parte de su vida a trabajos de geodesia, en particular a la triangulación de Hannover y a la invención del heliótrofo. Los problemas de agrimensura con que tropezó Gauss están en la base de sus ideas sobre el método de mínimos cuadrados y de la estadística matemática. En 1828, Gauss redacta un informe de sus ideas sobre la figura de la Tierra, los errores experimentales y el cálculo de las observaciones. También durante el mismo año, Gauss viaja a Berlín para asistir a un congreso científico, invitado por Humboldt, quien será un anfitrión cordial durante todo el congreso. A partir de 1829,

Gauss emprende estudios de física que le conducen a trabajos de física teórica, mecánica, capilaridad, acústica, óptica y cristalografía. Gauss se quejaba desde hacia algunos años de una salud más bien delicada y de una fatiga persistente; los esfuerzos físicos que debía hacer para llevar a cabo sus trabajos de agrimensura le condujeron a sufrir de asma y de una enfermedad del corazón. Por ello, decidió abandonar su participación activa en los trabajos de triangulación en 1825 y limitarse en lo sucesivo a una vida sencilla y regular, evitando los viajes y las consultas del médico. Sin embargo, los años 1830–1831 fueron particularmente difíciles para mantener esta regularidad tan deseada por Gauss. En efecto, su esposa, que sufre de tuberculosis y neurosis histérica desde 1818, se agravó de pronto, su hijo mayor deja la casa familiar y emigra a los Estados Unidos después de una discusión con su padre sobre el tema de la juventud libertina, y la nación alemana conoce un período de disturbios que Gauss desaprueba completamente. A pesar de todo, llega a superar todas estas dificultades, pero su mujer muere el 13 de septiembre de 1831. Afortunadamente, un joven y brillante físico, Wilhelm Weber (1804–1891) llega a Gotinga algunos días más tarde, y comienza una colaboración estrecha y de una sincera amistad entre los dos científicos, amistad que se interrumpirá súbitamente en 1837 a causa de una cuestión de fidelidad política, cuando Weber se declara contrario al nuevo rey Ernesto Augusto. En 1848, cuando Weber pudo volver al desempeño de sus funciones en Gotinga, continuó solo su brillante carrera, pues no podía contar ya con la colaboración de Gauss. Aproximadamente a partir de 1840, las actividades profesionales de Gauss decrecen gradualmente, aunque sea todavía un hombre muy ocupado. En efecto, prosigue sus observaciones astronómicas, ocupa frecuentemente el puesto de decano de la Facultad de Gotinga, establece un fondo para las viudas de profesores fallecidos de Gotinga sobre bases actuariales sólidas, aprende a leer y a escribir el ruso y continúa trabajando sobre una amplia variedad de problemas matemáticos, además de asegurar una enseñanza a estudiantes cada vez mejor preparados, entre los que están Dedekind y Riemann. Después de 1850, el estado de su corazón se deterioró rápidamente y debió reducir considerablemente sus actividades. En 1851, Gauss aprobó la tesis doctoral de Riemann sobre los fundamentos del análisis complejo y en junio de 1854, cuando ya se encontraba bajo los cuidados de un médico desde hacia varios meses, asiste feliz al curso inaugural de Riemann en Gotinga. Obligado a guardar cama, pone al día su correspondencia y prosigue sus lecturas hasta su muerte, acaecida el 23 de febrero de 1855 durante el sueño **Gauss, el hombre de ciencia**. Comparado con los más grandes matemáticos de todos los tiempos, Gauss se impone por su talento universal y la calidad de sus contribuciones científicas. Llamado frecuentemente el «príncipe de los matemáticos», marca la transición entre el siglo XIII y el XIX. A pesar de algunas innovaciones importantes que indujeron a otros matemáticos a enriquecerlas, no es menos cierto que Gauss fue un científico orientado más hacia el pasado que hacia el futuro. Gauss, como decía Felix Klein, es la «cima imponente que domina a todos los matemáticos del siglo XVIII». Se distinguió tanto en matemática pura como aplicada.

Sabemos ya que Gauss no publicó más que la mitad de sus contribuciones científicas durante su vida; el resto aparece en notas, correspondencias e informes de instituciones oficiales. Gauss estaba convencido, por experiencias vividas, que tenía poco que ganar queriendo comunicarse e intercambiando información con los demás. Por ello prefirió aislarse casi completamente del campo de las influencias de la actividad matemática de la época. Sin embargo, encontró más fácil y más útil comunicarse con los experimentadores y los técnicos y, en particular, colaboró estrechamente con Weber en sus experiencias sobre el magnetismo durante cerca de ocho años. Gauss fue un hombre frío y poco comunicativo, con la ambición de conseguir éxito personal y gran renombre. Detestaba todo lo que tenía que ver con ceremonias y formalidades, desaprobaba las controversias y durante toda su vida hizo alarde de un conservadurismo y un nacionalismo respetuoso. Fuera de la ciencia, sus gustos e intereses fueron poco desarrollados. Educado pobremente, buscó durante mucho tiempo una seguridad financiera creciente y, habiéndola obtenido, rehusó sin embargo el vivir como un advenedizo. Gracias a su prestigio y a su gran renombre, y a pesar de su aislamiento voluntario, Gauss influenció e inspiró a varios jóvenes matemáticos de su época. Los trabajos de Jacobi y Abel sobre las *Disquisitiones arithmeticae* El grado de acabado de sus resultados en ciertas ramas de las matemáticas fue tal

que aparecieron nuevos temas en teoría de números, geometría diferencial y estadística. Gauss es probablemente, con Cauchy, uno de los últimos genios universales que han marcado el desarrollo de las matemáticas a través de los tiempos. **El teorema fundamental del álgebra** La primera demostración satisfactoria del teorema fundamental del álgebra, enunciado en 1629 por Girard, aparece en la tesis doctoral de Gauss titulada *Demonstratio nova theorematum omnium functionum algebraicarum racionales integrae unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (nueva demostración del teorema de que toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en producto de factores reales de primero o de segundo grado). En las primeras secciones hace un análisis crítico de las demostraciones de la existencia de una raíz de la función x de la forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + K + Lx + M$$

Demuestra que la raíz compleja:

$$A + bi \text{ de } X(x + iy) = 0$$

corresponde al punto (a, b) del plano, y si

$$X(x + iy) = g(x, y) + ih(x, y)$$

entonces el punto (a, b) debe ser la intersección de las curvas $g = 0$ y $h = 0$. Su argumento, sumamente original, depende del gráfico de las curvas, y era difícil demostrar que debían tener al menos una intersección no vacía. En la segunda demostración de este teorema fundamental publicada en 1816, Gauss abandona las consideraciones geométricas y presenta una demostración enteramente algebraica, pero conservando todavía los coeficientes reales. La tercera demostración se basa en lo que se conoce actualmente como el teorema de la integral de Cauchy. Finalmente, la cuarta demostración (1849) es una variación de la primera, en lo que respecta al método de presentación, y Gauss extiende el campo de variación de los coeficientes al cuerpo de los números complejos porque las cantidades imaginarias eran ya entonces, según él, conocidas generalmente. **Disquisitiones arithmetica** La obra fundamental de Gauss fue publicada por el autor en julio de 1801; es, pues, una obra de juventud, pero su grado de acabado y perfección le valió el ser la mejor inspiradora de todos los teóricos posteriores de la teoría de números. En efecto, este tratado sistematizó, junto con el de Legendre, las aportaciones del siglo precedente en un cuerpo de doctrina independiente, y determinó las líneas maestras de los desarrollos en este tema hasta la época moderna. En este libro bien conocido, Gauss normaliza la notación, presenta la teoría de las congruencias, introduce los números algebraicos y la teoría de formas como la idea dominante del análisis diofántico. Precedido de una dedicatoria al príncipe Carlos Guillermo Fernando, duque de Brunswick y de Luneberg, el tratado comprende un prefacio seguido de siete secciones: 1) Números congruentes en general. 2) Congruencias de primer grado. 3) Residuos de potencia.

4) Congruencias de segundo grado.

5) Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado. 6) Diversas aplicaciones de las nociones estudiadas anteriormente.

7) Ecuaciones que definen las secciones de un círculo. Ya en los trabajos de Euler, Lagrange y Legendre toma forma la noción de congruencia, pero sólo con Gauss se desarrolla como teoría. La notación por congruencia y la terminología se introducen al comienzo de la sección I de la manera siguiente: si un número a divide a la diferencia de los números b y c , se dicen congruentes según a , si no, incongruentes. Al número a se la llamará módulos. Si los números b y c son congruentes, entonces cada uno de ellos es residuo del otro, si no, son no residuos

Después Gauss precisa que esos números deben ser enteros y no fracciones. Por ejemplo, -9 y $+16$ son congruentes módulo 5, -7 es un residuo de $+15$ módulo 11, pero no residuo módulo 3. Añade, en el tema de

la notación: Designaremos la congruencia de dos números con el signo "≡", añadiendo, cuando sea necesario, el módulo encerrado entre paréntesis; así $-7 \equiv 15 \pmod{11}$. $-16 \equiv 9 \pmod{5}$ Gauss muestra a continuación que todos los residuos de a módulo m, para a y m fijos, vienen dados por la fórmula $a + km$ donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y que las congruencias, como las ecuaciones, pueden sumarse, restarse y multiplicarse. Se interesa también por el estudio de las congruencias que engloban variables: por ejemplo, encontrar el valor de x que satisface $4x \equiv 27 \pmod{14}$. Se puede ver que $4x$ es par y que $4x \equiv 27 \pmod{14}$ es impar. De ello se deduce que $4x \equiv 27 \pmod{14}$ no es un múltiplo de 14. Al comienzo de la sección II, Gauss demuestra el teorema de la descomposición única de un número compuesto en factores primos y después presenta un corto estudio sobre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Viene a continuación el estudio de la congruencia de primer grado $ax \equiv b \pmod{c}$: esta congruencia posee siempre una solución cuando el módulo es primo con respecto a a, y si v es un valor apropiado de x, es decir una raíz de la congruencia, es fácil ver que todos los números congruentes con v con respecto al módulo c son también raíces de la congruencia. Por consiguiente, Gauss saca la conclusión de que la congruencia $x \equiv v \pmod{m}$ proporciona la solución completa de la congruencia $ax \equiv b \pmod{c}$. Después de algunas páginas consagradas a esta teoría, Gauss pasa al estudio de la congruencia de más de una variable, que se termina con la demostración del teorema fundamental de las congruencias polinómicas (demostrado por primera vez por Lagrange en 1768): una congruencia de grado m

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + L + Mx + N \equiv 0 \pmod{m}$$

primo p, que no divide a A, no puede resolverse de más de m maneras diferentes o no puede tener más de m raíces no congruentes con relación a p. En la sección III, Gauss emprende un estudio de los residuos de las potencias y, en particular, se encuentra ahí una demostración en términos de congruencias, del pequeño teorema de Fermat y una generalización del teorema de Wilson. Considerado por Gauss como un teorema elegante y de una gran utilidad, el teorema de Fermat se enuncia de la manera siguiente: Si p es un número primo que no divide a a y si $a^t \equiv 1 \pmod{p}$ es la menor potencia de a que es congruente con la unidad con relación a p, el exponente t será igual a $p-1$ o un factor de ese número. En el artículo 76, Gauss se refiere al teorema de Wilson y, después de haber discutido las contribuciones de Lagrange y de Euler a la demostración de este teorema, presenta una generalización del mismo en los siguientes términos: El producto de todos los números inferiores a un número dado A y al mismo tiempo primos con relación a ese número, es congruente relativamente a A con más o menos la unidad. Así, cuando A es de la forma pm o $2pm$ en donde p es un número primo diferente de 2, y también cuando $A = 4$, Gauss afirma que se debe tomar -1 ; en caso contrario, $+1$. En la cuarta sección se presentan las congruencias de segundo grado, que plantean la cuestión de los residuos cuadráticos. Según Gauss, todos los números pueden dividirse en dos clases, una que contiene los números que son congruentes con un cuadrado, y la otra todos los demás. Los números de la primera clase se llaman «residuos cuadráticos del número tomado como módulo» y los otros no son residuos cuadráticos de ese número. Así, según Gauss, si p es un módulo primo, la mitad de los números $1, 2, 3, \dots, p-1$, serán residuos cuadráticos, es decir habrá $(p-1)/2$ residuos y otros tantos números que no lo serán. A continuación, Gauss demuestra una serie de teoremas preliminares sobre los residuos cuadráticos que prepara su célebre demostración de la ley de reciprocidad cuadrática. Entre estos teoremas, se pueden señalar algunos: -1 es un residuo cuadrático de todos los números de la forma $4n+1$ y un no residuo de todos los números de la forma $4n+3$; -2 es un residuo de todos los números primos de la forma $8n+3$; $+2$ y -2 son no residuos de todos los números primos de la forma $8n+5$; -3 y $+3$ son no residuos de todos los números primos de la forma $12n+5$; -3 es un no residuo, $+3$ es un residuo de todo número primo de la forma $12n+11$. Gauss formula su *teorema fundamental* de la manera siguiente: Si p es un número primo de la forma $4n+1$, $+p$ será un residuo o un no residuo de todo número primo que, tomado positivamente, sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma $4n+3$, p tendrá la misma propiedad. Después de haberlo demostrado de una manera muy rigurosa, afirma en el artículo 151 que su demostración es la más sencilla que se puede encontrar, estando incluso al corriente, como estaba él, de los trabajos de Euler y Legendre sobre el tema. Refiriéndose a estos trabajos, Gauss emite un juicio sobre el valor de estos estudios y afirma, con razón, que sólo su demostración de la ley de reciprocidad cuadrática debe ser considerada la primera. Gauss habla descubierto una demostración de esta ley en 1796 y publicó en total cuatro, dos de las cuales aparecen en las

Disquisitiones. Llamada por Gauss *theorema aureum* (joya de la aritmética), esta ley fundamental de las congruencias fue objeto de no menos de cincuenta demostraciones posteriores a las de Gauss. La sección v. consagrada a las formas y a las ecuaciones indeterminadas de segundo grado, cubre más de la mitad de su célebre tratado. Gauss sistematiza y desarrolla considerablemente la teoría de las formas, que nace en los trabajos de Lagrange, y que volverá a tomar y desarrollar Legendre. Escribe, a este respecto, en el artículo 222 No se deben olvidar los trabajos de otros geómetras. El ilustre Lagrange ha hecho investigaciones generales sobre la equivalencia de las formas (1773 y 1775) en las que ha mostrado sobre todo que, para un determinante dado cualquiera, se puede encontrar un número finito de formas tales que toda forma del mismo determinante sea equivalente a una de ellas y que, por lo tanto, todas las formas de un determinante dado pueden distribuirse por clases. Más tarde, el distinguido Legendre ha descubierto varias propiedades elegantes de esta clasificación, aunque la mayor parte por inducción, y nosotros las daremos aquí con las demostraciones. Por lo demás, nadie habla pensado todavía en hacer la distinción entre equivalencia propia e impropia, aunque ésta se revela como un instrumento muy eficaz para investigaciones más delicadas. El famoso problema (artículo 216) de encontrar todas las soluciones que sean números enteros de la ecuación general de segundo grado con dos incógnitas ha sido resuelto completamente por Lagrange (1767 y 1768). Euler lo había abordado también anteriormente, pero había limitado su investigación a deducir todas las soluciones de una sola, que suponía conocida; además, sus métodos no dan todas las soluciones más que en un pequeño número de casos. Gauss define en primer lugar la equivalencia de formas. Sea $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ una forma binaria que puede ser transformada en una forma F' sustituyendo x e y por $x' + y'$. $Y = x' + y'$, donde x, y son enteros. La forma F se convierte, después de la sustitución, en

$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ y obtenemos, según Gauss, tres ecuaciones $a' = a^2 + 2b + c$; $b' = a + b(a + c)$; $c' = a + 2b + c$. Multiplicando la segunda ecuación por sí misma, la primera por la tercera, y por sustracción, se obtiene $b'b'a'c' = (b^2 - ac)(a + c)$. Se deduce, pues, que el determinante de la forma F' es divisible por el determinante de la forma F , y que el cociente es un cuadrado, por lo que los dos determinantes tendrán el mismo signo. Además, prosigue, si la forma F' puede transformarse en la forma F mediante una transformación similar, los determinantes de las formas F y F' serán iguales, y $(a - c) = 1$. En este caso las formas se dicen equivalentes. Además, la igualdad de los determinantes es una condición necesaria para la equivalencia de las formas, pero no suficiente. Si $(a, b) = 1$, F y F' se dicen propiamente equivalentes, y si $(ab - c, b) = -1$, se dicen impropriamente equivalentes. Gauss demuestra a continuación diversos teoremas sobre equivalencia de formas. Por definición, dos formas equivalentes tienen el mismo discriminante $D = b^2 - 4ac$, y Gauss demuestra que todas las formas con un discriminante D dado pueden distribuirse en clases, de manera que todo elemento de una clase sea propiamente equivalente a cada uno de los elementos de la clase. Gauss da también criterios para la representatividad de la clase, y la forma más sencilla que posee un determinante D tiene las características siguientes: $a = 1$, $b = 0$, $c = -D$; ésta se llama entonces la forma principal, y la clase a la que pertenece lleva el nombre de clase principal. Se encuentra también, en esta larga sección, un estudio de la composición de formas (producto), así como la forma ternaria cuadrática, tratada de manera semejante a como estudia las formas binarias. El objetivo principal considerado por Gauss en su estudio de la teoría de las formas consiste en elaborar un conjunto de teoremas de la teoría de números. Además, muestra cómo utilizar esta teoría de las formas para demostrar cierto número de teoremas sobre los enteros. Por ejemplo, Gauss demuestra que todo número primo de la forma $4n + 1$ puede ser representado como una suma de cuadrados, de una única manera, y que todo número primo de la forma $8n + 1$ ó $8n + 3$ puede ser representado mediante la forma $x^2 + 2y^2$ (para x e y enteros), de una única manera, etc. Subrayemos algunas aplicaciones a propósito de las formas ternarias: la primera demostración del teorema de que todo número puede ser representado como una suma de tres números triangulares y una prueba de que todo entero positivo se expresa como una suma de cuatro cuadrados (demostrado por Lagrange). Gauss consagra la sección VI a diversas aplicaciones de la teoría de números a diferentes ramas de las matemáticas. Así, trata de la resolución de fracciones por descomposición en fracciones simplificadas y la conversión de fracciones ordinarias en fracciones decimales. A continuación, presenta un nuevo método de exclusión, aplicable a la resolución de las ecuaciones indeterminadas de segundo grado. Finalmente, Gauss ofrece métodos nuevos para distinguir los números primos de los números compuestos, que permiten encontrar los factores primos de los números compuestos. En la última sección de sus *Disquisitiones*, Gauss establece la

teoría general de las funciones circulares. Partiendo de la ecuación ciclotómica (ecuación para la división de un círculo) $x^n - 1 = 0$, establece en primer lugar que n debe ser un número primo impar. En virtud del teorema de De Moivre, las raíces de esta ecuación son ω^k , donde $k=1,2,\dots,n-1$.

$$x_j = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

Los números complejos x_j son los vértices de un polígono regular de n lados que se encuentran sobre la circunferencia del círculo. Gauss demuestra que las raíces de esta ecuación pueden expresarse racionalmente en términos de las raíces de una sucesión de ecuaciones

$W_1 = 0, W_2 = 0, \dots$ Los grados de W_i precisamente los factores primos de $n-1$. Como cada $W_i = 0$ puede resolverse mediante radicales, se deduce que la ecuación ciclotómica también lo es. Este resultado es importante para la resolución de la ecuación algebraica general de grado n , porque demuestra que es posible, por ejemplo, resolver por radicales una ecuación de grado 7 si éste es factor de $n-1$. Asimismo, el resultado de Gauss es particularmente significativo para el problema geométrico de la construcción de los polígonos regulares de n lados. Convierte la división del círculo en n partes en la solución de tantas ecuaciones (W_i) como factores haya en $n-1$, si n es un número primo, y el grado de las ecuaciones está determinado por la magnitud de los factores. Si $n-1$ es una potencia de 2, lo que ocurre si el valor de n es 3, 5, 17, 257, 65537, etc. (donde $n-1 = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$ entero positivo cualquiera y p_i números primos de Fermat distintos) el seccionamiento del círculo se reduce a ecuaciones cuadráticas solamente (el grado de cada W_i es necesariamente 2) y las funciones trigonométricas de los ángulos $P/n, 2P/n, \dots$, (P es el período 2π) pueden expresarse mediante raíces cuadradas. De esta manera estamos en condiciones de construir todos los polígonos de un número primo de lados n si $n-1$ es una potencia de 2. En particular, Gauss consiguió construir el polígono regular de 17 lados gracias a este resultado, de una importancia capital, así como dar el valor del coseno del ángulo $P/17$: $\cos(P/17) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{[17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}]}$

