

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cos \theta$$

Proyección de un vector sobre una recta

$$A_r = A \cdot \mathbf{r}_0 \text{ siendo } \mathbf{r}_0 \text{ el vector unitario de la dirección de la recta ya que } \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 = A \cdot \cos \theta$$

Producto vectorial de dos vectores

Dirección perpendicular a A y B

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$: Sentido el de la regla del sacacorchos

Modulo $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \sin \theta = S$ (superficie del paralelepipedo formado por los dos vectores)

Producto mixto de tres vectores

$$A_x A_y A_z$$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = B_x B_y B_z$ que coincide con el volumen del paralelepipedo creado

$$C_x C_y C_z$$

Doble producto vectorial

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Cambio de sistema de referencia cartesiano

$$\text{Sea un sistema de referencia } \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \gg \gg \gg \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z$$

En un nuevo sistema de referencia nos permitira expresar A en funcion de sus nuevas

Componentes cartesianas de forma que : $A_x' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}'$

$$A_y' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}'$$

$$A_z' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}'$$

$$\text{Quedando: } \mathbf{A} = A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}'$$

Momento de un vector respecto un punto

Sea un vector A deslizante sobre la recta r y un punto o arbitrario; se define el momento

del vector A respecto del punto o y lo indicamos por Mo: $\mathbf{M}_o = \mathbf{r}_{po} \wedge \mathbf{A}$

(siendo p un punto cualquiera de la recta r)

*Si tomamos otro punto ó la relacion existente entre este y el otro es $M_o = M_o' + r_{po} \wedge A$

*Si o y ó estan en la misma recta $M_o = M_o'$

Momento de un vector respecto de un eje

Sea un vector A deslizante sobre una recta r y p un punto sobre dicha recta y otro punto q que pertenece a otra recta llamada eje de la dirección de un vector unitario u:

$M_o = u (r_{pq} \wedge A)$ (si la recta r y el eje estan contenidas en el mismo plano $M_o=0$)

Momento resultante de un sistema de vectores deslizantes

$M_o = \sum r_{io} \wedge A_i$

*Si las rectas se cortan en un punto en comun p entonces: $M_o = r_{po} \wedge R$ ($R = \sum A_i$)

*Si tomamos el momento respecto ó : $M_o' = M_o + r_{oo'} \wedge R$

*Si $R = 0$ >>>> no existe traslación

*Si $M_o = 0$ >>>> no existe rotación

Derivada de un vector ligada a un plano

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt} r + A \frac{d\theta}{dt} n$

$\frac{dA}{dt}$

*como calcular la componente tangencial:--1 metodo: . calculamos la expresión general de A(t)

. derivamos la expresión obtenida $\frac{dA(t)}{dt}$

$\frac{dA}{dt}$

. particularizamos para un tiempo concreto

2 metodo: . $\frac{dA}{dt} \cdot r = \frac{dA}{dt}$

$\frac{dA}{dt}$

*Como calcular la componente normal ; $A \frac{d\theta}{dt} = [\frac{dA}{dt}^2 - (\frac{dA}{dt})^2]^{1/2}$

$\frac{dA}{dt}$

*Si $\frac{dA}{dt} = 0$ >>> $\theta = cte$ >>>> no existe componente normal

$\frac{dA}{dt}$

*Si $\frac{dA}{dt} = 0$ >>> $A = cte$ >>>> no existe componente tangencial

Circulación de un vector a lo largo de una línea

Sea L una línea cualquiera y un vector A (x,y,z) definido para todos los puntos de la línea

L, se define la circulación de A a lo largo de L desde un punto P1 hasta P2 de la forma

$$C = \int_{P1}^{P2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

*Algunos campos llamados conservativos tienen la propiedad de que el camino que tomes para llegar de un punto a otro es indiferente ya que el valor de su circulación siempre será 0.

TEMA 2 CINEMATICA

Vector velocidad

t

$$* \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \text{ tangente a la trayectoria } \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = \int_0^t \mathbf{v} \cdot dt$$

dt 0

*(mov circular)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \implies \mathbf{v} = \omega \cdot \mathbf{R}$$

dt

Vector aceleración

t

$$* \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \mathbf{v}(0) = \int_0^t \mathbf{a} \cdot dt$$

dt 0

*componentes intrínsecas del vector aceleración: $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{r} + v \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} = a_t \mathbf{r} + a_n \mathbf{n}$

dt dt

a_t : nos informa como varia el modulo de v en el tiempo (acel tang)

a_n : nos informa como cambia la dirección de v en el tiempo (acel norm)

$$*a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

*(mov circular)