De la misma manera se puede construir también un polígono regular si n es un número primo de la forma $2^{2^v} + 1$. Gauss termina su tratado presentando una condición necesaria para la construcción de un polígono regular de n lados, condición que será demostrada por Wantzel en 1837. **Otros resultados de Gauss en teoría de números** Recordemos que el contenido de las *Disquisitiones* de Gauss es una obra de juventud que será enriquecida con trabajos subsiguientes en teoría de números. Durante el segundo decenio del siglo XIX Gauss emprendió investigaciones con el fin de establecer leyes de reciprocidad para las congruencias de grado superior a dos. Consiguió formular una ley de reciprocidad bicuadrática hacia 1830, así como una ley de reciprocidad cúbica. Con ocasión de estas investigaciones, Gauss utilizó los «*enteros complejos*», con el fin de garantizar que su teoría fuera sencilla y elegante. Introducido por Euler y Lagrange, el entero complejo adquirió una importancia considerable en teoría de números gracias a los trabajos de Gauss. Número de la forma $a + bi$ donde a y b son enteros, el entero complejo posee cuatro unidades: ± 1 , y $\pm i$. Es compuesto si es el producto de dos enteros diferentes de las unidades. Por ejemplo, $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ es compuesto, mientras que 3 es un entero complejo primo. Además, Gauss mostró que el conjunto de los enteros cumple, o posee esencialmente las mismas propiedades que el de los enteros habituales. En particular, el teorema de la factorización única se aplica a los enteros complejos con tal de que las cuatro unidades no sean consideradas como factores distintos. Gauss se interesó también por el teorema de la distribución de los números primos y, mediante la tabla de números primos, formuló la hipótesis de que $\pi(x)$ difiere poco de

$$\frac{x}{\log x}$$

Además, Gauss conocía la relación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\log x}}{\frac{x}{2 \log t}} = 1$$

pero no sabemos si disponía de una demostración de ese teorema. Habrá que esperar a los trabajos de Chebichev, La Vallée–Poussin y Hadamard para establecer definitivamente este teorema fundamental de la teoría analítica de números. **Los trabajos geométricos de Gauss** El interés de Gauss por la geometría se manifestó en numerosos trabajos geométricos surgidos principalmente de sus preocupaciones por diversos problemas teóricos planteados por la astronomía, la geodesia y la cartografía. Consciente de la necesidad de una concepción más amplia de la geometría, fue inducido a interesarse por diversos problemas de naturaleza geométrica: ciclotomía, pentágonos esféricos, rotación de una recta que pasa por el origen en tres dimensiones, formas cuadráticas, curvatura de superficies y geometría no euclídea. la geometría diferencial de superficies en el espacio de tres dimensiones. Partiendo de la representación paramétrica de Euler de las coordenadas (x, y, z) de todo punto de una superficie La publicación, en 1827, de sus *Disquisitiones circa generales superficies curvas* supone una contribución definitiva a $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ Gauss obtiene las ecuaciones siguientes para expresar el vector tangente $dx = a du + a' dv$, $dy = b du + b' dv$, $dz = c du + c' dv$ donde $a = x u'$, $a' = x v'$, $b = y u'$, $b' = y v'$, $c = z u'$, $c' = z v'$. Para simplificar las representaciones, introduce los determinantes

$$A = \begin{vmatrix} bc \\ b c \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} ca \\ c a \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} ab \\ a b \end{vmatrix}$$

que son tres componentes de un vector normal, y supone que

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$

La longitud de un arco de una superficie en R^3 viene dada por la relación $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ que Gauss transforma de la manera siguiente: $ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2$ donde $E = a^2 + b^2 + c^2$, $F = aa' + bb' + cc'$, $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$. Esta expresión para ds , el elemento de distancia sobre la superficie, constituye esencialmente la primera etapa en el desarrollo de la geometría de Riemann. En posesión de estas relaciones fundamentales, Gauss emprende un estudio sistemático de la teoría de superficies. Expresa en primer lugar el ángulo entre dos curvas de una superficie en términos del coseno de ese ángulo, y después aborda el tratamiento de la curvatura de una superficie y hace la observación de que las propiedades de una superficie dependen únicamente de las cantidades E, F y G definidas más arriba. En particular demuestra que si dos superficies son isométricas (aplicables la una sobre la otra) el producto de los dos radios de curvatura principales es el mismo en dos puntos correspondientes (theorema egregia.). En su memoria de 1827, Gauss trata también del problema de determinar las geodésicas sobre las superficies. En términos de coordenadas polares, donde p y q representan respectivamente el radio y el ángulo, Gauss obtiene $ds^2 = dp^2 + G dq^2$, en virtud de su *theorema egregia.*, con $E = 1$ y $F = 0$, se tiene

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta^2 \sqrt{G}}{\delta p^2}$$

Donde K es llamada curvatura gaussiana

Provisto con este resultado, Gauss consigue demostrar un teorema célebre sobre la curvatura de un triángulo cuyos lados son geodésicas.

Determina que la curvatura total de un triángulo geodésico abc viene dada por $\int K ds = a + b + c - \pi$ Sus trabajos en geometría diferencial demuestran que el estudio de la geometría de una superficie puede hacerse

concentrándose esencialmente en la superficie misma. Además, revelan que la superficie puede ser un espacio en sí misma, porque todas sus propiedades están determinadas por la cantidad ds^2 . Así, las «líneas rectas» sobre la superficie son las geodésicas y, por consiguiente, la geometría de la superficie es no euclídea. Durante esos primeros años, en Gotinga, Gauss maduró su concepción de la geometría no euclídea, que se remontaba ya a su adolescencia en 1792, en la que concebía como posible una geometría lógica sin el postulado de las paralelas de Euclides. Convencido de la ineficacia de las diversas tentativas anteriores para demostrar el postulado de las paralelas, Gauss, a pesar de su profundo conservadurismo y su miedo al ridículo, acepta cada vez más la idea de que se debe salir de los senderos trillados e intentar más bien elaborar una nueva geometría. A partir de 1813 desarrolla esta nueva geometría, llamada sucesivamente antieuclicídea, geometría astral y, por fin, geometría no euclídea. De 1813 a 1831, Gauss elabora su geometría y encuentra numerosos resultados nuevos, pero no se decide a publicarlos antes de su muerte. Sin embargo, en 1831 escribe un ensayo sobre las líneas paralelas, y en una carta dirigida a H. K. Schumacher puede leerse lo que sigue: Después de haber meditado durante casi cuarenta años sin escribir nada... me he tomado la molestia al menos de poner por escrito algunas de mis ideas, con el fin de que no desaparezcan conmigo. Es también al año siguiente cuando conoce los trabajos de Janos Bolyai y, en una carta dirigida al padre de Janos, le comunica sus propios trabajos sobre el tema y reivindica, de alguna manera, la propiedad de sus descubrimientos en estos términos: Si digo que soy incapaz de elogiar este estudio, quizá le extrañe. Pero no puede ser de otra manera, porque ello equivaldría a alabar mis propios trabajos. En efecto, el enfoque preconizado por vuestro hijo y los resultados que ha obtenido coinciden casi enteramente con las ideas que han ocupado mi espíritu desde hace 30 ó 35 años. No tengo la intención de publicar estas meditaciones durante mi vida, pero he decidido escribirlas para que puedan conservarse. Es, en consecuencia, una sorpresa agradable para mí ahorrarme este trabajo, y me llena de alegría el pensamiento de que es precisamente el hijo de mi amigo de siempre el que me ha suplantado de forma tan notable... Dejamos de lado la presentación del contenido matemático de su nueva geometría; volveremos sobre ello más adelante, con motivo de la exposición de los trabajos de Bolyai y Lobachevski. Subrayemos, sin embargo, que el contenido de esta carta hirió profundamente a Janos y le desanimó de tal manera que abandonó sus actividades científicas desde entonces.

Algunos otros trabajos matemáticos de Gauss De sus otras memorias matemáticas, muy numerosas, nos contentaremos con señalar algunos resultados específicos.. A pesar de los trabajos de Wessel y Argand sobre la representación de los números complejos, habrá que esperar a las contribuciones de Gauss sobre el tema para asistir a la aceptación de los números complejos. Las ideas de Gauss sobre las cantidades imaginarias se remontan a mucho antes porque, ya en 1799, en su disertación inaugural presupone una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano cartesiano y los números complejos. Representa el número $x + iy$ mediante las coordenadas (x, y) de un punto en el plano real. Pero sus ideas se hacen más explícitas algunos años después, pues puede leerse en una carta dirigida a Bessel en 1811 que: De la misma manera que puede representarse el dominio entero de todas las cantidades reales mediante una línea recta indefinida (la recta de los reales), puede imaginarse el dominio entero de todas las cantidades, las cantidades reales y las imaginarias mediante un plano indefinido en el que todo punto, determinado por su abscisa a y su ordenada b , representa, por así decirlo, la cantidad $a + bi$. Este pasaje revela que la concepción gaussiana de los números complejos implica una relación directa entre los reales a y b de la forma $a + bi$ y los ejes de coordenadas de un sistema en el plano. Gauss añade también que es posible ir de un punto a otro del plano complejo siguiendo diversas trayectorias. En 1831 Gauss publica su descripción de la representación geométrica de los números complejos, en una memoria sobre los restos bicuadráticos presentada a la Sociedad Real de Gotinga. Presenta la representación de $a + bi$ como un punto (no como un vector como hacían Wessel y Argand) en el plano complejo y describe la adición y la multiplicación geométrica de esos números. Según Gauss, la representación geométrica revela «la significación intuitiva de los números complejos completamente establecidos y, además, no es necesario admitir esas cantidades en el dominio de la aritmética». Además, añade que si las unidades 1 , -1 y i hubieran sido llamadas directa, inversa y lateral en lugar de positiva, negativa e imaginaria, toda la mística que envolvía a esos números probablemente no habría existido. Finalmente, fue Gauss quien introdujo los «números complejos» en oposición a las cantidades imaginarias y utilizó la letra i para designar -1 . Gauss introdujo también ideas fundamentales sobre las funciones de

variable compleja y, más precisamente, en lo que respecta a la necesidad de tener en cuenta los límites de integración cuando son números complejos, a propósito de la integral logarítmica. Así, afirma que «el paso continuo de un valor de x a otro en el plano complejo tiene lugar sobre una curva, y puede incluso suceder que ese paso se haga sobre diversas trayectorias». Después, prosigue, «afirmo ahora que la integral $\int (z)dx$ posee un solo valor incluso sobre diversas trayectorias, con tal que (z) sea unívoca y que z , no se haga infinita en el espacio limitado por las dos trayectorias. En el tema del caso particular de $\int dz/z$ Gauss afirma que partiendo de $z = 1$ y para valores de $a + bi$, se obtiene un valor único si la trayectoria no contiene el punto $z = 0$ si no, se debe añadir $2\pi i$ al valor obtenido al pasar de $z = 1$ a $z = a + bi$, omitiendo el valor $z = 0$. Así, existen varios logaritmos para un $a + bi$ dado. En diversos puntos, los trabajos de Gauss en teoría de números y en el tema del método de mínimos cuadrados coinciden con los de Legendre. En 1785, Legendre había presentado y demostrado parcialmente la ley de reciprocidad cuadrática y Gauss la presentó en sus *Disquisitiones arithmeticae* con el «teorema fundamental», haciendo alusión vagamente a los trabajos de Legendre sobre el tema. Algunos años después, Legendre publica, en 1805, sus *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (Nuevos métodos para la determinación de las órbitas de los cometas) en los que presenta el método de mínimos cuadrados, mientras que Gauss afirma en 1809, sólo con respecto a este método, que «nuestro principio, que hemos utilizado desde 1795, fue publicado tardíamente por Legendre [...]». Legendre replica en el mes de mayo de 1809 a las declaraciones de Gauss mediante una carta cuyo contenido es nada menos que un ataque personal intentando demostrar la inexactitud de la expresión «nuestro principio», utilizada por Gauss. Esta disputa sobre la prioridad de la invención del método de mínimos cuadrados prosiguió hasta 1820, y constituye un ejemplo entre tantos otros en el que se trata de establecer un compromiso entre la fecha de publicación, por una parte, y la naturaleza y calidad del tema tratado, por otra. Por lo demás, cuántos descubrimientos matemáticos no habrán sido atribuidos falsamente a ciertos matemáticos, al ser la cuestión de la prioridad a menudo un asunto de justicia en el que debían intervenir numerosos factores antes de pronunciarse el veredicto.



Podemos mencionar también los estudios de Gauss sobre la función gamma en sus trabajos consagrados a la función hipergeométrica; en particular, desarrolló los resultados de Legendre sobre las funciones eulerianas y encontró la fórmula de multiplicación para (nx) . Se distinguió igualmente por sus trabajos sobre las integrales elípticas, por el descubrimiento de la doble periodicidad de estas funciones en 1800, mediante la integral que da el arco de la lemniscata, por su estudio de la ecuación potencial, de las series hipergeométricas y de la teoría de las singularidades, sin olvidar sus trabajos en mecánica y astronomía.

CAUCHY

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) nació el 21 de agosto de 1789 en París, casi seis semanas después de la caída de la Bastilla. Era el mayor de una familia pobre de seis hijos y creció durante la Revolución. A pesar de la buena voluntad de su padre, Louis-François, Augustin-Louis sobrevivió al Terror pero heredó una salud insegura y delicada. Su educación primaria quedó asegurada enteramente por su padre, porque las escuelas en aquella época eran prácticamente inoperantes. El 1 de enero del año 1800, su padre fue elegido secretario del Senado y el joven Augustin-Louis continuó sus estudios en el despacho de su padre. Fue así como conoció a los grandes matemáticos franceses de la época, Laplace y Lagrange, y este último manifestó ya entonces, con respecto a él, una cierta admiración: «Nos va a reemplazar a todos como matemático». Sin embargo, su padre no descuidó su educación literaria, preocupándose de que su hijo no se limitara exclusivamente a las matemáticas. Hacia los trece años, Cauchy entró en la Escuela Central del Panteón, y allí obtuvo primeros premios en griego y en composición latina. En 1804, hace su primera comunión, deja su escuela y emprende durante diez meses estudios intensivos de matemáticas, bajo la dirección de un tutor. En 1805, Cauchy es el segundo en el concurso de entrada en la Politécnica, pero, a causa de su salud, Lagrange y Laplace le aconsejan consagrarse a las matemáticas. Diplomado por el Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Cauchy participó a partir de 1810 en las obras del puerto de Cherburgo, pero abandonó pronto su trabajo como ingeniero para consagrarse a la ciencia pura. En efecto, vuelve a París en 1813 y, a los veinticuatro años, Cauchy atrae ya la atención de los matemáticos experimentados de Francia por sus trabajos de investigación sobre los poliedros y las funciones simétricas.



Cauchy

En el mes de febrero de 1811, presenta su primera memoria consagrada a la teoría de los poliedros, en la que Cauchy muestra que no existen más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12 ó 20 caras, además de desarrollar la célebre fórmula de Euler que une las aristas, caras y vértices de un poliedro. Estimulado por Legendre, publica una segunda memoria sobre el tema en enero de 1812. Después, en 1814, presenta una *Mémoire sur la theorie des intégrales définies* (Memoria sobre las integrales definidas), seguida en 1815 de una memoria fundamental sobre los grupos de sustitución, así como una demostración de un importante teorema de Fermat: todo entero positivo puede expresarse como una suma de tres números triangulares, cuatro números cuadrados, cinco números pentagonales, etc. El año siguiente, Cauchy es merecedor del Gran Premio que ofrece la Academia por su memoria sobre *Une théorie des ondes sur la surface d'un fluide dense de profondeur infinie* (Un estudio de la teoría de las ondas sobre la superficie de un fluido denso de profundidad

infinita). A sus veintisiete años de edad, Cauchy es propuesto para ocupar el próximo puesto vacante en la Academia, enseñando al mismo tiempo álgebra en la Facultad de Ciencias, física matemática en el College de France y mecánica en la Escuela Politécnica. Nombrado académico por decreto en 1816, en el lugar de Monge que habla sido excluido por Napoleón a su regreso de la isla de Elba, Cauchy desarrolló una actividad matemática increíble, tanto por su producción incesante como por la calidad incomparable de sus memorias sobre prácticamente todas las ramas de las matemáticas. Su reputación se extendió por toda Europa, y numerosos oyentes acudían de Berlin, Madrid, San Petersburgo, etc., para asistir a sus maravillosas conferencias, en las que Cauchy presentaba los resultados originales de sus investigaciones, particularmente en análisis y en física matemática. Se casó, en 1818, con Aloise de Bure, hija de una familia cultivada. De su unión, que duró cerca de cuarenta años, nacieron dos hijas que fueron educadas según los principios estrictos de la religión católica. Siguiendo la tradición establecida en la Escuela Politécnica, Cauchy fue estimulado a escribir los apuntes de sus cursos, y así aparecieron sucesivamente los *Cours d'analyse de L'Ecole Polytechnique* (1821) (Curso de análisis de la Escuela Politécnica), el *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823) (Compendio de las lecciones sobre cálculo infinitesimal), y las *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) (Lecciones sobre el cálculo diferencial). En estos tres libros, Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con un gran rigor, y el concepto de límite constituye la piedra angular de su análisis. A partir de 1826, publicó una especie de diario personal titulado *Exercices de mathématiques* (Ejercicios de matemáticas) que será proseguido, después de 1830, bajo el título de *Exercices d'analyse mathématique et de physique* (Ejercicios de análisis matemático y física) en el que publicará mensualmente sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas. Pero en 1830 las intrigas políticas modificaron durante algunos años su carrera de hombre de ciencia. En efecto, ardiente realista y partidario de los Borbones, perdió su empleo por haberse negado a prestar juramento a la monarquía de julio, y decidió expatriarse voluntariamente. Se fue a Suiza por algún tiempo, y después aceptó una cátedra en Turín, dejando su familia en París y conservando siempre su sillón en la Academia. Llamado a Praga en 1833 por Carlos X, quien le confió la educación científica del conde de Chambord, aceptó esta invitación declarando que no podía «servir mejor los intereses de su patria que revelando al heredero de Luis XIV todo el secreto de esa alta filosofía que hizo brillar el gran siglo con un resplandor tan grande. Su familia se reunió con él un año más tarde. Su trabajo de tutor fue pesado y agotador, y Cauchy conseguía difícilmente librarse de él de vez en cuando para proseguir sus investigaciones. Pudo al menos escribir una larga memoria sobre la dispersión de la luz durante este periodo de tutela. Pero en 1838, presionado por sus amigos de París que le incitaban a volver, Cauchy se excusó ante sus anfitriones pretextando que debía volver a París para celebrar las bodas de oro de sus padres. De regreso en Francia con el título de barón, Cauchy enseñó en varios establecimientos religiosos y fue elegido miembro de la Oficina de Longitudes en 1839, pero el gobierno de Luis Felipe no ratificó esa propuesta. La República restaurada después de la revolución de 1848 le nombró profesor de astronomía matemática en la Facultad de Ciencias, y en la Sorbona, aunque era un legitimista declarado. Después del golpe de Estado de 1852, Napoleón III le

Dispensó del juramento, y a este gesto condescendiente del emperador respondió, por principios, distribuyendo todo su sueldo entre los pobres de Sceaux, donde residía. Durante los diecinueve últimos años de su vida, escribió más de 500 memorias sobre todas las ramas de las matemáticas, incluyendo la mecánica, la física y las matemáticas. Hombre universal, interesado por todo, y en particular por la poesía, autor de un trabajo sobre la prosodia hebrea, profesó siempre con fervor la fe católica. Pasó con quietud y paz los últimos años de su vida y su muerte, acaecida en Sceaux el 23 de mayo de 1857, dejó el recuerdo de una personalidad algo ambigua. Hombre sociable, moderado y sincero, fue un profesor admirable y un hábil conversador. En cambio, fanático de la religión, intentó toda su vida demostrar su superioridad, y su insaciable deseo de producir siempre más le impidió probablemente ayudar a aquellos que, como Abel y Bolzano, habrían podido beneficiarse de su inmensa influencia para dar a conocer sus trabajos. La obra científica que realizó le coloca entre los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Autor de más de setecientas memorias (sólo Euler le sobrepasa en número), su obra inmensa, en la edición moderna, llena veintisiete volúmenes en cuarto. Cauchy fue el fundador de la teoría de las funciones analíticas. Hizo experimentar inmensos progresos a la teoría de los determinantes, además de introducir el rigor en el análisis. Sus contribuciones originales se refieren en especial a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, a la teoría de los grupos de sustitución, a la clarificación y a la formulación de los conceptos de la

teoría de curvas, a los números complejos y a las congruencias polinómicas. En mecánica, escribió importantes memorias sobre el equilibrio de varillas y placas elásticas, sobre la teoría de ondas que Fresnel acababa de establecer, así como sobre el tema de la dispersión y la polarización de la luz. **Cauchy y el rigor en el análisis** Cauchy desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite en sus Lecciones sobre el cálculo infinitesimal, publicadas por primera vez en 1823. En el prefacio de su tratado clásico, afirma que su principal objetivo es conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas. Cauchy prosigue rechazando el desarrollo de las series divergentes y dejando la fórmula de Taylor para el cálculo integral, pues el resto de Taylor está formulado bajo la forma de una integral. Además, estaba al corriente de que Lagrange habla utilizado la fórmula de Taylor como base de la teoría de la derivada. Pero, añade, la mayoría de los geómetras dudan en la actualidad de la utilidad de las series divergentes. Además, en ciertos casos, cuando la serie de Taylor converge, la suma de esta serie difiere, según Cauchy, de la función dada. El concepto de límite se desarrolló gradualmente a partir del método de recubrimiento de los griegos hasta el momento en que Newton lo expresó a su manera en sus Principia. Ya algunos autores como D'Alembert y Lacroix habían hecho de ese concepto la base fundamental del cálculo. Sin embargo, durante todo este largo periodo, el cálculo era concebido como un instrumento que se ocupaba de las relaciones entre cantidades implicadas en problemas geométricos. Unicamente Euler y Lagrange se esforzaron, sin demasiado éxito, por establecer el cálculo sobre el formalismo de su concepto de función analítica. Con toda certeza, antes de Cauchy, todos los autores salvo Bolzano habían popularizado la idea de límite en sus trabajos, pero la mayor parte de su concepción seguía siendo geométrica.