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \implies \mathbf{a}_t = R \cdot \alpha$$

$$\frac{d\mathbf{a}_n}{dt} = \mathbf{v} \cdot \omega = R \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

R

M.R.U

$$* V = \underline{E}$$

T

M.R.U.A

- $V = V_0 + a \cdot t$
- $S - S_0 = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$
- $V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot (S - S_0)$
- $V = V_x i + V_y j$ ----- $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

- **Tiro horizontal**: descomponemos el mov en dos; en el eje X (MRU) y el eje Y (MRUA)

a) eje X (longitud) $V_0 = V_x = \text{const}$

$$X = e = V_0 \cdot t$$

b) eje Y (altura) V_0 ; $a = g = 9,8$

$$Y = h = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$V_y = V_{0y} + g \cdot t$$

- **Tiro oblicuo**: descomponemos el mov en dos; en el eje X (MRU) y el eje Y (MRUA)

a) eje X (longitud) $V_0 = V_x = \text{const}$

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$X = e = V_{0x} \cdot t = V_0 \cdot \cos \theta \cdot t$$

b) eje Y (altura) $a = g = 9,8$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \theta$$

$$Y = h = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = V_0 \cdot \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t = V_0 \cdot \sin \theta - g \cdot t$$

- **Tiro oblicuo desde una altura**:

$$a = g = -g j = \text{cte}$$

$$V(0) = V_0 (i \cos \theta + j \sin \theta)$$

$$t=0$$

$$r(0) = j h$$

$$a) dv = a \cdot dt \ggggggg v(t) = (V_o \cdot \cos \theta) i + (V_o \cdot \sin \theta - gt) j$$

$$b) dr = v \cdot dt \gggggggg r(t) = (V_o \cdot \cos \theta \cdot t) i + (h + V_o \cdot \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2) j$$

M.C.U

$$\bullet \theta = \omega \cdot t$$

M.C.U.A.

- $\omega = \omega_o + \alpha \cdot t$ at $\theta = \alpha \cdot R$
- $\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ an $v = \underline{\omega R}$
- $\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha \theta$ R

$$v = \omega \cdot R$$

TEMA 3 MOVIMIENTO DE UN PUNTO DESDE DOS SISTEMAS DE REFERENCIA

Velocidad

$$\bullet v_p = v_o' + v_p' + \omega \wedge r_{p'}$$

Velocidad de p velocidad de E' velocidad de p velocidad vector posicion desde E desde E desde E' angular de p respecto

E'

Aceleración

$$a_p = a_p' + a_o' + \alpha \wedge r_{p'} + \omega \wedge (\omega \wedge r_{p'}) + 2 \omega \wedge v_p'$$

a de p a de p a de E' a angular pos de p v angular pos de p v angular v de p

dde E dde E' dde E resp E' dde E' dde E'

TEMA 4 LEYES CLÁSICAS DEL MOVIMIENTO

Primer postulado

todo cuerpo permanece en su estado inicial de reposo o de movimiento uniforme si esta libre de accion exterior

S.R.I. >>>>> se cumple el primer postulado de Newton ($a = 0$)

Segundo postulado

la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza exterior que sobre el actua e inversamente proporcional a la masa del cuerpo

$$F = m \cdot a$$

Tercer postulado

si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, este ejerce sobre A una fuerza de igual modulo, direccion pero de sentido contrario

$$F_{ij} = -F_{ji}$$

S.R.N.I. >>>>>>>> desde un SRNI a un punto material se le miden las mismas fuerzas que desde un SRI y ademas las fuerzas de inercia.

Si ponemos un sistema de referencia en donde hay un movimiento con aceleración

ese sistema de referencia es SRNI, ahora si aplicamos la 2ª LN a un cuerpo

desde ese sistema de referencia tendremos que sumarle las fuerzas de inercia.

$$F_{\text{inercia}} = -m a' - m \frac{dw}{dt} \wedge r' - m w \wedge (w \wedge r') - 2 m w \wedge v'$$

TEMA 5 LEYES DE FUERZA EN LA NATURALEZA

Interaccion gravitatoria

la presencia del punto material(a) modifica las propiedades del espacio que le rodea, de forma que aparece en cada punto una propiedad vectorial que llamamos campo gravitatorio g que valdra:

$$g = -G \frac{a}{r^2}$$

si colocamos un 2º punto material(b) en el 1º entonces sobre el 2º actua una fuerza definida por

$$f = b \cdot g \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg f = -G \frac{a \cdot b}{r^2} \text{ ro fuerza de atraccion}$$

(a esta fuerza en el campo gravitatorio terrestre se le denomina peso)

Fuerzas electromagnéticas

la presencia de una carga(q) en el espacio(p) modifica las propiedades del mismo, de forma que en cada punto aparece una propiedad vectorial que llamamos E

$$E(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

si en p situamos otra carga q' sobre ella actua una fuerza que admitimos que vale

$$E(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$$

si las cargas son de distintos signos la fuerza será de atracción mientras que si son del mismo signo la fuerza será de repulsión. Este tipo de fuerzas es eléctrica.