Lagrange

En los textos de Cauchy, el concepto de límite se convierte, claramente y de manera definitiva, en un concepto aritmético sin apoyo geométrico, como puede constatarse en su definición siguiente: Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás. Esta definición da cuenta exacta de la idea intuitiva de límite, pero es verbal más que numérica. Cauchy se sirve a continuación de esta definición para definir un infinitamente pequeño, que resulta ser simplemente una cantidad variable dependiente con un límite igual a cero: Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que disminuyen por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que se llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene cero como límite. Cauchy se sirve de esta última definición para establecer órdenes sucesivos de infinitesimales, con el fin de hacer más útil y más operativo ese concepto de infinitesimal. Así, toda cantidad variable tal que su razón con a (un infinitésimo) posea un límite finito cuando

a decrece, puede clasificarse como un infinitésimo de primer orden. Lo mismo ocurre con el segundo orden, en el sentido de que toda variable cuya razón con a^2 posee un límite finito cuando a decrece es un infinitésimo de segundo orden, y si sucesivamente, las potencias de a , es decir, a , a^2 , a^3 etc. son infinitésimos de primero, segundo, tercero y n orden, respectivamente. Cauchy utilizó de nuevo su definición de límite para definir la continuidad de una función: Sea $f(x)$ una función de la variable x , y supongamos que esta función posee un valor único y finito para cada valor de x en un entorno dado. Si para un valor de x en este intervalo, se añade un valor infinitesimal h , la función aumenta en la diferencia $f(x+h)-f(x)$, que depende, a su vez, de la nueva variable $x+h$ y del valor de x . Establecido lo anterior, la función $f(x)$ será continua con respecto a x entre los límites dados si, entre esos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Se dice, además, que la función $f(x)$ es continua en el entorno de un valor particular atribuido a la variable, siempre que sea continua entre dos límites de x , incluso muy próximos, que contengan al valor de que se trata. Esta definición de la continuidad equivale a decir $f(x)$ será continua en a si $f(x)$ se aproxima al límite $f(a)$ cuando x se aproxima al límite a . Sin embargo, dada su ambigüedad, ciertas expresiones como «suficientemente pequeña», «llega a ser y sigue siendo», serían eliminadas más adelante para ser sustituidas por expresiones numéricas bastante más rigurosas, gracias a los trabajos de Karl Weierstrass (1815–1897). Inexistente en el Curso de análisis, la definición de derivada de una función aparece así en el Compendio de 1823:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre los dos límites dados de la variable x y se asigna a esta variable un valor comprendido entre los dos límites de que se trata, un crecimiento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente, si se hace $x = i$, los dos términos de la razón de diferencias

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximarán indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger hacia otro límite, sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor determinado de x , pero varía con x . Esta definición es esencialmente la de la derivada de una función utilizada en la actualidad, si se exceptúa la utilización del límite a la izquierda y del límite a la derecha, que no aparece en Cauchy. El punto fundamental de esta definición es, evidentemente, la expresión de la derivada como un límite particular de una función. El concepto de diferencial es definido por Cauchy y en términos de la derivada: si dx es una cantidad finita, entonces la diferencial dy de $y = f(x)$ está definida simplemente como $f'(x)dx$. Se puede decir también que las diferenciales dy y dx son cantidades escogidas de manera que la razón dy/dx coincida con la «última razón», o el límite $y' = f'(x)$ de la razón dy/dx . Cauchy se sirve a continuación del concepto de diferencial expresado en términos de la derivada para definir las diferenciales de orden superior. Por ejemplo, como la diferencial $dy = f'(x)dx$ es, de hecho, una función de x y de dx , manteniendo dx fijo, la función $f'(x)dx$ tendrá por derivada $f''(x)dx$ y una diferencial de orden dos $d^2y = f''(x)dx^2$. En general, $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$, donde $f^{(n)}(x)$ es llamado por Cauchy el «coeficiente diferencial». La noción de diferencial sólo tiene una significación lógica cuando está directamente relacionada con la derivada. Durante todo el siglo XVIII, la integración fue tratada como una operación inversa de la diferenciación. La definición de Cauchy de la derivada de una función está formulada de tal manera que la continuidad de la función resulta ser una condición necesaria para la diferenciación de la función. Es probable que Cauchy, al desarrollar una exposición rigurosa del cálculo integral sobre la base de una concepción de la integral como límite de una cierta suma, tuviera buenas razones para adoptar esta concepción que va en contra de los trabajos de sus predecesores del siglo XVIII. Consideraba, por otra parte, que esta manera de proceder tenía la ventaja de proporcionar siempre valores reales para las integrales correspondientes a funciones reales y que era muy apropiada para todos los casos, incluso para aquellos en los que no se puede pasar generalmente de la función bajo el signo $\int$ a la función primitiva. Es por esto por lo que, según parece, Cauchy define la integral definida en términos del límite de las sumas integrales de la manera siguiente. Para una función $y = f(x)$ continua entre los límites dados x_0 y X , subdivide este intervalo mediante los valores $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ y con $x_n = X$, y forma la suma característica de los productos

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Si los valores numéricos de las diferencias $x_{i+1} - x_i$ decrecen indefinidamente, el valor de S_n alcanzará un cierto límite S que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores límites x_0 y X . Este límite es llamado, según Cauchy, una integral definida. Denota al límite S con la notación sugerida por Fourier

$$\int_{x_0}^x f(x) dx$$

en lugar de la sugerida por Euler

$$\int_a^b f(x) dx$$

para designar la antidiferenciación.

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$$

A continuación Cauchy demuestra el teorema fundamental del cálculo Sin embargo, su demostración no era enteramente rigurosa, porque no conocía el concepto de continuidad uniforme. Al definir la integral sin recurrir a la derivada de la función, Cauchy se vio obligado a demostrar la relación fundamental entre la derivada y la integral sirviéndose del teorema de la media: si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el abierto (a, b) , entonces existe al menos un x_0 tal que $a < x_0 < b$ y $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$ (Cauchy demuestra la relación $y = f(x + \Delta x)$ donde $0 < \Delta x < 1$ y x es el intervalo dado.)

A pesar de todo el rigor introducido por Cauchy en el análisis, quedan todavía puntos por clarificar: la relación entre la función continua y la función diferenciable no está comprendida perfectamente (Cauchy cree que toda función continua admite necesariamente una derivada), la eliminación de ciertas frases vagas como «llega a ser y sigue siendo más pequeña que toda cantidad dada» para ser reemplazadas por una formulación más aritmética, la elaboración de una definición rigurosa del concepto de «número», en una palabra, la aritmetización del análisis está todavía por hacer, pero se ha dado un paso inmenso gracias a este gran matemático francés. **Cauchy y las series infinitas**

Los trabajos de Cauchy sobre las series infinitas constituyen la primera exposición importante sobre el tema y contribuyen a introducir un cierto rigor en el aspecto de la convergencia de las series infinitas. En su Curso de análisis, Cauchy dice a propósito de las sucesiones: Una serie (sucesión) es una sucesión infinita de cantidades, $u_0, u_1, u_2, \dots$ que se suceden en virtud de una ley determinada. Estas cantidades son los diferentes términos de la sucesión considerada. A continuación, pasa al concepto de convergencia de una serie como sigue: Sea $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ la suma de los n primeros términos, donde n es un entero (número natural). Si la suma s_n tiende hacia un cierto límite s para valores crecientes de n , entonces la serie se dice convergente, y el límite en cuestión se llama la suma de la serie. Por el contrario, si la suma s_n no se aproxima a un límite determinado cuando n aumenta indefinidamente, la serie es divergente y no tendrá suma. Cauchy muestra claramente en este pasaje que el concepto de límite está directamente implicado en la definición de convergencia de una serie, y pone de relieve el hecho de que una serie infinita puede tener una suma en el sentido de un Emite. A continuación, enuncia el criterio de convergencia que lleva su nombre: una sucesión s_m converge hacia un límite sólo si la diferencia de s_{n+r} y de s_n , para todo valor de r y de n suficientemente grande, puede hacerse menor en valor absoluto que cualquier cantidad dada. Cauchy demostró que esta condición era necesaria a partir de la definición de convergencia, pero no pudo demostrar la suficiencia porque no disponía de una definición rigurosa de los números irracionales para apoyar su demostración. Después de haber demostrado la condición necesaria de su criterio de convergencia, Cauchy enuncia y demuestra criterios específicos para la convergencia de series de términos positivos. Se encuentran,

entre otros, los criterios de la raíz n -ésima, de la razón, de comparación, del logaritmo. Demuestra también que la suma un $+ \infty$ de dos series convergentes converge hacia la suma de las sumas distintas, y un resultado semejante para el producto. Cauchy muestra a continuación que las series de términos negativos convergen cuando las series de los valores absolutos de los términos convergen, y deduce de ello el criterio de Leibniz para las series alternantes. Se interesó también por las series cuyos términos son funciones unívocas y continuas o funciones de la variable compleja. A propósito de las series de Taylor y, en particular, de las series de Maclaurin, Cauchy formula una observación muy importante que estipula que una serie infinita de Taylor converge hacia la función que ha sido desarrollada si el resto de Taylor tiende a cero. Mediante un ejemplo, la función $e^{-xx} + e^{-1/xx}$, demuestra que la serie de Taylor correspondiente no converge hacia esta función. A pesar de algunas falsas interpretaciones, como la relativa a la integración término a término de una serie, y el hecho de que no llegara a comprender el concepto de convergencia uniforme, Cauchy hizo una contribución importante a la elaboración de una teoría coherente de las series infinitas convergentes. Debemos a Cauchy un buen número de definiciones precisas y de métodos rigurosos del análisis moderno. **Las funciones de variable compleja en Cauchy** Cauchy nos dejó un monumento. Se trata de su teoría de funciones de una variable compleja y de su integración, una de las grandes contribuciones matemáticas del siglo XIX. Los primeros indicios de esta teoría se encuentran en su célebre *Mémoire sur la théorie des intégrales définies* (Memoria sobre la teoría de las integrales definidas), leída ante la Academia de París en 1814, pero cuya publicación se retrasará hasta 1827. Cauchy se interesa en esta memoria por la validez de una técnica utilizada en aquella época, que consistía en calcular integrales definidas mediante variables complejas. Intenta hacer riguroso este paso de la variable real a la variable compleja, utilizado por Euler desde 1759 y por Laplace desde 1782 en la evaluación de las integrales definidas.



Laplace Cauchy estudia, de hecho, en esa memoria la posibilidad de intercambiar el orden de integración en las integrales dobles

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

$$\frac{U}{y} = \frac{S}{x} y \frac{U}{x} = - \frac{S}{y}$$

Se puede pasar del primer miembro al segundo con tal de que $f(x, y)$ sea continua en el interior y en la frontera de la región. A continuación, Cauchy introduce dos funciones auxiliares $U(x, y)$ y $S(x, y)$ tales que

$$\frac{U}{x} = -\frac{S}{y}$$

(ecuaciones de Cauchy–Riemann). Estas funciones fueron obtenidas por Euler hacia 1777, cuando observó que toda función de $z = x + iy$ toma la forma $M + iN$, donde M y N son funciones reales, y que para $z = x - iy$ se obtiene la forma $M - iN$. Después Cauchy considera la función $f(x, y)$ dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S}{y} dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{U}{x} dx dy$$

Escribe

$$\frac{U}{x} = -\frac{S}{y}$$

Asimismo, si $f(x, y)$ viene dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{U}{y} dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{S}{x} dx dy$$

se tiene

$$\int_L F(z) dz = \int_{\bar{L}} F(z) dz$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden ser utilizadas para evaluar integrales dobles en uno u otro orden de integración. Sin embargo, Cauchy considera las dos ecuaciones entre las funciones U y S como las que contienen toda la teoría. Por otra parte, habrá que esperar a 1821 para que Cauchy se ocupe de los números complejos y las variables complejas de una manera explícita en su Curso de análisis. En 1822, Cauchy parte de las ecuaciones (11 y (2) y deduce el teorema de la integral que lleva su nombre por combinación de esas ecuaciones, con el fin de expresar $F(z) = S + iU$, donde $z = x + iy$ y el teorema en que

$$\int_{a+ib}^{c+id} f(z) dz$$

Esta integral ilustra el caso sencillo de una integración compleja a lo largo de la frontera de un rectángulo y muestra que el resultado obtenido es independiente del contorno elegido. Pero es en 1825 cuando Cauchy publica un artículo, reconocido por muchos como el más importante de los suyos. Titulado *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (Memoria sobre las integrales definidas entre límites imaginarios), Cauchy presenta en él, en primer lugar, el problema de evaluar la integral siguiente

donde $z = x + iy$. Aquí $x + iy$ es definitivamente un punto del plano complejo y la integral está calculada sobre una trayectoria del plano complejo. Es, de hecho, la definición de la integral entre dos límites complejos como el límite de una suma. Resulta de ello una generalización de su resultado para los rectángulos. Cauchy muestra también que si la función y su derivada están acotadas y son continuas, entonces el límite obtenido es independiente del contorno escogido. Cauchy continuó modificando y afinando sus ideas sobre la integración compleja a partir de 1826. En efecto, en 1827, una nota incluida en sus Ejercicios de matemáticas subraya la importancia del concepto de «valor principal» en la teoría de los residuos. El concepto y el desarrollo de los residuos constituyen una contribución muy importante de Cauchy. En 1831 obtiene su «fórmula integral» y, a partir de 1846, Cauchy aborda el estudio de la teoría de funciones de variable compleja por sí misma y elabora las bases de esta teoría. En 1851, introduce términos nuevos: monótipa o monódroma para designar la función unívoca para cada valor de z en un dominio cualquiera; una función es monógena si para cada z posee una sola derivada (o la derivada es independiente del contorno); una función monogénea que no se hace infinita se llama sinéctica (holomorfa). **Otras contribuciones matemáticas de Cauchy** Entre sus muchas otras contribuciones a las diferentes ramas de las matemáticas no podemos más que citar algunas de las más sencillas. Cauchy mejoró la formación de los conceptos y clarificó una buena parte de la teoría de curvas en el espacio en sus *Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géométrie* (Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría) de 1826. Tras haber descartado los infinitésimos

constantes y los ds, disipó la confusión entre las nociones de crecimiento y de diferencial y acentuó la significación $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en términos más explícitos, de

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}$$

Su desarrollo de la geometría de curvas es prácticamente moderno y deduce fórmulas modernas para los cosenos directores, la curvatura de las curvas, etc., además de introducir el plano oscilador como el plano formado por la tangente y la normal principal. Una de las primeras contribuciones de Cauchy a la teoría de los determinantes fue una memoria publicada en 1815 en la que proporciona la primera exposición sistemática de los determinantes en una forma casi moderna. Se le debe, entre otras cosas, la disposición de los elementos en filas y columnas y la notación de los índices dobles a_{ij} , así como el término «ecuación característica» para $p(\lambda) = 0$ donde p representa un polinomio matricial. Es en esa memoria donde se encuentran numerosos teoremas generales como el de la multiplicación de los determinantes: $\det(a_{ij}) \det(b_{ij}) = \det(c_{ij})$ donde a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} son determinantes de orden n y

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

El término de la fila i y la columna j del producto es la suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila i y de la columna j . Cauchy mejoró el desarrollo de Laplace de los determinantes. En 1829 encontró la primera demostración general de que los valores propios de una matriz simétrica son reales y de que la forma cuadrática correspondiente puede ser transformada en una suma de términos cuadrados (diagonalización), mediante una sustitución ortogonal (o transformación lineal). Se encuentra, por último, en una memoria de 1826, una demostración directa de que la ecuación característica es invariante respecto de transformaciones ortogonales, con motivo de la reducción de una forma cuadrática de tres variables, y una demostración de que las raíces de la ecuación característica son reales. Cauchy fue el primer matemático que consideró la cuestión de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales y consiguió dar dos métodos apropiados. Redactó una serie de memorias sobre el tema que movieron a los matemáticos a preocuparse del problema de los teoremas de existencia en ecuaciones diferenciales. Se interesó también activamente, desde 1844, por la geometría analítica del espacio, y obtuvo resultados interesantes: entre otros, una fórmula general para la transformación de coordenadas oblicuas y la ecuación de una Enea recta bajo la forma

$$\frac{x-a}{\cos \alpha} = \frac{y-b}{\cos \beta} = \frac{z-c}{\cos \gamma}$$

(fue el primero en escribirla bajo esa forma). En el tema de las congruencias de polinomios, Cauchy demostró, en particular, que para todo polinomio $f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots$ se tiene $f(i) \equiv a_0 - a_2 + a_4 - \dots + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots) i \pmod{i^2 + 1}$

(Cauchy introdujo i en lugar de x , porque i representaba para él una cantidad realmente indeterminada). Se interesó también por la teoría de los grupos de sustitución y consagró un buen número de memorias a la cuestión. En particular, demostró la afirmación de Galois de que todo grupo finito de sustitución cuyo orden es divisible por un número primo p contiene al menos un subgrupo de orden p , además de tratar abundantemente los valores no numéricos que pueden adoptar funciones de n letras por permutación de las letras, y encontrar funciones que toman un número dado de letras. El nombre de Cauchy se ha mantenido en un primer plano en campos tan variados como el análisis, la mecánica o la física matemática. Si bien es cierto que las dos figuras dominantes de la primera mitad del siglo XIX fueron, sin discusión, Gauss y Cauchy, también se hicieron notar, en esta época, una pléyade de matemáticos de talento. Queremos, en las páginas siguientes, hacer justicia particularmente a un cierto número de ellos, mencionando brevemente algunas de sus contribuciones. **DIRICHLET** Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), matemático alemán que terminó sus estudios en París, fue discípulo de Gauss al que sucedió en Gotinga en 1855. Su gran tratado, titulado *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lecciones sobre teoría de números) es, de hecho, una explicación de las

Disquisitiones arithmeticae de Gauss que comprende además un número imponente de resultados originales. Dirichlet se vio obligado a utilizar los recursos del análisis para tratar problemas de la teoría de números. Partiendo de una sucesión aritmética general de la forma $a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb, \dots$, donde a y b son primos entre sí, Dirichlet mostró que esta sucesión contiene un número infinito de números primos. Enunciado anteriormente por Euler y Legendre, este teorema fue demostrado por Lejeune Dirichlet en 1837 y constituye una generalización del teorema de Euclides sobre el número infinito de números primos en la sucesión de números naturales 1, 2, 3, ..., etc. Para demostrar esta generalización, Dirichlet recurrió a una prueba analítica larga y complicada, en la que se utiliza lo que se llama actualmente la serie de Dirichlet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$$

donde las a_n y z son complejas. En relación con el resultado de su teorema, demostró también que la suma de los recíprocos de los números primos de la sucesión $\{a + nb\}$ diverge. Dirichlet nos legó también una demostración del último teorema de Fermat para el caso $n = 5$. Hemos visto que Lejeune Dirichlet terminó sus estudios científicos en París y, de 1822 a 1825, se relacionó a menudo con Fourier, quien le ayudó a obtener un puesto de profesor en Alemania recomendándole a Von Humboldt. Parece que Dirichlet desarrolló un interés marcado por las series de Fourier como consecuencia de sus encuentros con él en París. Fue el primero en formular un conjunto de condiciones suficientes para asegurar la convergencia de las series de Fourier hacia la función $f(x)$; estas condiciones son: 1. que f sea unívoca y acotada; 2. que f sea continua a trozos, es decir, que acepte solamente un número finito de discontinuidades en el período; 3. que f sea monótona a trozos, es decir, que posea solamente un número finito de máximos y mínimos en un período. También con motivo de este estudio, Dirichlet ofreció en 1829 un ejemplo de función que se define así: Se debe también a Dirichlet una definición de la función uniforme que se utiliza frecuentemente en la actualidad: y es una función de x si a cada valor de x en un intervalo dado corresponde un valor único de y . En resumen, sus trabajos se refieren sobre todo a la teoría de números y a la teoría de las series e integrales trigonométricas, así como a la de las ecuaciones en derivadas parciales.

$$f(x) = \begin{cases} \text{paratodox} & x \in \mathbb{Q} \\ \text{paratodox} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ABEL



Niels Henrik Abel (1802–1829) fue el mayor matemático que haya producido Noruega. Hijo de un pastor,

se crió en una familia pobre y desunida, pero gracias a su profesor Berdt Michael Holmboe, quien reconoció en él al futuro mayor matemático del mundo, y al gobierno noruego, pudo llevar sus estudios a término. Después de realizar estudios en Christiania y Copenhague, recibió una beca que le llevó a visitar Europa. Abel residió en Pans, pero fue prácticamente ignorado por los matemáticos franceses. Viajó también a Italia y después a Berhn, donde conoció a Crelle. Al volver a su país tuvo todo tipo de dificultades, pero sus trabajos comenzaron a atraer la atención de los matemáticos de la época. Desgraciadamente, enfermó de tuberculosis y murió casi en la miseria en Arendal, cuando tenía tan sólo veintiséis años. Los siglos XVII y XVIII fueron testigos de innumerables tentativas infructuosas de resolver la ecuación general de quinto grado mediante radicales. Durante sus primeras investigaciones, Abel creyó haber encontrado una solución utilizando el enfoque preconizado por Gauss para la ecuación binómica. Pronto descubrió un error, e intentó demostrar la imposibilidad de tal solución. Algún tiempo después consiguió demostrar el teorema siguiente: las raíces de una ecuación resoluble por radicales pueden ser formuladas de forma que cada radical que aparece en la expresión de las raíces pueda expresarse como una función racional de las raíces de la ecuación y ciertas

raíces de la unidad. Hacia 1826, Abel se sirvió de este teorema para probar que la ecuación $y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$ no es resoluble por radicales, es decir, que y no puede ser expresada en términos de a, b, c, d y e utilizando un número finito de veces las cuatro operaciones aritméticas fundamentales además de la extracción de raíces. Estudiando ciertas ecuaciones especiales, como la de la lemniscata ($x^n - 1 = 0$, equivalente a la ciclotomía de Gauss), llegó a una clase de ecuaciones algebraicas, llamadas «ecuaciones abelianas», que son resolubles por radicales. Por ejemplo, la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$, en donde n es un número primo, es una ecuación abeliana. Abel introdujo también dos nociones nuevas: cuerpos y polinomios irreducibles en un cuerpo dado. Un cuerpo de números significa, según Abel, una colección de números tales que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de toda pareja cualquiera de la colección son cerradas en la colección (son también números de la misma colección). Así, los números racionales, reales y complejos forman, respectivamente, un cuerpo. Durante su estancia en París, Abel escribió una carta a un amigo, en la que el extracto siguiente es particularmente revelador de las dificultades personales con las que se enfrentó para darse a conocer: Todo principiante tiene dificultades enormes para hacerse notar aquí. Acabo precisamente de terminar un tratado considerable sobre una cierta clase de funciones trascendentes [...] pero el Sr. Cauchy se propone mirar este trabajo sólo por encima. Por consiguiente, Abel confió la memoria a Cauchy con la esperanza de que éste la analizara en profundidad, pero Cauchy la extravió, por descuido o voluntariamente, lo que no se sabrá probablemente nunca. Titulado *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes* (Memoria sobre una propiedad general de una clase muy extensa de funciones trascendentes), este texto largo y difícil de comprender debía ser evaluado por Cauchy y Legendre. Como se sabe, Cauchy perdió su pista y Legendre simplemente lo olvidó, pero después de la muerte de Abel la Academia buscó la memoria y la publicó en 1841, cuando fue encontrada, como reconocimiento póstumo a este joven genio de las matemáticas. Mientras tanto, otros matemáticos publicaron antes de 1841 resultados sobre las funciones elípticas, varios de los cuales estaban ya contenidos en la memoria de Abel. La idea profundamente original de Abel fue realizar la inversión de la integral elíptica de primera especie,

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

tomando su valor como variable independiente y su límite superior como función. Como $x = \sin \phi$, Abel propuso estudiar x como una función de F . La introducción de los números complejos en las integrales elípticas le permitió desarrollar lo que se llama habitualmente «teorema de adición para las funciones elípticas». Pero Abel hizo, en 1828, un descubrimiento importante que despertó el entusiasmo de numerosos matemáticos, comenzando por Legendre y Jacobi. Hablamos de la propiedad fundamental de las integrales llamadas actualmente abelianas. Por el estudio de una generalización de las integrales elípticas e hiperelípticas ($\int R(X, y) dx$, donde $R(X, Y)$ es una función racional de x y de y con $y^2 = P(X)$ y el grado de P al menos cinco), Abel se vio conducido al estudio de la integral siguiente:

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado superior o igual a cinco. Invertiendo la relación entre u y v , obtiene evidentemente $v = f(u)$, y esta función es un caso especial de lo que se llama una «función abeliana». La importancia de esta generalización es ilustrada claramente por las palabras de Emile Picard en 1893: No hay, en la historia de la ciencia, proposición tan importante obtenida a partir de consideración tan sencilla. Abel se ocupó también del problema general del rigor en análisis y, en particular, se inspiró en el rigor de los trabajos de Cauchy. En el tema de la convergencia de las series infinitas, fue el primero en demostrar la convergencia de la serie binómica, además de haber corregido un error de Cauchy sobre la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas sirviéndose de la idea de la «convergencia uniforme». Después de su muerte su talento fue reconocido por dos hechos notables. Dos días después de su muerte, Crelle anunciaba en una carta su nombramiento para un puesto de profesor en la Universidad de Berlín. Con Jacobi, Abel recibió

el Gran Premio de la Academia de Paris del año 1830. Ha habido pocos matemáticos cuyo nombre haya quedado unido a tantos conceptos de la matemática moderna; baste mencionar los teoremas de Abel, las integrales abelianas, las ecuaciones abelianas, los grupos abelianos, las fórmulas de Abel.

JACOBI Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), matemático alemán cuyos estudios, realizados en Berlín, le llevaron en 1827 a enseñar matemáticas en Königsberg. Su padre, rico banquero, le procuró cuanto era necesario para completar su formación filológica y matemática. Profesor nato, conoció una carrera brillante, como docente y como investigador, pero renunció a sus funciones en 1842 por razones de salud y se retiró a Berlín con una pensión del gobierno prusiano. Jacobi es célebre en matemáticas principalmente por sus trabajos sobre las funciones elípticas y los determinantes funcionales, llamados también jacobianos.

En 1829 Jacobi utiliza por primera vez los determinantes funcionales que llevan su nombre. Algunos años después, expresa los cambios de variable en las integrales múltiples, mediante determinantes. Por ejemplo, la integral doble $\iint F(x,y) dx dy$, mediante

el cambio de variables $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, se convierte en



$$\iint H(u,v) \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} du dv$$

Donde $H(u,v) = F(f(u,v), g(u,v))$ y el determinante

$$\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{f}{g} & \frac{f}{v} \\ \frac{g}{u} & \frac{f}{v} \end{vmatrix} = \frac{f}{u} \frac{g}{v} - \frac{f}{v} \frac{g}{u}$$

se llama el jacobiano de x e y con respecto a u y a v . Se dice que Jacobi estaba tan entusiasmado con los determinantes funcionales que insistía en concebir los determinantes numéricos ordinarios de orden n como jacobianos de n funciones lineales de n variables. Además, en 1841, se tomó el trabajo de publicar una larga memoria consagrada exclusivamente a los determinantes funcionales. En esta memoria pone claramente de manifiesto que el determinante funcional es, en varios aspectos y para las funciones de varias variables, análogo al cociente diferencial de una función de una sola variable. Jacobi insiste también en el papel de este determinante para definir las condiciones de dependencia e independencia de un conjunto de ecuaciones o de funciones. Así, considera n funciones $v_1, v_2, \dots, v_n$, tales que cada una es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, y propone la cuestión de cómo, partiendo de estas n funciones, las n variables pueden ser eliminadas de manera que las v_i estén relacionadas mediante una ecuación.

$$\frac{v_1}{x_1} \dots \frac{v_1}{x_n} \\ \dots \\ \frac{v_n}{x_1} \dots \frac{v_n}{x_n}$$

Demostró que si el jacobiano de las v_i con respecto a las x_i se anula, las n funciones son mutuamente

dependientes, y a la inversa. Se puede también subrayar la presencia en esta memoria del teorema del producto para los jacobianos: si las v_i son funciones de las y_j ; y éstas son funciones de las x_i , entonces el jacobiano de las v_i con respecto a las x_i

es el producto del jacobiano de las v_i con respecto a las y_i y del jacobiano de las y_i con respecto a las x_i . Finalmente, Jacobi demostró también, como lo había hecho Cauchy, que todo determinante real simétrico de cualquier orden tiene raíces características reales. Dado que Gauss publicó muy pocos de sus resultados originales, fueron Abel y Jacobi los que influyeron más en el desarrollo ulterior de las integrales elípticas. Parece ser que Abel y Jacobi estuvieron influenciados al principio por los trabajos de Legendre, y los dos matemáticos comparten la gloria de haber reconocido, independientemente uno del otro y de cualquier otro, por una parte la necesidad de invertir las integrales elípticas de Legendre y de trabajar en todo el campo de la variable compleja, y por otra parte la necesidad de referirse a la integral misma con el fin de deducir sus principales propiedades, la fundamental de las cuales quizá sea la de la doble periodicidad, es decir, que existen dos números complejos z_1 y z_2 tales que $f(u) = f(u + z_1) = f(u + z_2)$ donde

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

y z_1 y z_2 son dos períodos distintos de la función elíptica. Jacobi publicó en 1827 sus primeros trabajos sobre el tema, cuatro años después de la memoria de Abel; estas dos memorias fueron editadas en la misma revista científica, La revista de Crelle (la primera revista matemática alemana). Jacobi recogió en un cuerpo de doctrina sus propios descubrimientos sobre las funciones elípticas; varios de estos resultados fueron también obtenidos por Abel, en los *Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum* de 1829. Después de 1829, Jacobi tomó conciencia de que el método de base utilizado en sus *Fundamenta nova* resultaba inapropiado y, en consecuencia, intentó expresar las funciones elípticas mediante funciones auxiliares. Fue así como introdujo las funciones zeta, que son ilustradas mediante

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + 2\pi i n z}$$

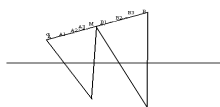
donde z y t son complejas, y expresó entonces las funciones elípticas seno amplitud (so u), coseno amplitud (sn u) y delta amplitud (cn u) en términos de estas funciones. Obtuvo también diversas expresiones para las funciones zeta bajo la forma de series infinitas y productos infinitos. En una importante Memoria de 1835, Jacobi demostró que si una función unívoca de una sola variable es doblemente periódica, la razón de los períodos no es un número real, y que es imposible que tal función tenga más de dos períodos distintos. Este descubrimiento abrió un nuevo campo de investigación: el problema de encontrar todas las funciones doblemente periódicas. Aplicó así las funciones zeta a la teoría de números. Jacobi se interesó también por el cálculo de variaciones, y su principal descubrimiento se refiere a la existencia del concepto de puntos conjugados. Finalmente, mencionemos en teoría de números sus demostraciones, las primeras sobre las leyes de reciprocidad bicuadrática y cúbica.



BOLZANO Bernhard Bolzano (1781–1848), filósofo, lógico y matemático checo, nació en Praga en 1781. Era hijo de un anticuario italiano y de una alemana. Al terminar sus estudios se piensa en él para la cátedra de matemáticas recientemente vacante en la Universidad de Praga. Después de haberse consagrado como

sacerdote, enseña filosofía y religión en la Universidad, pues el puesto de matemáticas había sido adjudicado a un candidato que poseía mayor experiencia pedagógica que la suya. Acusado de racionalismo, se le incoó un proceso que condujo, en 1820, a su expulsión de la Universidad y a la prohibición de publicar sus obras. Durante la estancia de Cauchy en Praga, Bolzano menciona en una carta de 18 de diciembre de 1843 dirigida a su alumno Fesl en Viena que «nos visitamos varias veces durante los días que pasé en Praga».

En su memoria de 1817, titulada Demostración paramamente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación, Bolzano presenta definiciones rigurosas de la función continua y de la derivada de una función, así como una concepción clara de las relaciones que unen la diferenciabilidad y la continuidad de una función. Bolzano da la definición siguiente de la continuidad de una función: Que una función $f(x)$ varíe según la ley de continuidad para todos los valores de x situados en el interior o en el exterior de ciertos límites, equivale a lo siguiente. si x es cualquiera de tales valores, se puede hacer que la diferencia $f(X + W) - f(X)$ sea más pequeña que toda magnitud dada si se puede tomar w tan pequeña como se quiera. Se observa que esta definición no difiere esencialmente de la de Cauchy, y que convierte también en un elemento fundamental el concepto de límite. Ocurre lo mismo con la definición de derivada de una función propuesta por los dos autores. Añadamos que Bolzano subrayó el hecho de que la derivada de f no es un cociente de ceros o de cantidades evanescentes, sino un número hacia el que se aproxima el cociente. Además, intentó demostrar teorema siguiente: Toda función continua de x que es positiva para $x = a$ y negativa para $x = b$, debe anularse para cierto valor intermedio situado entre a y b pero afirma que, reflexionando de manera más precisa sobre ello, en el fondo esta proposición es idéntica al teorema sobre el que versa su memoria. Siempre a propósito de la continuidad de las funciones, Bolzano distingue entre función continua y función diferenciable, cosa que Cauchy no hizo porque creyó durante casi toda su vida que una función continua era siempre diferenciable. En efecto, en 1834, Bolzano, en su *Théorie des fonctions* (Teoría de funciones)



separa el concepto de continuidad del de derivabilidad: cuarenta años antes de Weierstrass, habla construido una función de una variable real, continua en un intervalo cerrado, que no tiene derivada en ningún punto de ese intervalo.

Sea AB un segmento de recta y M su punto medio. Se dividen AM y MB en cuatro partes iguales. Sean A_3 y B_3 las reflexiones de A_3 y B_3 por el espejo. La línea quebrada $AA_3M_3B_3B$ sobre la que se aplica el mismo proceso de subdivisión que sobre AB proporciona 16 segmentos de recta. Continuando este proceso indefinidamente, el conjunto de las líneas quebradas converge hacia una curva que representa una función continua, la cual no es diferenciable en ninguna parte. Subrayemos que la importancia de esta obra inacabada reposa esencialmente en su tratamiento sistemático y profundo del concepto de función. En particular, Bolzano subraya el carácter local de la continuidad: examina la continuidad en un punto y estudia separadamente la continuidad a la izquierda y a la derecha. Bolzano pone de manifiesto también la necesidad de considerar la cuestión de la convergencia de las series infinitas. Definió así una clase de series: La variación (crecimiento o decrecimiento) que experimenta su valor mediante una prolongación de sus términos llevada tan lejos como se quiera, es siempre más pequeña que una cierta cantidad, que puede tomarse, a su vez, tan pequeña como se quiera, si se hubiera prolongado ya la serie lo suficientemente. [...] existe siempre una, pero sólo una cantidad constante a la que se aproxima el valor de esta serie (de términos finitos) tanto como se quiera, cuando se la prolonga lo suficientemente. Introdujo también, para la sucesión de funciones con x fijo, $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots, F_{n+r}(x), \dots$, el teorema que afirma que la diferencia entre su término n -ésimo $F_n(x)$ y todo término ulterior $F_{n+r}(x)$, por alejado que esté del n -ésimo, es más pequeña que toda cantidad

dada, si n se ha tomado lo suficientemente grande; entonces, existe siempre, según Bolzano, una cierta cantidad constante, y una sólo, a la que se aproximan cada vez más los términos de esta serie, y a la que pueden aproximarse tanto como se quiera, cuando se prolonga la serie lo suficientemente. Su demostración no es completamente rigurosa, porque la determinación de esta «cantidad constante» exigía una concepción lúcida de los números irracionales. Además, se encuentra en esta demostración la condición de Cauchy para la convergencia de las sucesiones, formulada en términos de una condición suficiente solamente, sin formular en términos explícitos la condición necesaria. En su demostración puramente analítica del teorema que afirma la existencia de una raíz de la ecuación entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos, Bolzano utiliza un lema que establece la existencia de una cota superior mínima para un conjunto de números reales. Este lema está formulado en estos términos: Si una propiedad M no pertenece a todos los valores de una cantidad variable x, pero pertenece a todos los que son más pequeños que un cierto u, existe siempre una cantidad U que es la mayor de aquellas de las que se puede afirmar que todos los valores inferiores x poseen la propiedad M. Es el teorema de Bolzano–Weierstrass: un conjunto mayorado de números reales admite un límite superior preciso U. Bolzano se interesó también por el estudio de los números reales con el fin de erigir una teoría al respecto, además de abordar nociones que abrían a las matemáticas una perspectiva nueva: la de la teoría de conjuntos. Su última gran obra, titulada *Paradozien des Unendlichen* (Paradojas del infinito), publicada por Préhonsky en 1851, después de la muerte de Bolzano, aporta las definiciones (tomadas de la Teoría de la ciencia, de 1837) de conjunto, cantidad, número, conjunto finito y conjunto infinito. Bolzano demostró la existencia de la correspondencia biunívoca, como lo habla hecho Galileo, entre los enteros naturales y los cuadrados perfectos, entre los elementos de un conjunto infinito y los de un subconjunto propio. Además, Bolzano parece haber reconocido que la cardinalidad de los números reales es de un orden diferente de la del conjunto de los enteros. Como Boyer se complace en decir, Bolzano «predicaba en el desierto», y muchos de sus resultados originales fueron redescubiertos más tarde. Por otra parte, sus trabajos no fueron conocidos hasta finales del siglo XIX.

POISSON

Siméon–Denis Poisson (1781–1840), hijo de un administrador de la ciudad de Pithiviers, entró en la Escuela Politécnica en 1798, aunque su padre esperaba que se hiciera médico. Fue el alumno preferido de Laplace y, a su salida de la Escuela, a los diecinueve años, se orientó hacia la enseñanza. Primero suplente de Fourier, se convirtió a continuación en profesor y después en examinador en la Escuela Politécnica. Elevado a la dignidad de par en 1837, fue llamado el mismo año para formar parte del Consejo Real de la Universidad, en donde se hizo cargo de la dirección de la enseñanza de las matemáticas en todos los colegios de Francia. Publicó cerca de 400 trabajos y memorias, y su reputación como profesor fue excelente. Su obra, inmensa y diversificada, aborda principalmente la física matemática, los problemas de atracción de potencial, mecánica celeste y probabilidades, enriqueciendo también el análisis matemático, aunque guardándose bien de ser un matemático puro. Sus dos tratados principales son: *Traité de mécanique* (Tratado de mecánica), 2 vols., 1811 y 1833, y *Recherches sur la probabilité des jugements* (Investigaciones sobre la probabilidad de los juicios), 1837. Poisson se interesó por la manipulación de las series y, en particular, sus investigaciones trataron de la fórmula para la suma de las potencias enteras de los enteros positivos, que recurre a los números de Bernoulli, y fue el primero en ocuparse del resto R haciendo un estudio serio de él. Su interés se centró también en el estudio de la convergencia de las series, rechazando la utilización de las series infinitas divergentes aunque, sin embargo, en la práctica las utilizara abundantemente, quizá sin saberlo, para la representación de funciones arbitrarias mediante series trigonométricas. Poisson publicó una memoria en 1820 en la que se sirve de las integrales de funciones complejas calculadas a lo largo de trayectorias del plano complejo. Por ejemplo, partiendo de

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

hace $x = ei$ donde i toma sus valores de $(2n + 1)\pi$ a 0, y obtiene el valor $-(2n + 1)\pi i$; tratando la integral como el límite de una suma. A propósito de las ecuaciones integrales, descubrió la expresión integral de la

función g en la transformada de Laplace de $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} g(t) dt$

Utilizó también la noción de sumabilidad en el estudio de la suma de series trigonométricas, además de servirse de lo que se denomina actualmente la «sumabilidad de Abel»: si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

tiene un radio de convergencia r y converge para $x = r$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

En su tratado de probabilidad de 1837, puede encontrarse la conocida distribución de Poisson o la ley de los grandes números de Poisson: en la distribución binomial $f(x) = (p + q)^n$ donde $p + q = 1$ y n es el número de pruebas, cuando n aumenta indefinidamente, esta distribución tiende ordinariamente hacia una distribución llamada normal; pero si, cuando n aumenta indefinidamente p tiende a cero de manera que el producto np permanezca constante, se tiene el caso límite de la distribución binomial llamada la «distribución de Poisson». Poisson quedó muy impresionado con los trabajos de Fourier sobre las series trigonométricas, y consagró muchas energías y esfuerzos a resolver, mediante estas series, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, pero a este respecto fue demasiado optimista en la utilización que hizo de estos desarrollos en serie. En su *Mémoire sur la théorie des ondes* (Memoria sobre la teoría de las ondas), de 1816, Poisson da la integral de Fourier de una manera parecida a la de Cauchy. Proporciona, por ejemplo, la ecuación exacta del potencial cuando el punto es atraído hacia el interior de la masa atractora, llamada ecuación de Poisson, pero cuya demostración es poco rigurosa, incluso para las exigencias de la época: partiendo de la ecuación del potencial de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

donde V es una función de x , y , y z que está definida para todo punto (x, y, z) que esté en el interior o en el exterior de la masa atractora, Poisson demostró que si el punto está en el interior de esta masa, entonces V satisfacedonde Q designa la densidad de la materia atractora, la cual es también una función de las coordenadas x , y y z del punto. Pero es sobre todo en electricidad y en magnetismo en donde es el iniciador de la teoría del potencial magnético, estableciendo los principios de la teoría matemática de la electrostática y estudiando la distribución de la electricidad en la superficie de los cuerpos conductores, las propiedades de los imanes producidos por influencia, sin olvidar, finalmente, sus trabajos sobre la capilaridad, la elasticidad y su papel importante en mecánica. Inspiró muchas investigaciones ulteriores, en particular las de Green. **GREEN** George Green (1793–1841), matemático inglés, autodidacto, desarrolló las investigaciones de Poisson en electricidad y en magnetismo. En 1828 publicó una memoria titulada *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (Ensayo sobre la aplicación del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo), que tuvo una difusión restringida. Este estudio permaneció prácticamente desconocido hasta que Lord Kelvin, sir William Thomson (1824–1907), lo hiciera reimprimir en 1846. Como Poisson, parte de la ecuación del potencial de Laplace y demuestra, en este ensayo, el célebre teorema al que está unido su nombre, y cuya formulación moderna es: si P y Q son dos funciones de x e y tales que sus derivadas parciales son continuas en una región del plano XY acotada por una curva C , entonces

$$\oint_R \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

(en notación moderna). Este teorema, y el correspondiente en tres dimensiones, fueron demostrados también por Ostrogradsky en 1828. Green aplicó su fórmula a problemas de electricidad y magnetismo, y sus trabajos inspiraron a la escuela inglesa de física matemática, que contaba en sus filas con Kelvin, Stokes, Rayleigh y, evidentemente, Maxwell.