Si la carga q se mueve con una velocidad bastante inferior de la de la luz, en cada punto (p) del espacio aparece una propiedad vectorial que podemos descomponer en dos:

- E (campo eléctrico conservativo)
- B (campo magnético) (depende de la velocidad de la carga)

La suma de estas dos propiedades vectoriales recibe el nombre de campo electromagnético. Si determinado instante se encuentra en p una carga q' que se mueve con velocidad v , se verá sometida a una fuerza f llamada fuerza electromagnética que vale

$$F = q' (E + v \wedge B)$$
 v : velocidad de q'

B : aparece porque se está moviendo con una determinada v

La fuerza magnética aparecerá siempre que la carga q' tenga velocidad distinta de 0 y además en distinta dirección que B . La fuerza será máxima si v y B son perpendiculares y la fuerza será nula cuando v y B tengan la misma dirección.

Fuerzas nucleares

El núcleo tiene diferentes partículas como neutrones y protones. La estabilidad del núcleo se debe a la existencia de unas determinadas fuerzas nucleares que contrarrestan el efecto de las interacciones de tipo eléctrico de las partículas.

$0 < \text{distancia} < 4 \cdot 10^{-16}$ f. repulsiva

$4 \cdot 10^{-16} < \text{distancia} < 10^{-15}$ f. atractiva

$\text{distancia} > 10^{-15}$ f. casi nula

Fuerzas de contacto

Una fuerza de contacto la denominamos NORMAL y es perpendicular a la superficie de contacto. Aparecen siempre que esté en contacto con una superficie

Otra fuerza de contacto la denominamos TENSIÓN que aparece cuando utilizamos hilos, cuerdas, etc., y que va del cuerpo al otro extremo a través de la cuerda

Fuerzas elásticas

Una deformación es elástica cuando la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo cesa y este vuelve a su estado inicial, en caso contrario la deformación será plástica. Estas fuerzas las estudiaremos mediante resortes elásticos, que consideraremos sin masa, caracterizados por su longitud en reposo llamada longitud natural. La fuerza elástica tiene la forma:

$$f = K \cdot r$$
 r es la deformación

Fuerzas de rozamiento

*fuerzas de rozamiento estaticas-----depende de la superficie en la que se trabaje.

Fr estatico = μ_s

*fuerzas de rozamiento dinamicas-----no depende de la superficie en la que se trabaje

Fr dinamica = μ_k

TEMA 6 DINAMICA DEL PUNTO MATERIAL. TEOREMAS DE CONSERVACION.

Momento lineal o cantidad de movimiento. Teorema de conservación

$$P = m \cdot v$$

–teorema del momento lineal de una particula

$$f = \frac{dP}{dt} = 0 \gg \gg \gg \gg \gg P = \text{cte}$$

dt

–relacion con el impulso

t

$$\int_0^t f dt = m \cdot v(t) - m \cdot v(0)$$

0

Momento angular. Teorema de conservacion

Sea un punto p que se mueve con velocidad v con respecto a un punto fijo, se define su momento angular como

$$h_o = r_{po} \wedge m \cdot v$$

–Momento

$$\frac{d h_o}{dt} = r_{po} \wedge f = M_o$$

dt

.si P esta libre de fuerza externa $\gg \gg \gg M_o = 0 \gg \gg \gg \gg \gg h_o = \text{cte}$

.si P no esta libre de accion exterior pero $M_o = 0 \gg \gg \gg \gg \gg h_o = \text{cte}$

–teorema de conservación del momento angular

t

$$\int_0^t M_o dt = h_o(t) - h_o(0)$$

0

por tanto podemos decir que un campo escalar se caracteriza por su gradiente.