OSTROGRADSKY Miguel Ostrogradsky (1801–1861), de origen ucraniano, comenzó sus estudios universitarios a los catorce años en la Universidad de Jarkov, fundada en 1805 como consecuencia de una reforma emprendida por el zar en 1802. Ostrogradsky hizo estudios brillantes en la Universidad, obtuvo su primer grado científico, y parecía destinado muy naturalmente al profesorado de universidad. Pero el impulso del movimiento revolucionario y la represión administrativa y policial ejercida por Alejandro I hicieron que la arbitrariedad de las autoridades locales dejara, en 1820, al mejor alumno de Jarkov sin documentación oficial que atestiguara los estudios que había hecho. Ostrogradsky aceptó su suerte pero decidió proseguir sus estudios en París, en donde puede encontrarse ya en el verano de 1822. Según parece, el joven matemático ruso se hizo notar por su inteligencia y la seriedad de sus estudios, pues Cauchy, Poisson, Fourier, Lamé, etc., se interesaron por sus trabajos. En 1828 volvió a Rusia, más precisamente a San Petersburgo, donde sus primeras memorias publicadas en París le habían procurado una reputación que precedió a su llegada a Rusia. Si su ilustre contemporáneo Lobachevsky, que trabajaba en Kazán, no consiguió ningún reconocimiento en vida, ni siquiera de Ostrogradsky, este último, por el contrario, gracias a sus investigaciones en matemáticas y en mecánica, conoció un gran renombre y un respeto merecido ya desde sus primeros años de actividades matemáticas. Miembro de numerosas Academias, fue elegido correspondiente del Instituto de Francia en 1856 en el lugar de Dirichlet.

Ostrogradsky escribió, en 1826, una memoria titulada *Démonstration d'un théorème du calcul integral* (Demostración de un teorema de cálculo integral), en la que se encuentra, de hecho, dos teoremas que tienen un carácter auxiliar: el que dio su nombre a la memoria es un caso particular del teorema de Green pero, para establecer este teorema, demuestra en primer lugar una proposición importante. Esta proposición transforma las integrales triples, tomadas con respecto a un volumen V , en integrales con respecto a la superficie S que limita el volumen (en notación moderna)

$$\int_V \left(\frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} \right) dv = \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

donde dV es el elemento diferencial de volumen, dS el elemento diferencial de superficie, α , β , y γ representan los ángulos de la seminormal positiva con los ejes de coordenadas rectangulares, P , Q y R son funciones de x , y y z . En la literatura matemática, se llama a veces teorema de Gauss, a veces fórmula de Green, a veces fórmula de Ostrogradsky y a veces teorema de la divergencia. Los trabajos científicos y la actividad pedagógica de Ostrogradsky tuvieron una influencia particularmente importante en el desarrollo de las ciencias en Rusia. En efecto, preparó las condiciones propicias para la creación de la escuela matemática, organizada por Chebichev, además de ser considerado como el fundador de la escuela rusa de mecánica teórica. Estimuló en Rusia numerosas investigaciones, sobre todo en física matemática, cálculo de variaciones, teoría de las integrales múltiples y teoría de las funciones algebraicas. Con sus enseñanzas preparó a numerosos profesores de matemáticas, cuya formación estaba dirigida sobre todo hacia el campo de las matemáticas aplicadas.

LA ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS INTRODUCCIÓN Newton y Leibniz enunciaron claramente las reglas de operación de cálculo diferencial e integral, y sus sucesores inmediatos confiaron ciegamente en el simbolismo para lanzarse con entusiasmo a la búsqueda de resultados sorprendentes y numerosos. A pesar del clima de confianza que reinaba a comienzos de 1800 sobre la eficacia de este nuevo cálculo de los procesos infinitos, antes incluso de finales del siglo XVII ya algunos críticos como Nieuwentijt, Berkeley y Rolle suscitaron interrogantes sobre las bases lógicas de este nuevo análisis y sobre el carácter vago e impreciso de los conceptos fundamentales a él asociados. A principios del siglo XVIII, algunos matemáticos se preguntan por la justificación de los procedimientos y las dificultades encontradas en el desarrollo de los principios y métodos del cálculo diferencial e integral. Entre estas dificultades de todas clases, pueden subrayarse las más importantes: el concepto de función es vago e impreciso; el uso abundante de las series infinitas sin tener en cuenta el concepto de convergencia conlleva el nacimiento de paradojas y de resultados incongruentes; las diversas tentativas para representar funciones mediante series de potencias, y en particular con la ayuda de series trigonométricas, se añaden a la confusión ya existente; finalmente, los

conceptos fundamentales de límite, derivada e integral deben ser redefinidos con bastante más claridad y precisión. Todas estas dificultades despertaron finalmente un cierto descontento con respecto al estatuto lógico del nuevo análisis, y diversos matemáticos decidieron hacer lo posible por remediar esta situación. Hemos visto anteriormente las contribuciones de D'Alembert, Lagrange, Gauss, Cauchy, Bolzano, Abel y Dirichlet para dotar de unas bases más apropiadas al fundamento mismo del análisis. Recordemos que D'Alembert fue el primero en reconocer la necesidad de una teoría del límite, a fin de establecer el cálculo diferencial sobre bases irreprochables, con lo que comenzaba, en las matemáticas, la transición de la filosofía especulativa hacia una construcción rigurosa. Lagrange intentó, como John Landen (1719–1790) lo había hecho en su *Residual analysis* (Análisis residual), de 1764, evitar las dificultades de este cálculo refiriendo todas las operaciones al álgebra y a la geometría. El problema de la representatividad y la convergencia sobre el cual reposaba la validez de los argumentos de Lagrange, se asocia directamente a consideraciones sobre el límite, concepto que Lagrange intentaba justamente evitar. El serio estudio emprendido por Gauss sobre las series hipergeométricas marca el fin de la utilización temeraria de las series y el comienzo de una preocupación por las cuestiones de convergencia y divergencia. Cauchy, Bolzano y Dirichlet contribuyeron a la formulación de definiciones y criterios de convergencia que marcan una primera etapa en la aritmetización del análisis. Nos proponemos ahora presentar, en las páginas que siguen, las principales contribuciones del siglo XIX a la liberación del concepto de función y a la creación de números reales con el fin de aritmetizar el análisis.

Liberación del concepto de función Concepto clave del análisis, el concepto de función fue objeto de un estudio emprendido en el siglo XVIII para clarificar su expresión analítica. Euler fue el primer autor que llamó la atención sobre el concepto de función en un estudio sistemático de todas las funciones elementales. Más adelante, a mediados del siglo XVIII, la representación de funciones se desarrolló gracias a la controversia suscitada a propósito del problema de la cuerda vibrante. Euler, D'Alembert y Bernoulli encontraron soluciones a este problema en términos de funciones llamadas «arbitrarias» o de series infinitas de funciones trigonométricas, mientras que Lagrange, por su parte, introdujo una innovación al fundamentar el concepto de función sobre la serie de potencias. Evidentemente estos matemáticos no llegaron a una definición comúnmente aceptable ni a resolver el problema del tipo de funciones representables mediante series trigonométricas. Es a Fourier a quien corresponde el honor de haber ampliado el campo de estudio del concepto de función.

FOURIER Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768–1830), hijo de un sastre de Auxerre, nace el 21 de marzo de 1768. Fourier es alumno de la escuela militar de esa ciudad, y a continuación se orienta hacia el estado eclesiástico y toma el hábito de novicio en la abadía benedictina de Saint-Benoit-sur-Loire. Pero la Revolución le aleja de allí antes de haber hecho los votos, y sus dotes excepcionales le lanzan a una carrera científica. Bonaparte le lleva a Egipto, y es él quien redacta la introducción general a la publicación de los trabajos del Instituto de Egipto. Es uno de los primeros miembros del cuerpo de profesores a raíz de la fundación de la Escuela Politécnica, a su vuelta a Egipto; permanece en la administración—, en 1802, es nombrado prefecto de Isere. Su carrera se ve trastornada, desgraciadamente, por la caída del imperio. Dimite de su puesto de prefecto en 1814 y se une a los Borbones, pero a la vuelta de Napoleón de la isla de Elba, Fourier no sabe muy bien qué hacer y decide huir. Napoleón no se lo toma en cuenta, y durante los Cien Días le nombra prefecto del Rhone y conde. En 1815, Louis XVIII le desposee de todo cargo, y en el momento de su primera elección a la Academia de Ciencias, en 1816, el rey se niega a aprobar su nombramiento. Reelegido al año siguiente, Fourier recibe la aprobación del rey y entra en la Academia, donde, gracias al valor de sus trabajos, llegará a ser secretario perpetuo de la Academia de Ciencias y miembro de la Academia francesa. Los últimos años de su vida estuvieron enteramente consagrados a la ciencia y a sus trabajos de académico. Murió en París el 16 de mayo de 1830, a los sesenta y

dos años.



La obra de Fourier puede considerarse como la primera realmente típica de la física matemática. Atraído por un problema ampliamente discutido en su época, la propagación del calor, Fourier recogió sus estudios en una primera memoria presentada a la Academia de Ciencias en 1807. Lagrange, Laplace y Legendre, designados para juzgar el valor de la memoria, criticaron severamente el ensayo a causa de su imprecisión, y la memoria fue, por tanto, rechazada. Pero la Academia quiso estimular a Fourier a proseguir sus estudios instituyendo, como tema del gran premio para el año 1812, precisamente el de la propagación del calor. En 1811, Fourier presentó de nuevo una memoria revisada y corregida, y ganó el gran premio, pero los jueces, entre los que se encontraban los de 1807, formularon una vez más críticas a causa de su falta de rigor, lo que le impidió ver su memoria publicada por la Academia. Profundamente herido por la forma en que había sido tratado, Fourier no dejó por ello sus trabajos y, en una importante obra, la Teoría analítica del calor (1822), establece la teoría matemática de las leyes de propagación del calor, que comprende las ideas fundamentales de Fourier sobre las series que llevan su nombre. Subrayemos que dos años después de la publicación de este libro, Fourier se convierte en secretario de la Academia y hace que la Academia publique íntegramente su memoria de 1811.

Bajo ciertas condiciones, la temperatura v de una placa sólida cuyo espesor es despreciable, es una función de x , y y t . Fourier demostró, sobre la base de principios físicos, que v debe satisfacer la ley de propagación dada por la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

donde K/CD es una constante que depende de la naturaleza del sólido. En particular, a temperatura constante (con el tiempo), la ecuación se convierte en la que hay que añadir condiciones en el contorno. Para resolver este problema, Fourier hace $v = F(x)f(y)$, y por el método de separación de variables obtiene a partir de la ecuación a)

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0$$

Suponiendo que $F''(x)/F(x) = m$ y que $f''(y)/f(y) = -m$ (donde m es una constante) obtiene las soluciones de v en términos de $v(x, y) = e^{-mx} \cos my$. En virtud de las condiciones en el contorno, el parámetro m debe ser positivo, impar y entero. Por superposición, Fourier obtiene un valor más general de v que es $v(x, y) = a \cos x + b e^{-3x} \cos 3y + c e^{-5x} \cos 5y + \dots$. Otra condición de contorno impone que $v(0, y) = 1$, de donde se deduce que la ecuación b) debe satisfacer $1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \dots$ donde los coeficientes $a, b, c, d, \dots$, cuyo número es infinito, están determinados, según Fourier, por esta identidad. Es precisamente el cálculo de los coeficientes de la ecuación c) lo que marca el comienzo del tratamiento de las series trigonométricas por Fourier. Después de haber efectuado de una manera algo dudosa las diferenciaciones término a término, se sirve de la ortogonalidad y de la integración por partes para demostrar que $1/4 = \cos y - 1/3 \cos 3y + 1/5 \cos 5y - 1/7 \cos 7y + \dots$. Fourier subraya que la función es periódica de período 2π por otra parte, demostrar este resultado. Un poco más adelante en su texto, demuestra que la serie de d converge hacia $1/4$ y obtiene también series para $x/2$ y $\log(2 \cos x/2)$. A continuación, Fourier demuestra que toda función periódica par ($f(x) = f(-x)$) o impar ($f(x) = -f(-x)$) puede ser desarrollada en series de senos o cosenos, respectivamente. Finalmente, Fourier trata de generalizar el problema: dada una función arbitraria $f(x)$, encontrar los coeficientes a_n y b_n tales que la ecuación

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt$$

donde

Y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

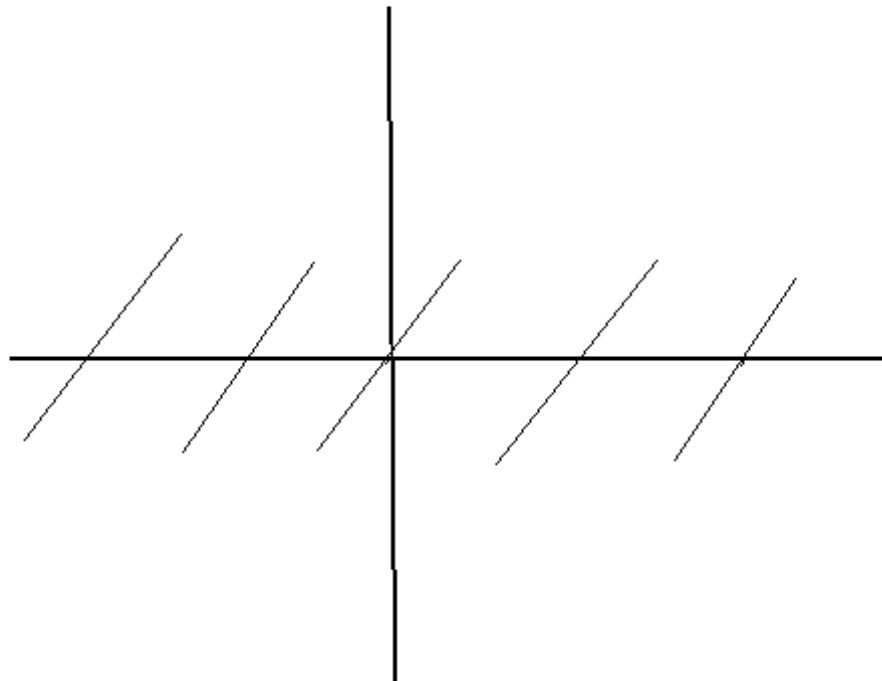
sea una identidad sobre un intervalo dado del eje de las x . Es así como obtiene la fórmula integral de los coeficientes a_n y b_n (obtenidos anteriormente por Clairaut y Euler para funciones específicas), de una manera algo larga y tortuosa y que adolece de una cierta falta de rigor. Sin embargo, su Tratado contiene resultados de una importancia indiscutible para el desarrollo futuro de las matemáticas.

$$0 \leq x < 2\pi$$

$$x \leq 0 < x < 2\pi$$

Su principal contribución fue la idea, esbozada por Daniel Bernoulli, de que toda función $f(x)$ puede ser representada por una serie de Fourier. Aunque no se encuentra en su tratado una demostración completa de este enunciado, Fourier parecía muy convencido de la veracidad de esta proposición, pues reposaba, según él, en una evidencia geométrica que traduce la «función arbitraria» por la expresión «función trazada arbitrariamente». Esta idea, excesivamente amplia, de función arbitraria tiene sin embargo el gran mérito de haber provocado un replanteamiento del concepto mismo de función. En efecto, sea, por ejemplo, $f(x) = x$ la función definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$, que se representa mediante la serie de Fourier de senos $f(x) = 2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots$ en cada intervalo de longitud 2π , se representa mediante el gráfico

siguiente



Una función semejante no puede representarse mediante una expresión analítica finita, mientras que los predecesores de Fourier insistían en que una función debía ser representable mediante una sola expresión analítica. Además, Fourier afirma que sus series pueden representar funciones que tienen diferentes expresiones analíticas en diferentes partes de un intervalo dado $(- ,)$. Por ejemplo, la función siguiente posee un desarrollo en serie de Fourier en el que

$$a_0 = \frac{\pi}{2}; a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}; b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

y la gráfica es la siguiente:

Fourier añade también que las expresiones diferentes para cada parte de un intervalo dado pueden corresponder a una gráfica compuesta de curvas juntas o disjuntas en ese intervalo. Además, Fourier considera que sus trabajos sobre las series trigonométricas demuestran de una vez por todas que la solución de Daniel Bernoulli es la única aceptable en el tema del problema de la cuerda vibrante. Los trabajos de Fourier muestran también que se puede representar una función en un intervalo completo, mientras que la serie de Taylor representa una función solamente en un entorno de un punto para el cual la función es analítica. Además, hacen más aceptables las representaciones de funciones efectuadas por Euler y Laplace por medio de las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre, y muestran cómo se puede resolver una ecuación

diferencial teniendo en cuenta las condiciones en los límites impuestas a la solución de la ecuación. Finalmente, Fourier, Cauchy y Poisson Obtuvieron' aproximadamente en la misma época, las integrales dobles' llamadas «integrales de Fourier» para representar funciones arbitrarias y para resolver diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

RIEMANN Bernhard Riemann (1826–1866), nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, Hannóver, en una familia pobre pero feliz. Su padre, pastor luterano, se ocupó personalmente de instruirle en historia, aritmética y geometría, y completó su primera educación. Más tarde, a los catorce años, comenzó sus estudios secundarios, y su timidez acentuada constituyó para él una fuente de numerosos sinsabores. Durante sus estudios en el colegio, Riemann demostró ya un talento natural y prodigioso para las matemáticas. En 1846, entra en la Universidad de Gotinga como estudiante de filosofía y teología. En esta época, Riemann quería ser pastor como su padre, pero su interés por los cursos de matemáticas de Gauss le llevó a seguir la carrera de matemático, con el consentimiento de su padre. Después de un año en Gotinga fue a Berlín, en donde fue alumno de Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein. Volvió a Gotinga para redactar su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss. En 1851 presentó la tesis, titulada *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse* (Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja), que cambió completamente la teoría de funciones de variables complejas y en la que introdujo las célebres superficies que llevan su nombre. Después de haber ocupado diversos puestos de enseñanza en la Universidad, fue nombrado profesor extraordinario en 1857, y sucedió a Dirichlet en 1859 en la cátedra de matemáticas de Gotinga. En 1862, aproximadamente un mes después de su matrimonio con Elise Kich, cayó gravemente enfermo y el gobierno alemán le concedió fondos para proseguir su convalecencia en Italia, esperando que el clima más clemente le permitiera recuperarse completamente.



Interrumpida por viajes a Gotinga, su estancia en Italia no le permitió curarse, y murió el 20 de julio de 1866 en Selasca, cuando sólo tenía treinta y nueve años. Hemos visto que Bolzano separó, en 1834, el concepto de continuidad del de derivabilidad, y que ilustró esta separación mediante una función continua en un intervalo cerrado que no es derivable en ningún punto de ese intervalo. Dado que los trabajos de Bolzano no fueron conocidos hasta finales del siglo xix, se debe a Riemann la primera distinción neta entre la continuidad y la diferenciabilidad, la cual será formulada en una memoria de 1854 escrita como mérito para el puesto de Privatdozent en Gotinga. En esta memoria, consagrada a la posibilidad de representar una función mediante una serie trigonométrica, Riemann presenta una función definida como sigue. Sea (x) una función que denota la diferencia entre x y el entero más próximo, y sea $(x) = 0$ si x está a mitad de camino entre dos enteros. Entonces $-1/2 < (x) < 1/2$

Sea ahora $f(x)$ definida mediante

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \dots = \frac{(nx)}{n^2}$$

La serie converge para todo valor de x . Sin embargo, para $x = p/2n$ donde p es un entero primo con n , $f(x)$ es discontinua, con un salto cuyo valor es $1/8n^2$. Para cualquier otro valor de x , $f(x)$ es continua. Además $f(x)$ es discontinua un número infinito de veces en cualquier subintervalo. Por otra parte, $f(x)$ es integrable y $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$. Este ejemplo de función continua pero no diferenciable no fue publicado hasta 1868, algunos años antes de la función patológica que presentó Weierstrass. En esta misma memoria, Riemann se dio cuenta de que debía reconsiderar la noción de integral definida formulada por Cauchy, con el fin de hacer progresar la utilización de las series de Fourier para representar funciones cada vez más irregulares e incluso patológicas. En lugar de postular la continuidad puntual para el integrando como había hecho Cauchy, Riemann busca funciones más generales y determina las restricciones necesarias para las que pueden existir las integrales de esas funciones. De esa manera llega a la generalización del concepto de integral que engloba las funciones $f(x)$ definidas y acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Subdivide este intervalo en subintervalos $x_1 = a, x_2 = a_1, \dots, x_n = b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n D_i = \{D_1 + \dots + D_n\}$$

$$S_n = \Delta x_1 f(a + \xi_1) + \dots + \Delta x_n f(x_{n-1} + \xi_n)$$

y a continuación define la oscilación de $f(x)$ sobre Δx_i como la diferencia entre el valor mayor y menor de $f(x)$ en Δx_i . Hagamos donde $0 < \epsilon_i$ para todo i . Si S_n se aproxima a un límite fijo, A , cuando todos los Δx_i tienden a ceros independientemente de la elección de los ξ_i y de los ϵ_i , entonces A es el valor de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$. La definición habitual de la integral definida en un intervalos en términos de sumas superiores y sumas inferiores se conoce generalmente bajo el nombre de Riemann pues fue él el primero en dar esta definición en su memoria de 1854 a propósito de la condición necesaria y suficiente para que una función acotada $f(x)$ sea integrable en $[a, b]$. Riemann la formula como sigue:

$$S = M_1 \Delta x_1 + \dots + M_n \Delta x_n$$

$$s = m_1 \Delta x_1 + \dots + m_n \Delta x_n$$

donde M_i y m_i son los valores maximales y minimales, respectivamente, de $f(x)$ en Δx_i . Hace entonces $D_i = M_i - m_i$ y enuncia que la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ existe sólo si para todos los ϵ que cubren enteramente el intervalo $[a, b]$.

Riemann estudió durante algún tiempo bajo la dirección de Dirichlet en Berlín, y este último se interesó mucho por los trabajos de Riemann. En particular, Riemann estudió con gran interés las series de Fourier, quizá a partir de los trabajos de su maestro, Dirichlet, sobre esas series. Este último, recordémoslo, fue el primero en enunciar un conjunto de condiciones suficientes para que la serie de Fourier que representa una función $f(x)$ converja y lo haga a $f(x)$. La demostración de Dirichlet es un refinamiento de la que esbozó Fourier en la última sección de su Teoría analítica del calor. Las condiciones de convergencia de Dirichlet son las siguientes: 1. que $f(x)$ sea uniforme y acotada; 2. que $f(x)$ sea continua a trozos y no acepte más que un número finito de discontinuidades en el periodo 2π ; 3. que $f(x)$ sea monótona a trozos y no acepte más que un número finito de máximos y mínimos en un periodo. Sabemos que una serie de Fourier no converge siempre hacia la función $f(x)$ de la que se obtiene la serie, pero Dirichlet demostró que, para todo valor de x , la suma de la serie es $f(x)$ con tal que la función sea continua para todo valor de x , y que en los puntos de discontinuidad la serie converge hacia la media aritmética del límite a la izquierda y el límite a la derecha de la función, es decir, hacia $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$. Riemann emprende sus trabajos sobre el tema en 1854 en su *Habilitations-schrift* (Memoria de habilitación) en Gotinga, y los prosigue en una obra que trata Sobre la posibilidad de representar una función mediante una serie trigonométrica, sin hacer ninguna suposición sobre la naturaleza de la función. Riemann procede a la demostración del teorema fundamental dividiendo la serie trigonométrica en dos partes: Partiendo de

$$a_n \sin nx + \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

$$\frac{1}{2}b_0 = A_0, a_n \operatorname{senn}x + b_n \cos nx = A_n$$

hace

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

a continuación forma la serie y llama Q a la suma y $f(x)$ a su valor, donde $f(x)$ estará determinada solamente para los valores de x para los cuales la serie converge. Es necesario que $A_n \neq 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para asegurar la convergencia. Si los coeficientes a_n y b_n tienden a cero, los términos de la serie tienden a cero para todo x . Riemann demuestra, pues, que si $f(x)$ es acotada e integrable en $[-\pi, \pi]$ entonces los coeficientes a_n y b_n tienden a cero cuando n tiende a infinito; es el teorema fundamental. Subrayemos aquí un problema aún no resuelto: determinar las condiciones necesarias y suficientes de $f(x)$ para que su serie de Fourier converja hacia $f(x)$. Se encuentran también en su última obra otros teoremas importantes sobre las series de Fourier: $f(x)$ puede ser integrable sin ser necesariamente representable mediante una serie de Fourier; hay funciones no integrables para las cuales las series trigonométricas Q convergen para un número infinito de valores de x , tomados entre dos límites próximos cualesquiera; una serie trigonométrica puede converger para un número infinito de valores de x en un intervalo arbitrariamente pequeño incluso si a_n y b_n no tienden a cero para todo x . Riemann se significó en muchas otras ramas de las matemáticas, en particular en la teoría de números, demostrando la importancia de la función dada en la teoría aritmética de los números primos; en ecuaciones diferenciales, proponiendo un nuevo método para resolver el problema de valores iniciales de la ecuación de ondas; en geometría diferencial, con la introducción de la noción de superficie de Riemann (formada de planos superpuestos, en número igual al grado de una ecuación algebraica, y ligados por líneas de paso) que transforma una función no uniforme en una función uniforme sobre la superficie en oposición al plano Z . Sus trabajos sobre las relaciones entre la teoría de funciones y la teoría de superficies han conducido al estudio de problemas de naturaleza topológica. Subrayemos también sus importantes trabajos en geometría, que serán analizados en un capítulo posterior al presentar los trabajos fundamentales de geometría del siglo XIX. Los trabajos de Riemann cambiaron completamente la teoría de funciones de variables complejas, y aportaron puntos de vista nuevos sobre la teoría de las integrales elípticas, además de sus memorias sobre el calor, la luz, la teoría de los gases, el magnetismo, la dinámica de fluidos y la acústica. Riemann consideraba que sus investigaciones sobre las leyes de la física eran las que más le interesaban. Como matemático, se sirvió libremente de la intuición geométrica y de argumentos físicos.

WEIERSTRASS Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815–1897) nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Westfalia, en una familia católica pero liberal. Karl era el mayor de una familia que contaba además con otro hijo y dos hijas, pero ninguno de ellos se casaría, probablemente a causa de la actitud dominadora de su padre. Después de brillantes estudios secundarios, entró en la Universidad de Bonn como estudiante de Derecho, pero sus múltiples actividades le impidieron completar sus estudios universitarios. Se dedicó a las matemáticas sólo a partir de 1838, pero no llegó a terminar sus estudios de doctorado. Karl se orientó más bien hacia la enseñanza, y de 1841 a 1854 fue profesor en un colegio privado. Después de haber debutado como maestro en Munster, y luego en DeutschDrone y Brannenberg, fue nombrado profesor en 1856 en el Instituto Profesional de Berlín, sobre todo gracias a algunos resultados que fueron publicados en un período durante el cual no mantuvo prácticamente ningún contacto con los matemáticos de su tiempo, excepto con Christophe Guderman (1798–1851) que estaba interesado particularmente en la representación de funciones mediante series de potencias. Encargado de curso en 1856 en la Universidad de Berlín, Karl se convirtió en profesor titular de esta universidad a partir de 1863. Permaneció en su puesto hasta su muerte, a los ochenta y dos años, el 19 de febrero de 1897. Metódico y cuidadoso, Weierstrass intentó fundamentar las matemáticas, y en particular el análisis, con el máximo de rigor posible más que recurrir a la intuición. Al haber publicado muy poco, se dio a conocer por sus enseñanzas en la universidad. Su influencia se hizo sentir a través de las publicaciones matemáticas de sus numerosos discípulos, y en el Congreso Internacional de París, en 1900, Hermite dirá de él: «Weierstrass es el maestro de todos nosotros». Los trabajos de Weierstrass sobre la aritmetización del análisis completaron los de Bolzano, Abel y Cauchy, y serían conocidos sólo a partir de 1859 por sus enseñanzas en la Universidad de Berlín. La expresión «una variable se aproxima a un límite» que se encuentra en las definiciones de Cauchy y

Bolzano sugiere implícitamente el tiempo y el movimiento. Weierstrass, por su parte, resalta el concepto aritmético e interpreta sencillamente una variable como «una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado», eliminando así la idea de movimiento. Una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuidos a la variable y ϵ es un número positivo cualquiera, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.



La primera definición de límite de una función en términos de ϵ y δ propuesta por Weierstrass puede encontrarse, según parece, en su curso de cálculo diferencial impartido en 1861. La formulación de Weierstrass precisa la expresión vaga «llega a ser y sigue siendo tan pequeña como cualquier cantidad dada». que puede encontrarse en las definiciones de Cauchy y Bolzano, en estos términos: Si es posible determinar una cota δ tal que para todo valor de h , más pequeño en valor absoluto que δ , $f(x + h) - f(x)$ sea más pequeña que una cantidad ϵ tan pequeña como se quiera, entonces se dirá que se ha hecho corresponder a una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función.

$$\left| S - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right| < \epsilon$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(d^n x \pi)$$

La definición de la continuidad de una función propuesta por Weierstrass proviene de una simplificación de un teorema demostrado anteriormente por Dirichlet. Equivalente a las de Bolzano y Cauchy, esta definición tiene el mérito de ser más precisa y menos ambigua: $f(x)$ es continua en $x = x_0$, si para un número positivo arbitrariamente pequeño ϵ , es posible encontrar un «entorno» de x_0 de amplitud δ tal que para todos los valores en ese entorno la diferencia $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Weierstrass extiende la continuidad de la función en un intervalo mostrando que es continua en cada punto de ese intervalo. Después de 1861 Weierstrass se planteó la cuestión de la construcción de una función continua que no es derivable en ningún punto. La célebre función de Weierstrass fue comunicada en una carta de 1874 a Du Bois-Reymond. Fue a partir de esta correspondencia cuando los matemáticos se plantearon un nuevo y completo examen de los fundamentos del análisis (las funciones de Bolzano y Riemann, aunque encontradas anteriormente, no habían llamado la atención de los matemáticos). Su función se define como sigue: donde x es una variable real, a un entero impar mayor que 1, b una constante positiva menor que 1, y $ab > 1 + 3/2$. La serie es uniformemente convergente y define así una función continua. Esta función continua pero no derivable en ningún punto precipitó la crisis que engendró la construcción del sistema de los números reales. Ya en el siglo XIX este género de funciones suscitaba la indignación de los matemáticos, y Hermite decía: «Me alejo con espanto y

horror de esta plaga lamentable de funciones continuas que no tienen derivada.» Una parte importante del curso de 1861 fue el estudio de la derivación de las series infinitas, en el que Weierstrass introdujo la noción de convergencia uniforme. Aunque esta noción fuera reconocida y en 1848 por el físico matemático G. G. Stokes (1819–1903), cuyo nombre ha quedado unido a un importante teorema que transforma una integral de superficie en una integral simple, y por P. L. Seidel (1821–1896), ni uno ni otro dieron una formulación precisa como la de Weierstrass. Sabemos que la convergencia uniforme exige que, dado un ε cualquiera, exista un N tal que para todo $n > N$, para todo x en el intervalo considerado, donde S es la suma de la serie. Weierstrass utilizó esta noción de convergencia uniforme para demostrar que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y también para demostrar los teoremas de derivación e integración término a término de una serie de funciones. Weierstrass se distinguió en numerosas ramas de las matemáticas: fue el primero que utilizó ampliamente las series de potencias para representar funciones en dominios diferentes; sus estudios sobre las funciones elípticas expresadas como cocientes de series de potencias le condujeron a completar y remodelar la teoría de estas funciones; sus trabajos referentes al cálculo de variaciones engendraron un nuevo interés y estimularon las actividades de matemáticas dedicados a esta disciplina. Weierstrass se ocupó igualmente de las álgebras de dimensión finita, de las integrales abelianas y de la geometría algebraica. Finalmente, sus estudios sobre los fundamentos de la aritmética y su teoría de los números reales, como veremos más adelante, marcaron profundamente el desarrollo de los fundamentos lógicos de las matemáticas.

Creación de los números reales La fundación lógica del sistema de los números reales no fue realizada hasta finales del siglo XIX, lo que aparece como uno de los hechos más sorprendentes de la historia de las matemáticas. El concepto de número aparece muy pronto en la historia de la humanidad, y ciertos factores nos permiten pensar que el hombre primitivo poseía ya una vaga idea del concepto de número. Gradualmente, el hombre aprendió a servirse de él para sus necesidades prácticas y utilitarias, y ya en la época de los griegos el número se había convertido en un objeto que podía ser estudiado por sí mismo. A través de los siglos, se constituyó un álgebra en la que las operaciones estaban de alguna manera ligadas a la veracidad de las soluciones obtenidas. Así, de una manera lenta y progresiva, los conceptos de números natural, cero, número negativo, fracción, números racional e irracional y número complejo emergen tímidamente a la superficie, pero la propia existencia de esos números reposa esencialmente sobre consideraciones de naturaleza geométrica o algebraica. A mediados del siglo XIX los matemáticos se contentaban con una comprensión intuitiva de esos números, y la mayoría de ellos parecían satisfechos operando sobre esta base más concreta que lógica. No es sorprendente, pues, constatar cómo las sencillas propiedades de los números racionales positivos y negativos no son establecidas lógicamente, e incluso ni siquiera definidas antes del siglo XIX, lo que constituye una prueba de que el desarrollo de las matemáticas no progresa siempre de manera lógica. La introducción del rigor en el análisis puso de manifiesto la falta de claridad y la imprecisión del sistema de los números reales. El estudio más preciso de los límites demostró la necesidad de llegar a una comprensión lógica de los números, y en particular del hecho de que una sucesión de números racionales puede tener como límite un número irracional e inversamente. Los trabajos de Cauchy sobre la convergencia de las series infinitas, el teorema de la media demostrado por Bolzano y el estudio de las funciones discontinuas representables mediante series de Fourier revelaron esta misma laguna, que exigía una estructuración lógica de los números sobre bases esencialmente aritméticas. Antes de abordar el desarrollo del sistema de los números reales a través de las teorías de los números racionales e irracionales, hay que hacer un breve resumen histórico de los trabajos sobre los números algebraicos y trascendentes.

Números algebraicos y trascendentes La distinción entre los números irracionales algebraicos y los números Irracionales trascendentes apareció en el siglo XVIII, en la época en que Euler demostró sustancialmente que e y e^2 son irracionales y en que Lambert demostró que $\ln 2$ es irracional. Los trabajos de Legendre sobre la hipótesis de que $\ln 2$ podía no ser una raíz de una ecuación algebraica con coeficientes racionales señalaron el camino hacia la existencia de números irracionales de diferentes tipos. Por ejemplo, toda raíz de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales es llamada «número algebraico», mientras que todo número que no sea algebraico es llamado trascendente. Recordemos que Euler reconocía la distinción entre estos dos géneros de irracionales ya en 1744. Habrá que esperar casi un siglo antes de que se establezca claramente la existencia de los irracionales trascendentes, sobre todo gracias a los trabajos de Liouville Hermite y Lindemann.

LILOUVILLE Joseph Liouville (1809–1882) nació en Saint-Omer en 1809 e hizo estudios de ingeniero, figurando entre los mejores discípulos de Cauchy. Enseñó matemáticas en las grandes escuelas y en

la Facultad de Ciencias de París. Liouville fundó en 1836 el *Journal de Mathématiques Pures y Appliquées*, que se conoce actualmente bajo el nombre de *Journal de Liouville*, el cual sustituyó a los *Annales de Gergonne*, ya desaparecidos en esa época. Aunque su nombre no vaya unido a ningún descubrimiento realmente fundamental, escribió sobre aritmética, geometría y física, y se distinguió particularmente como analista. En efecto, un teorema de análisis lleva su nombre: si $f(z)$, una función analítica entera de una variable compleja z , está acotada en el plano complejo, entonces $f(z)$ es constante. El teorema fundamental del álgebra puede ser considerado como un corolario del teorema de Liouville. Se le deben también estudios sobre las propiedades generales de las funciones monógenas (analíticas) y la primera teoría completa de las funciones elípticas consideradas como casos particulares de las funciones de una variable imaginaria. En 1844 Liouville mostró que todo número de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \dots$$

donde las a_i son enteros cualesquiera tales que $0 < a_i < 10$ es un número trascendente. Por ejemplo, el número 0,10010001... es un número trascendente así como todos los números de la forma particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Liouville demostró que si p/q es una aproximación de un número irracional algebraico x de grado n , con p y q enteros, entonces existe un número positivo M tal que $|x - p/q| > M/q^n$. Pudo demostrar así, mediante la teoría de las fracciones continuas, que $\sqrt{e}$ y e^2 podían ser la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. La siguiente etapa importante será la demostración de la trascendencia de e por Hermite.



HERMITE Charles Hermite (1822–1901), nació en Dieuze en 1822. Fue diplomado de la Escuela Politécnica, donde más tarde ocupará un puesto de profesor, así como en la Facultad de Ciencias de París y en el Colegio de Francia. Durante toda su vida, consagrada a las matemáticas puras, Hermite no cesará de perfeccionar la teoría de las funciones elípticas. En particular, Hermite encontró una fórmula de descomposición en elementos simples que lleva su nombre y que permite la integración de toda función elíptica. Además, descubrió la relación que existe entre las funciones elípticas y la aritmética superior, y demostró que estas mismas funciones permiten integrar la ecuación diferencial llamada de Lamé. Llegó incluso a encontrar una solución de la ecuación general de quinto grado, que se encuentra publicada en los

Nouvelles Annales de Mathématiques, mediante esta teoría de funciones. Finalmente, su nombre ha quedado unido a las formas llamadas herméticas, para la representación de los enteros reales o complejos (en las matrices, por ejemplo), así como a ciertos polinomios que se obtienen resolviendo un tipo de ecuaciones diferenciales mediante series. **Trascendencia de e y** En una memoria sobre la función exponencial publicada en los *Comptes rendus* de la Academia en 1873, Hermite demostró que el número e no podía ser raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, es decir, que e es un número trascendente. La demostración de Hermite es muy sofisticada y requiere un conocimiento profundo de las matemáticas; sin embargo, consiste esencialmente en demostrar que la ecuación $C_0 + C_1e + C_2e^2 + \dots + C_n e^n = 0$ donde e, que es el número de Euler, no puede existir. En la última parte de su memoria, Hermite aplica su método de demostración para obtener aproximaciones tales como $e = 5282494/21444$ y $e^2 = 158452/21444$. La trascendencia del número e será demostrada ulteriormente por Ferdinand Lindemann (1852–1939) en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* en 1882, bajo el título de *Über die Zahl* (Sobre el número). Siguiendo un método semejante al de Hermite, Lindemann demuestra que el número e no puede satisfacer idénticamente la ecuación (1)

$$C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2} + \dots + C_n e^{x_n} = 0$$

donde los x_i son números algebraicos distintos, reales o complejos, y los C_i son números algebraicos que no son todos nulos. Primero, demuestra que la ecuación $e^x + 1 = 0$ no tiene solución para un x algebraico. En efecto, hagamos en (1) $n = 2$, $C_1 = 1$ y $x_2 = 0$. Se constata que $e^{x_1} + 1 = 0$ no puede ser algebraico para un x_1 que sea algebraico diferente de cero. Como x , puede ser 1, e es trascendente. Así, sabiendo que $e^i + 1 = 0$ para $x = i$ no puede ser algebraico. Pero i es un número algebraico, por lo que e^i ha de ser un número trascendente, ya que el producto de dos números algebraicos es algebraico. Esta demostración de la trascendencia de e^i representa la respuesta definitiva al célebre problema de la cuadratura del círculo, porque esta cuadratura sería posible mediante la regla y el compás sólo si e^i fuera la raíz de una ecuación de segundo grado. Además, en virtud de este resultado, el número i puede ser la ordenada de una curva sólo si esta curva es trascendente, como por ejemplo, $y = e^x$, $y = \arcsen x$. Por tanto, la construcción de estas curvas trascendentes puede hacerse sólo mediante procedimientos o aparatos, como el integrador por ejemplo.

Subrayemos que la naturaleza enigmática de la constante de Euler permanece todavía sin resolver. Lindemann se interesó también por el último teorema de Fermat, y consagró varios años de esfuerzos a intentar demostrarlo, pero sin éxito. **TEORIA DE LOS NUMEROS IRRACIONALES** **HAMILTON** William Rowan Hamilton (1805–1865), nació el 3 de agosto de 1805 en Dublín, Irlanda. Era el menor de una familia de tres hijos y una hija. Su brillante inteligencia provenía probablemente de su madre y, por un cúmulo de circunstancias el joven William consagró una buena parte de su infancia a aprender lenguas, sin saber muy bien el porqué, bajo la dirección de un tío apasionado por la materia. Así, a los cinco años tan sólo, Hamilton podía leer el latín, el griego y el hebreo; tres años más tarde añadía a su bagaje lingüístico el italiano y el francés; a los diez años aprendió el árabe y el sánscrito y finalmente, a los catorce años, el persa. Su encuentro con el joven calculador americano Zerah Colburn le hizo abandonar provisionalmente el estudio de las lenguas para lanzarse al estudio de las matemáticas. En 1823 se encuentra en el *Trinity College* de Dublín y ya entonces presenta una memoria sobre las caústicas que será leída en 1824 en la Academia Real de Irlanda. Corregida y aumentada, esta memoria será presentada de nuevo a la misma Academia en 1827 con el título de *A theory of systems of rays* (Una teoría de los sistemas de rayos), que erigía la óptica geométrica en un verdadero cuerpo de doctrina e introducía las funciones características de la óptica. En 1830 y 1832, Hamilton publicó tres suplementos a esta célebre memoria. Mientras tanto, sucedió en 1827 a John Brinkley en la cátedra de astronomía del *Trinity College*, donde destacó como profesor. Es conocido sobre todo por su teoría de los cuaterniones, que será objeto de estudio en el próximo capítulo, pero Hamilton se distinguió también en muchos otros campos: estudio de la dinámica sirviéndose de sus célebres funciones características; secciones cónicas, a las que dedicó varias memorias, así como a la resolución de la ecuación de quinto grado y al primer tratamiento sistemático de los números irracionales.

Trabajos de Hamilton sobre los números irracionales En dos memorias leídas ante la Academia Real de Irlanda en 1833 y 1835 respectivamente, y que serían publicadas con el título de *Algebra as the science of pure times*. . . (El álgebra como la ciencia del tiempo puro...), Hamilton escoge el tiempo como el concepto

fundamental del que deduce la noción de unidad. Citado por Manheim, escribe: La idea de la continuidad de la progresión de un momento a otro en el tiempo engloba la idea de una progresión continua de manera semejante en las cantidades [...] Prosiguiendo esta sucesión de ideas, nos vemos obligados a concebir [...] la existencia de un número determinado o de una razón a que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón b. Influenciado por el pensamiento de Newton, Hamilton fundamenta su teoría del álgebra sobre el concepto de tiempo, base tuitiva insatisfactoria para erigir los números en sistemas, ya que cree necesario recurrir al universo físico para justificar ante sus contemporáneos esas nociones abstractas. Partiendo de los enteros positivos y de sus conocidas propiedades elementales, considera una serie equidistante de momentos.. E"E'EABB'B"...donde cada letra representa un instante o un momento de tiempo tal que los intervalos de tiempo entre dos momentos sucesivos son todos iguales unos con respecto a otros. El momento cero, denotado con A es el patrón y todos los demás deben compararse con el, mientras que B recibe el nombre de «el primer momento positivo». El operador a permite pasar de un momento a otro cuando se coloca a la derecha, de la manera siguiente $B = a + A$, $B' = a + B = 2a + A$, ... A continuación, Hamilton introduce los ordinales, $\sim$, 0, 1, 2, 3, ... donde $\sim = -1$, de forma que sea posible representar la serie de las etapas formadas a partir del momento cero como sigue... 3 a, 2 a, 1 a, 0a; la, 2a, 3a, .donde $3a = -3a = E'' = -3a + A$ Si $\sim$, $\sim$, $\sim$ son los ordinales de esta serie, Hamilton demuestra a su manera propiedades tales como $+ = +$, $\sim = \sim$, $\sim = 1$, y la asociatividad y distributividad. Introduce las fracciones racionales de manera semejante y afirma, en particular, que el símbolo fraccionario $1/0$ denota un acto imposible. Después de esta presentación de los números racionales, Hamilton sugiere la idea de la partición de los racionales en dos clases (cortadura de Dedekind) y define un número irracional como el representante de tal partición. Hamilton asegura que existe un conjunto infinito de números entre dos números racionales. Si A y B son dos conjuntos infinitos de numeras talos que cada elemento de A es inferior a todo elemento de B y además si los elementos de A y B están definidos en extensión puede ocurrir que no haya ningún número racional entre A y B. A partir de una intuición de la continuidad del tiempo Hamilton sugirió en esta etapa que esos conjuntos A y B podían servir para determinar los números irracionales. Partiendo de una media proporcional entre dos números positivos enuncia que si $a > n'/m'$ cuando $n'^2/m'^2 < b$ y si $a < n''/m''$ cuando $n''^2/m''^2 > b$ entonces $a = b$. Así la "b es una partición determinada por dos sucesiones luja y ovil con la propiedad de que

$$\mu_i^2 < b < \nu_j^2 \text{ donde } i, j = 1, 2, \dots$$

Hamilton no desarrolló más su teoría de los números irracionales y toda ella se basaba esencialmente en determinar los números irracionales mediante los números racionales. **MÉRAY** Charles Méray (1835–1911) matemático francés, nació en Chalonsur-Saone en 1835 y fue un apóstol de la aritmetización de las matemáticas. Encargado de curso en 1866 en la Facultad de Ciencias de Lyon y después profesor en la misma institución en 1867 Méray fue el primero en publicar un desarrollo aritmético de los sistemas de números. En 1869 publicó una memoria titulada *Remarques sur la natura des quantités définies par la condition de sentir de limite a des variables données* (Observaciones sobre la naturaleza de las cantidades definidas por la condición de servir de límites a variables dadas) en la *Revue des Sociétés Savantes*, en la que señala, en primer lugar algunas importantes lagunas en el razonamiento de los matemáticos desde la época de Cauchy y reconoce las dificultades con que tropezaron esos matemáticos. De hecho Méray pone de manifiesto el hecho que consiste en definir el número irracional como el límite de una sucesión de números racionales sin tener demasiado en cuenta que la existencia misma del límite presupone una definición de los numeras reales.

Méray emplea la palabra «número» para designar el número racional, y una cantidad es llamada «variable progresiva» si puede número infinito de valores sucesivos de un conjunto $\emptyset \neq \emptyset$; define a continuación la convergencia de la variable progresiva en términos $\emptyset n+p - n \emptyset ! 0$ con $1/n$, cualquiera que sea el valor asignado al límite Así existen dos tipos de sucesiones convergentes La primera verifica la condición de que existe un N tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un n tal que para todom " $n, \emptyset N - m \emptyset < ! \emptyset n+p - n \emptyset ! 0$ con $1/n$, y la segunda corresponde a la condición siguiente: el N definido anteriormente no existe y no tiene límite pero puede verificarse $\emptyset n+p - n \emptyset ! 0$ con $1/n$ Las sucesiones convergentes sin límite se llaman «límites ficticios» y términos de números Méray las llama «números ficticios». A continuación, Méray muestra cómo la ordenación de estos números ficticios puede ser referida al esquema de la ordenaron de los números, así como extiende todas las operaciones entre numeras racionales a estos números ficticios que nosotros

llamamos números irracionales. A título de ejemplo Méray explica la significación de " a cuando a no es un cuadrado. Según su teoría " a es el límite ficticio de toda variable progresiva cuyo cuadrado se aproxima a a , y si la variable v es tal que $i - v \neq 0$ se dice entonces que el límite ficticio de v es también " a ." **Weierstrass y su teoría de los números irracionales** Weierstrass intentó separar el cálculo diferencial e integral de la geometría y hacer reposar todo ese cálculo sobre el concepto de número. Para realizar este nuevo enfoque de la misma manera que Méray, se dio cuenta de que era necesario definir el número irracional independientemente del concepto de límite. Sus investigaciones sobre la aritmetización no fueron publicadas y por eso debemos basarnos sobre todo en las notas publicadas por sus alumnos (V. Dantscher A. Pringsheim y G. Mittag-Leffler) para extraer de ellas las ideas esenciales. Weierstrass define una «cantidad numérica» como un conjunto dado de elementos de los que se conoce el número de veces que cada elemento aparece en el conjunto. El número de elementos es finito o infinito, pero el número de veces que un elemento aparece en el conjunto es necesariamente finito. En el caso finito, el conjunto se dice finito, y es igual a la suma de los elementos. La igualdad de dos conjuntos finitos se obtiene cuando las sumas respectivas son iguales. Los enteros como 1, 2, ... se llaman «cantidades numéricas absolutas» mientras que las partes de un entero como por ejemplo $1/3$, son las fracciones. Una cantidad numérica absoluta a contiene un número racional absoluto r si un agregado parcial a igual a r puede ser sustraído de a . La cantidad numérica absoluta a se dice finita si existe un número racional p tal que todo número racional contenido en a es más pequeño que p . Dos cantidades numéricas absolutas finitas a y b serán iguales sólo si todo número racional contenido en a está también contenido en b . En el caso de que a contenga un número racional que no sea elemento de b , se dice que a es mayor que b . La suma de a y b es la cantidad numérica c definida como el conjunto cuyos elementos son aquellos que aparecen en a o en b , de manera que cada elemento de c sea igual al número de veces que un elemento a aparece en b . El producto de a y b se define como la cantidad numérica absoluta que se obtiene con los agregados cuyos elementos se obtienen formando de todas las maneras posibles los productos de cada elemento de a y cada elemento de b . Weierstrass extiende esta definición a la suma de un número finito de cantidades numéricas absolutas, de manera que cada cantidad de esta suma sea la suma de las componentes, y pasa a continuación a la suma de un número infinito de cantidades de una manera completamente análoga. En efecto, la suma de un número infinito de cantidades $a, b, c, \dots$ es la cantidad numérica absoluta s (agregado) cuyos elementos aparecen al menos en una de las $a, b, \dots$, de manera que cada uno de los elementos e está tomado un número de veces N_e igual al número de veces que aparece en a , más el número de veces que aparece en b , y así sucesivamente. Para asegurarse de que s es finita y determinada, es necesario que cada uno de sus componentes aparezca un número finito de veces en s . Además es también necesario y suficiente que se pueda asignar un número N tal que la suma de todo número finito de cantidades $a, b, c, \dots$, sea inferior a N . De estas definiciones se sigue que toda cantidad absoluta es la suma de los elementos de los que está compuesta. En la teoría de Weierstrass, los números irracionales son, pues, agregados de números racionales más que sucesiones ordenadas de números racionales, y esta teoría ofrece la inmensa ventaja de evitar el tener que recurrir de antemano a la existencia de límites. Cantor emprendió también algunos estudios con objeto de efectuar la aritmetización elaborando una teoría de los números irracionales que sería posteriormente modificada en parte por su alumno E. Heine (1826–1881).

CANTOR Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, en una familia de tres hijos. Su padre era un próspero comerciante de origen judío que se había convertido al protestantismo. Educado primero bajo la dirección de un tutor, frecuentó después la escuela elemental de su ciudad natal, donde mostró ya un interés marcado por el estudio de las matemáticas. Sin embargo, su padre deseaba que su hijo mayor hiciera la carrera de ingeniero militar y, después de realizar estudios secundarios en colegios privados de Francfort, en 1859 entra en la Escuela Politécnica de Darmstadt. Deja la escuela de ingeniería militar en 1862 para emprender estudios superiores en Zurich, que abandona en 1863 después de la muerte de su padre. En otoño de 1863, entra en la Universidad de Berlín, donde estudia matemáticas, física y filosofía Kummer, Weierstrass y Kronecker eran en aquél entonces los tres grandes matemáticos alemanes y, en particular, Kronecker estimuló vivamente a Cantor para que se interesara por la teoría de números. Sin embargo, será Weierstrass quien ejercerá, con mucho, la mayor influencia en la carrera científica del joven Cantor. En 1867 recibe el doctorado después de haber presentado una disertación sobre las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss y la Teoría de números de Legendre. A continuación comienza su carrera como profesor en la Universidad de Halle y publica sus primeros trabajos, todos consagrados a la teoría de números. En 1872 conoce en Suiza a Richard

Dedekind, y ese encuentro será el comienzo de una larga amistad entre estos dos célebres matemáticos. El año 1874 fue muy importante para Cantor, pues fue el año de su matrimonio con Vally Guttman, y el del nacimiento de la teoría de conjuntos, marcado por la publicación de un artículo en la revista de Crelle. El contenido de esa memoria fue considerado paradójico en esa época, y a medida que su teoría progresaba, se hacía más fuerte la oposición a la misma, en particular por parte de Kronecker. Cantor tenía, sin embargo, también defensores, entre los que se contaban Weierstrass y Dedekind. Desde 1879 hasta 1884 publicó prácticamente toda su teoría de conjuntos, y las numerosas dificultades con que tropezó Cantor durante ese período, como el retraso en la impresión de su tratado de 1878 y el movimiento de contestación dirigido por Kronecker, le afectaron de tal manera que cayó en una profunda depresión nerviosa durante el año 1884. Según parece, a la luz de los acontecimientos, la oposición constante de Kronecker a los trabajos de Cantor no se dirigía personalmente contra este último, sino más bien contra la naturaleza de los conceptos cantorianos, sobre la base de las convicciones científicas personales de Kronecker. La muerte del influyente Kronecker en 1891 y, al mismo tiempo, la amistad sincera de hombres influyentes como Mittag-Leffler, unida al afecto personal de Weierstrass, hicieron probablemente más tolerable la vida de Cantor. Después de 1891, los trabajos de Cantor comenzaron a ser justamente reconocidos y su persona recibió merecidos honores. Murió el 6 de enero de 1918 en una clínica psiquiátrica de Halle, después de asistir a las primeras manifestaciones de la considerable influencia que su teoría ejercería en el mundo de las matemáticas y constatar igualmente el justo reconocimiento general que tanto había deseado. Cantor se había interesado desde el comienzo de su carrera científica por los estudios en teoría de números; más tarde redactó un cierto número de memorias sobre las series trigonométricas. Fue este estudio de las series trigonométricas el que llevó a Cantor a la teoría de conjuntos de puntos y a los cardinales transfinitos. Además, en su décima memoria, publicada en 1872, Cantor presentó por primera vez su teoría de los números irracionales. Volveremos más tarde sobre su teoría de conjuntos, pero a continuación nos ocuparemos de su estudio de los números irracionales.

Teoría de los números irracionales de Cantor–Heine Uno de los problemas importantes de la época en el teína de las series trigonométricas consistía en establecer la unicidad del desarrollo trigonométrico a propósito de las series generales, es decir, aquellas cuyos coeficientes no tienen necesariamente la forma integral de Fourier. Desde 1870 a 1872, Cantor redactó cinco memorias sobre las series trigonométricas en las que prestó especial atención al teorema de unicidad, y en noviembre de 1871 añadió una extensión a ese teorema incorporándole la frase: la convergencia o la igualdad de la suma de la serie trigonométrica puede no verificarse en un agregado infinito de x en el intervalo $0 \dots 2$: sin que por ello el teorema deje de ser válido. Es entonces cuando Cantor intenta describir la estructura de tal agregado presentando aclaraciones sobre la naturaleza de las cantidades numéricas tanto finitas como infinitas. Heine sugirió algunas simplificaciones a la teoría de Cantor en una memoria publicada en la revista de Crelle, en 1872, bajo el título *Die Elemente der Funktionenlehre* (Los elementos de la teoría de funciones) y fue así como se convino en hablar de la teoría de Cantor–Heine, aunque el primero hubiera publicado en 1883 una memoria más detallada sobre la teoría de los números irracionales. Introducen una nueva clase de números, los números reales, que contiene los números racionales y los irracionales. La construcción de los números reales se efectúa sobre la base de los números racionales partiendo de una sucesión de números racionales $\{a_i\}$ que satisface la condición de que, para todo n dado, todos los miembros salvo un número finito difieren uno del otro de manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+r}) = 0$$

para un número r cualquiera. Esta sucesión, llamada «fundamental», es por definición un número real, mientras que una sucesión que verifique la propiedad se llama «elemental». Dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son iguales o representan el mismo número real sólo si la sucesión $\{a_i - b_i\}$ es elemental. A propósito de estas sucesiones elementales, Cantor–Heine definen la sucesión nula, la sucesión positiva y la negativa. Dado un número racional arbitrario, si los términos de la sucesión para un N suficientemente grande son todos inferiores en valor absoluto a ese número racional dado, entonces la sucesión se dice nula. La sucesión se dirá positiva si para un N suficientemente grande, todos los términos son superiores a un número racional positivo dado, mientras que si todos los términos son inferiores a un número racional negativo dado, la sucesión se dirá que es negativa. A cada sucesión fundamental $\{a_i\}$ cuyos términos son $a_1, a_2, \dots, a_n$ se asocian el símbolo A y, en

particular, si $a_i = a$ para todo i , el símbolo asociado a A es a . Esta elección del simbolismo permite así encastrar los números racionales en un nuevo conjunto, la sucesión fundamental. Por ejemplo, toda sucesión $\{a_i\}$ con $a_i = a$ para todo i donde a sea un número racional define el número racional a . Dadas dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{v_i\}$ representadas por A y V , puede demostrarse que $\{a_i + v_i\}$, $\{a_i \cdot v_i\}$ y $\{a_i / v_i\}$ (con $v_i \neq 0$) son sucesiones fundamentales. Esto define la suma $A + V$, el producto $A \cdot V$, y el cociente A/V ($V \neq 0$) de dos números reales. Asimismo, se define la igualdad y la desigualdad de la misma manera: $A = V$, $A > V$ o $A < V$ según sea $A - V$, igual, mayor o menor que cero. Definen a continuación el límite de una sucesión fundamental $\{a_i\}$ de la manera siguiente: si existe un número racional A tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - a_n) = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i - A) = 0$$

entonces A es el límite de $\{a_i\}$. Después muestran que si los términos de una sucesión fundamental tienen el límite racional A , entonces el símbolo A es también el asociado a la sucesión. Por ejemplo, las fracciones 0.1, 0.11, 0.111, ... tienen como límite $1/9$, y $1/9$ es el número asociado a la sucesión $\{0.1, 0.11, 0.111, \dots\}$. La extensión del concepto de límite a los números irracionales se efectuó de la manera siguiente: si A es un símbolo (racional o no) y si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{i+r} - a_i) = 0$$

entonces A es el límite de $\{a_i\}$. Con ello puede demostrar el teorema siguiente: si $\{a_i\}$ es una sucesión cualquiera de números reales (rationales o irracionales) y sea un r cualquiera, entonces existe un número real A único, determinado por la sucesión fundamental de los números a_i $\lim a_i = A$. Es así como, determinando el límite de una sucesión fundamental (o sucesión que satisface el criterio de convergencia de Cauchy) por medio de los números existentes, llegaron a demostrar que esos números reales forman un sistema completo. Bastaba entonces poner de manifiesto que los números irracionales se forman a partir de sucesiones fundamentales que no son racionales y demostrar que todas las sucesiones fundamentales no son necesariamente racionales.

DEDEKIND Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) nació el 6 de octubre de 1831 en Brunswick, Alemania. Se orientó desde muy pronto hacia las ciencias físicas. Fue probablemente el último alumno conocido de Gauss, quien fue su director de tesis hasta 1852, año en que Dedekind obtuvo su doctorado. Fue luego profesor en el Politécnico de Zurich, y después en la Escuela Técnica Superior de Brunswick. Amigo personal de Cantor, de personalidad muy original, profesó una gran simpatía hacia las ideas, muy discutibles en aquella época, de este último. Toda su carrera científica se desarrolló prácticamente en la sombra, y no le fue ofrecido ningún puesto importante de profesor. Murió el 12 de febrero de 1916, casi dos años antes que Cantor, sin conocer nunca la gloria. El nombre de Dedekind se ha hecho célebre por sus numerosas contribuciones originales en matemáticas. Subrayemos, entre otras, su teoría de los números algebraicos, que es una generalización de los enteros complejos de Gauss y de los números algebraicos de Kummer; su formulación abstracta de la noción de carácter de un grupo aplicada a los grupos abelianos y probablemente la primera definición abstracta de un grupo finito; su enfoque aritmético en el tratamiento de las curvas algebraicas, cuya idea central proviene de sus trabajos sobre los números algebraicos, su libro sobre la naturaleza y la representatividad de los números, donde se trata de conjuntos infinitos, etc.; su introducción de clases de números algebraicos llamados «ideales» en honor de Kummer. Sin embargo su celebridad se basa sobre todo en sus Ensayos sobre la teoría de números, publicados en 1872, que se ocupan del concepto de continuidad y los números irracionales.

Teoría de los números irracionales de Dedekind Encargado de curso de cálculo diferencial e integral en el Politécnico de Zurich en 1858, Dedekind se dio cuenta muy pronto de que la aritmética de los números reales no poseía un fundamento lógico adecuado. Más específicamente, se negaba a recurrir a la evidencia geométrica para demostrar el teorema siguiente: toda magnitud que crece de una manera continua pero no sin límite, debe ciertamente aproximarse a un valor límite. Desde un punto de vista didáctico encontraba útil el recurrir a la intuición geométrica con el fin de no perder demasiado tiempo, pero en ningún caso este recurso, según Dedekind, podía considerarse científico. Por eso se dedicó a meditar sobre la cuestión durante mucho tiempo pero no encontró un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso de los principios del análisis matemático. Dedekind estaba convencido además, de que

el concepto de continuidad no había sido bien definido todavía, y que el teorema enunciado más arriba constituía una base suficiente sobre la que fundamentar el análisis. Se dedicó pues, a encontrar el origen de este teorema en la aritmética y, al mismo tiempo, a dar una definición real de la esencia de la continuidad. Encontró lo que buscaba el 24 de noviembre de 1858. En varias ocasiones había querido escribir un libro sobre la continuidad y los números irracionales, pero su obra no será realizada hasta 1872. La memoria de Heine titulada *Los elementos de la teoría de funciones* que Dedekind recibió en el mes de marzo de 1872, le reafirmó en la resolución de escribir su libro. Antes de abordar el estudio de los números irracionales, Dedekind presupone el desarrollo de la aritmética de los números racionales, pero llama la atención sobre un cierto número de puntos que él juzga importantes, estableciendo una comparación entre los números racionales y los puntos de la recta numérica. A continuación presenta su estudio de la continuidad de la línea recta, haciendo notar, desde el comienzo, el hecho de que en una línea recta L existe una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional. Por consiguiente, la recta L es infinitamente más rica en puntos individuales que el dominio R de los números racionales en números individuales. Esto nos conduce, según dice, a completar R creando nuevos números de manera que el campo de los números adquiera la misma compleción o, como puede decirse, la misma continuidad que la línea recta. Insatisfecho con los métodos habituales para introducir los números irracionales, los cuales se basan directamente en la concepción de longitudes prolongadas, propone en su lugar «que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma» y el problema se reduce entonces a la determinación aritmética de la continuidad. Como intenta definir completamente los números irracionales sólo mediante los números racionales, y dado que la comparación del dominio R de los números racionales con la recta le lleva al reconocimiento de «agujeros», de una cierta discontinuidad de los números, Dedekind plantea así la cuestión: «¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta cuestión y, sólo mediante ella obtendremos una base científica para la búsqueda de todos los dominios continuos». El problema consiste, pues, según Dedekind, en indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir de base para deducciones válidas. En la sección precedente (la consagrada al dominio R) se ha puesto de manifiesto, prosigue que cada punto p de una línea recta produce una separación en dos porciones tal que cada punto de una porción está situado a la izquierda de cada punto de la otra porción. Tomando la recíproca de esta proposición, Dedekind encuentra la esencia de la continuidad, y formula así su principio: Si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta separación de la línea recta en dos porciones. Dedekind añade también que esta proposición no puede ser demostrada y que, por consiguiente, no es nada más que un axioma por el que se atribuye a la línea recta su continuidad. En la sección IV titulada *Creación de los números irracionales*, Dedekind introduce su célebre «cortadura» al considerar la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es inferior a todo número de la segunda. Esta división de los números racionales se llama una «cortadura». Si las clases se designan mediante A_1 y A_2 , entonces la cortadura se designa mediante (A_1, A_2) . Puede decirse, según Dedekind, que cada número racional a produce una cortadura que posee la propiedad de que, entre los números de la primera clase, existe un número que es el mayor o que, entre los números de la segunda clase, existe un número que es el menor. Inversamente, toda cortadura en los números racionales para la que existe el mayor de los números en la primera clase o el menor de ellos en la segunda, está determinada por un número racional. Pero Dedekind añade que es fácil mostrar que existen infinidad de cortaduras que no están determinadas por números racionales. Si situamos en la primera clase todos los números racionales negativos y todos los números positivos cuyo cuadrado es inferior a 2, y en la segunda clase todos los demás números racionales, entonces esta cortadura no está determinada por ningún número racional. Para cada una de estas cortaduras, «creamos un nuevo número irracional a que está completamente definido mediante esta cortadura; debemos decir que el número a corresponde a esta cortadura o que produce esta cortadura». Dedekind estudia, a continuación, las relaciones entre las cortaduras, con el fin de obtener una base para la disposición ordenada de todos los números reales. La comparación de dos cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) nos permite definir la identidad y la desigualdad entre estas dos cortaduras: la identidad se denota mediante $=$ ó $=$ donde a y b son los números reales que producen, respectivamente, las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) , mientras que la desigualdad implica $a > b$ ó $a < b$. En la sección v. presenta las tres propiedades fundamentales de los números reales: I. Si $a > b$, y $b > c$ entonces $a > c$ y se dirá que el número a se encuentra entre b y c . II. Si a y b son dos números

cualesquiera diferentes, entonces existe una infinidad de números diferentes que se encuentran entre α y β . III. Si α es un número real cualquiera, entonces todos los números reales se dividen en dos clases A_1 y A_2 , de manera que cada una de ellas posee un número infinito de elementos, cada miembro de A_1 es inferior a α y cada miembro de A_2 es superior a α . El número α puede ser asignado a cualquiera de las clases. Además de estas tres propiedades, Dedekind añade que el dominio de los números reales posee también la propiedad de la continuidad, que se expresa de la manera siguiente: Si el sistema de los números reales está dividido en dos clases A_1 y A_2 de tal manera que cada miembro de A_1 es inferior a todos los miembros de A_2 , entonces existe un único número α por el cual se produce esta separación. Dedekind pasa a continuación a las operaciones con los números reales en la sección VI, y tan sólo define de una manera explícita la operación de adición; las otras operaciones son definibles, según el autor, de una manera análoga. La adición de (A_1, A_2) y de (B_1, B_2) se define así: si c es un número racional cualquiera, lo situamos en la clase C_1 , si a_1 está en la clase A_1 y b_1 está en la clase B_1 de manera que $a_1 + b_1 < c$, y todos los demás números racionales los situamos en la clase C_2 . Esta separación forma una cortadura (C_1, C_2) , porque cada miembro de C_1 es inferior a cada uno de los de C_2 . Dedekind introduce también en esta sección la noción de intervalo, y termina sus Ensayos volviendo a su teorema de análisis que motivó sus investigaciones, el cual demuestra mediante la noción de cortadura, y subraya que este teorema es equivalente al principio de continuidad. A pesar de ciertas imprecisiones en su teoría de los números irracionales, como por ejemplo de dónde proviene el número irracional α que produce la cortadura, o por qué ese número α es distinto de la cortadura, Dedekind presentó una teoría satisfactoria lógicamente. Más tarde, se hicieron posibles algunas modificaciones de su teoría, como la de Russell para la construcción de los números reales. Todo este movimiento, emprendido con el fin de realizar la aritmetización del análisis, fue aceptado por la mayoría de los matemáticos. Sin embargo, algunos se opusieron vigorosamente a estos programas de aritmetización, como Paul duBois-Reymond (1831–1889), que vela en esta aritmetización una tentativa para destruir la unión necesaria entre el número y la noción de cantidad. Léopold Kronecker (1823–1891), por su parte, basaba sus objeciones no en el proceso mismo de aritmetización sino, por el contrario en su insuficiencia. Finalmente, Hermann Hankel, creador él mismo, de una teoría lógica de los números racionales, se oponía al tratamiento formal de los números irracionales sin la ayuda del concepto geométrico de cantidad, porque conducía, según él, a cosas artificiales y molestas cuyo valor científico no era muy grande. Añadamos que también se dirigieron ciertas críticas contra estos programas de aritmetización, y especialmente los de Cantor y Dedekind. Quedaba por elaborar una teoría lógica de los números racionales adecuada, lo que sería obra de varios matemáticos. entre los que se puede mencionar a Martin Ohm (1792–1872), hermano del célebre físico, Weierstrass y su idea de la pareja de números, Dedekind y la utilización de las ideas cantorianas sobre conjuntos y Giuseppe Peano (1858–1932) y los axiomas fundamentales de los números naturales.

Teoría de conjuntos

Hemos visto que la clarificación del concepto de función es el fruto de los trabajos emprendidos con el fin de estudiar más a fondo la representación de las funciones mediante series de Fourier. De la misma manera, a través de teorema de unicidad de la representación de funciones mediante series trigonométricas, algunos matemáticos se decidieron a ocuparse del estudio de los conjuntos infinitos de puntos, en particular Heine, Du Bois-Reymond y, evidentemente, Cantor.

Desde la época de los griegos, la atención de los matemáticos los filósofos se sintió atraída por las nociones de infinito, de infinitamente grande y de infinitamente pequeño. Algunos de ellos rechazaban categóricamente toda noción actual de una colección infinita, de elementos; para otros, la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos conduce a resultados que son incompatibles con la razón. Gauss, el príncipe de los matemáticos, protesta contra la utilización de una cantidad infinita como una entidad matemática real porque el infinito no es para él más que una manera de hablar. Cauchy rechaza la correspondencia entre una parte y el todo en un Conjunto infinito, porque es una contradicción. En las polémicas inacabables sobre problemas ligados a los conjuntos intervinieron razonamientos y argumentos de naturaleza metafísica e incluso teológica. La actitud general de los matemáticos con respecto a estos problemas consiste, muy frecuentemente, en ignorar lo que no llega a resolver. Como hecho paradójico, si es que lo es, cabe mencionar que evitan

reconocer los conjuntos infinitos reales, pero utilizan ampliamente series infinitas y conjuntos infinitos como el conjunto de los números racionales o reales. La aritmetización del análisis obliga a los matemáticos a considerar la existencia de conjuntos de puntos, lo que conduce a la fundación de la teoría de conjuntos. Bolzano fue el primero, antes que Cantor, en considerar seriamente la elaboración de una teoría de conjuntos. Recordemos brevemente que defendió la existencia de conjuntos infinitos reales y que llamó la atención sobre la noción de equivalencia de dos conjuntos (correspondencia biunívoca). Observó que esta equivalencia, en el caso de conjuntos infinitos, conducía a que una parte fuera equivalente al todo, e insistió en que este resultado fuera aceptado. Finalmente, Bolzano asignó números a conjuntos infinitos, asignación que implicaba la existencia de números trasfinitos diferentes (el modo de asignación de Bolzano se reveló inexacto según la teoría cantoriana). Pero las investigaciones de Bolzano sobre el infinito se centraron demasiado en el aspecto filosófico de las cosas, y el propio Bolzano decidió abandonar toda tentativa de proseguirlas más a fondo. Los trabajos de Heine sobre las series trigonométricas dieron origen al interés de Cantor por el estudio de estas mismas series. Du Bois-Reymond se interesó también por el estudio de las series trigonométricas y, en particular, por las relaciones entre conjuntos de puntos. Tratadas desde un punto de vista casi enteramente filosófico (empirismo), estas relaciones le llevaron a distinguir entre conjunto denso y conjunto no denso y, por extrapolación a partir de la continuidad que caracteriza a la recta numérica, exigió que sus órdenes de infinitud fueran no sólo densos sino también continuos. Otros matemáticos como Riemann, Lipschitz, Hankel y Weierstrass aislaron conjuntos infinitos en sus investigaciones, pero ninguno de ellos sintió la necesidad de desarrollar una aritmética de los conjuntos infinitos como hizo Cantor.

La teoría de conjuntos de Cantor El nacimiento de la teoría de conjuntos de Cantor comienza con su decimotercera memoria, publicada en 1874 en la revista de Crelle bajo el título de *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Sobre una propiedad del conjunto de todos los números reales algebraicos). Sin embargo, en una memoria de 1872 sobre las series trigonométricas, Cantor presenta ya consideraciones sobre los conjuntos de puntos, y escribirá más tarde varias memorias sobre el tema así como cartas personales que precisarán ciertos puntos específicos referentes a su teoría. Según Cantor, un conjunto es una colección de objetos definidos y separados, que pueden ser concebidos por la inteligencia, y para la que podemos decidir si un objeto dado pertenece o no a la colección. Refutando los argumentos de sus predecesores, Cantor afirma la existencia de conjuntos infinitos actuales; y muestra que un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca entre él mismo y una de sus partes. En su décima memoria, publicada en 1872, Cantor introduce, en particular, el límite de un conjunto de puntos, el conjunto derivado y los conjuntos de primera especie. Para un conjunto de puntos P en un intervalo finito, un punto límite de P es cualquier punto de la recta tal que en todo intervalo que comprenda ese punto hay una infinidad de puntos de P . Todo punto de P que no es un punto límite de P es llamado por Cantor punto aislado. El conjunto de todos los puntos límites de P se llama el conjunto derivado del conjunto de puntos P . Si P' , el conjunto derivado, no es finito, se puede encontrar un segundo conjunto derivado P'' , y así sucesivamente. Si el n -ésimo conjunto derivado de un conjunto de puntos P es finito, entonces se dice que P es un conjunto de orden n o de primera especie. Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos límites y es abierto si todo punto del conjunto es un punto interior, es decir, si cada punto puede considerarse contenido en un intervalo que comprende solamente puntos del conjunto original. Un conjunto cerrado es perfecto si contiene solamente puntos límites. La idea fundamental en la teoría de Cantor, la correspondencia biunívoca, le sirve entre otras cosas para definir la equivalencia entre dos conjuntos: si dos conjuntos bien definidos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca, tienen entonces la misma potencia o son equivalentes. En el caso finito, el concepto de potencia de un conjunto se corresponde con el número de elementos del conjunto, y la equivalencia entre dos conjuntos finitos se establece con el número de elementos de cada conjunto (más adelante el término potencia se convertirá en el de cardinal). Un subconjunto de un conjunto P (subconjunto propio) se define como otro conjunto cuyos elementos son también elementos de P . Un subconjunto de un conjunto finito P tiene siempre una potencia inferior a la del conjunto P , lo que no es cierto en el caso de los conjuntos infinitos. Dedekind se sirvió de esta constatación para dar, en 1887, la definición siguiente del infinito, independientemente de Bolzano y Cantor: se dice que un sistema S es infinito cuando es similar a una parte propia de sí mismo; si no, se dice que el sistema S es finito. Cantor ilustra esta constatación mostrando que el conjunto de los números naturales tiene la misma potencia que el subconjunto formado por los números

naturales pares. Por el contrario, puede ocurrir que dos conjuntos tengan potencias desiguales. Por ejemplo, si M y N tienen potencias desiguales y el conjunto M es equivalente a un subconjunto de N , solamente se puede concluir que la potencia de M es inferior a la de N . Cantor intentó también ilustrar sus conceptos de equivalencia y de potencia mediante conjuntos de números. En esta ocasión introduce el término «numerable» para designar todo conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales (enteros positivos). Muestra así que es el conjunto infinito más pequeño en términos de potencia, y que todo subconjunto infinito de este conjunto de los números naturales es necesariamente numerable. Por ejemplo, el conjunto de los cuadrados perfectos y el Conjunto de los números triangulares son numerables. Aunque esos Conjuntos parecen ser más pequeños que el conjunto de los números racionales (fracciones), Cantor demostró en 1847, y después en 1895, que este último conjunto es también numerable. La demostración siguiente es la dada por Cantor en 1895: dispongamos los números de la manera siguiente:

1/1 2/1 3/1 4/1 1/5

1/2 2/2 3/2 4/2

1/3 2/3 3/3

1/4 2/4

1/5

Puede observarse que todos los números racionales que se encuentran en una misma diagonal tienen la misma suma en el numerador y en el denominador. Partiendo de 1/1, se siguen las flechas 2/1, 1/2, 1/3, 2/2, 3/1 etc., y así se encontrarán todos los números racionales, y a cada uno se le asigna un número entero positivo dado. Desde ese momento, el conjunto así ilustrado de los números racionales (en el que se encuentran los mismos números más de una vez, 1/1, 3/3, 1/2 2/4 etc.) estará en correspondencia biunívoca con los números naturales. Por consiguiente, el conjunto ilustrado es numerable y el conjunto de los números racionales, como subconjunto de este conjunto, es también numerable. Cantor demostró también un resultado sorprendente en su memoria de 1874: el conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Pero todos los conjuntos infinitos no tienen la misma potencia, y por consiguiente no son todos numerables. Cantor demostró que el conjunto de los números reales tiene una potencia superior a la del conjunto de los números naturales para ello utilizó dos demostraciones, una de las cuales es la reducción al absurdo (1892): supongamos que se pueden numerar los números reales entre 0 y 1; expresémoslos en forma de decimales puros (que no se terminan, como 0,33333... para 1/3, 0,4999... para 1/2 y así sucesivamente); si esos números reales son numerables, se puede entonces asignar a cada uno un entero positivo tal que $1! 0, a_{11} a_{12} \dots 2! 0, a_{21} a_{22} \dots 3! 0, a_{31} a_{32} \dots$ donde los a_{ij} representan las cifras comprendidas entre 0 y 9 inclusive. Cantor demuestra que el conjunto de los números reales no es numerable escribiendo un número decimal que no se termina y es diferente de todos los de la lista anterior. Basta hacer $b = 0, b_1 b_2 \dots$ donde $b_k = 9$ si $a_{kk} = 1$ y $b_k = 1$ si $a_{kk} \neq 1$. Este número real está comprendido entre 0 y 1 pero no está incluido en la lista anterior de números reales comprendidos entre 0 y 1. Por tanto, hay una contradicción, y por consiguiente el conjunto de números reales no es numerable. En 1874, Cantor se interesó también en demostrar la independencia de la potencia del continuo del número de sus dimensiones, es decir, en mostrar la equivalencia de los puntos de una recta (potencia del continuo) y los puntos de R_n (espacio de n dimensiones). Consigue demostrar esta equivalencia en 1877 y, a este respecto, escribe a Dedekind: «Lo veo pero no lo creo.» Se puede, pues, demostrar la equivalencia entre el número de puntos contenidos en un segmento unitario $[0, 1]$ y el conjunto de puntos de un cuadrado unitario, de un volumen unitario, de un espacio unitario de n dimensiones. Después de haber demostrado la existencia de conjuntos de la misma potencia y de potencias diferentes, Cantor prosiguió profundizando en sus investigaciones y llegó así a introducir una teoría de los números cardinales y ordinales, en la que la aritmética se efectúa sobre cardinales y ordinales. Esta aritmética particular fue desarrollada entre 1879 y 1884, y completada en dos memorias publicadas en 1895 y 1897, respectivamente, en los *Mathematische Annalen*. La teoría de conjuntos y la aritmética de los cardinales y ordinales de Cantor despertó

evidentemente el asombro de un buen número de contemporáneos, por la naturaleza misma de sus ideas revolucionarias. Además, ya a finales del siglo XIX, algunos matemáticos incluyendo a Cantor, plantearon algunas cuestiones que sembraron la duda sobre la validez de esta teoría, y se pusieron de manifiesto ya algunas paradojas y problemas no resueltos. Otros matemáticos se opusieron; mencionemos a Kronecker, Felix Klein, Henri Poincaré y Hermann Weyl. Otros, por el contrario, se sintieron vivamente impresionados por el uso que ya se había hecho de aquellas teorías, como Adolf Hurwitz, Jacques Hadamard, David Hilbert y Bertrand Russell. Las dificultades con que se encontró la teoría de conjuntos de Cantor sedan clarificadas mediante la axiomatización de esta última realizada por Zermelo y Fraenkel, y mediante el estudio de los fundamentos de la matemática.

2

aaaaaaaa

a

b

c

-3 - 0 3

-3 - 0 3

y

x

-4 -3 -2 - 0 2 3 4

x

y