Supongamos que queremos calcular la circulación de ϕ a lo largo de una línea cualquiera que va de p_1 a p_2

$$\oint_C d\phi = \phi(p_2) - \phi(p_1)$$

p_1

Este resultado es lo que varía ϕ al pasar de p_1 a p_2 y no depende de la línea ya que es un campo conservativo

Conclusión: siempre que tengamos un campo de vectores conservativos, asociado a él tendremos un campo escalar, ϕ , del cual procede. El campo de vectores conservativo se obtiene a partir de la operación gradiente.

$$\mathbf{A} = -\nabla\phi$$

$$d\phi = -\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Divergencia

Resulta de aplicar escalarmente el operador nabla ∇ a un vector $\mathbf{A}$

–teorema de la divergencia: Sea P un punto del campo de vectores $\mathbf{A}$ en el que está definido $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Sea dv un elemento de volumen que contiene a P . Este elemento de volumen está envuelto por una superficie cerrada S

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

donde

$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ flujo del vector $\mathbf{A}$ a través de la superficie cerrada S

. Si $\mathbf{A} = \text{cte} \gg \gg \gg \gg \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \gg \gg \gg \gg \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Rotacional

Resulta de aplicar vectorialmente el operador nabla (∇) a un campo de vectores $\mathbf{A}$

. Si el rotacional del campo de vectores $\mathbf{A}$ es nulo entonces $\mathbf{A}$ es conservativo.

–Teorema de Stokes: La circulación de $\mathbf{A}$ a lo largo de una línea cerrada L , que delimita la superficie abierta S , es igual al flujo de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a través de dicha superficie S .

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{p_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{p_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

si $\mathbf{A}$ es conservativo

Fuerzas conservativas

Decimos que en una region del espacio tenemos un campo de fuerzas si sobre un punto material situado en cualquier punto del campo puede aparecer una fuerza $f(x,y,z,t)$, donde t es una característica del punto material. Si f no depende de t decimos que es estacionario (por ejemplo la masa para el campo gravitatorio).

Un campo de fuerzas será conservativo si $\nabla \times f = 0$, es decir, $\nabla f \cdot dl$ no depende de L .

A la circulación de la fuerza se le llama trabajo >>>>>> si la fuerza es conservativa el trabajo realizado por f en el desplazamiento del punto material desde p_1 a p_2 es independiente del camino que siga.

Como f es un campo de fuerzas conservativo, tendrá asociado una función escalar, de la cual procede, mediante la operación gradiente. A este campo escalar asociado a la fuerza conservativa se le denomina energía potencial (E_p)

$$f = - \nabla E_p \quad dE_p = - f \cdot dl$$

de la 2ª expresión

p_2

$$\nabla f \cdot dl = - \nabla dE_p = E_p(1) - E_p(2) = W_{p_1 p_2}$$

p_1

El trabajo realizado por la fuerza conservativa viene dado por la diferencia de energía potencial en la posición inicial menos la posición final. ($E_p = m g h$)

–Teorema de conservación de la energía mecánica: La energía mecánica de un punto material se conserva si sobre el no actúan fuerzas conservativas o que no realicen trabajo.

$$E_c(p_1) + E_p(p_1) + E_{p'}(p_1) = E_c(p_2) + E_p(p_2) + E_{p'}(p_2)$$

si sobre un punto material actúan fuerzas que no son conservativas

p_2

$$E_m(p_1) + W(f \text{ no cons}) = E_m(p_2)$$

p_1

Curvas de energía potencial

(ver apuntes)

TEMA 8 DINAMICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES

Sistemas de partículas

El estudio de los cuerpos finitos lo abordamos considerando que los cuerpos están constituidos por un gran número de partículas

sistema discreto : formado por n partículas (cada una de ellas se caracteriza por la masa, aceleración, velocidad)

sistema continuo: distribución continua de masa. Consideramos el sistema formado por infinitos dv .

A la masa elemental contenida en dv la llamamos dm .

Así para cada punto $P(x,y,z)$ estará definida la densidad de masa como

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

dv

Si el cuerpo que se considere se caracteriza porque una dimensión se desprecia frente a las otras dos se define para cada punto $P(x,y,z)$ su densidad superficial como

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

ds

Si el cuerpo que se considere se caracteriza porque dos dimensiones se desprecian frente a la otra se define para cada punto $P(x,y,z)$ su densidad lineal como

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

dl

– si ρ , σ , λ son constantes para todo el sistema se dice que el sistema es homogéneo y en caso contrario se dice que es heterogéneo.

$$\rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho dv$$

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \Rightarrow dm = \sigma ds$$

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda dl$$

– sistemas rígidos: masa que no cambia de forma ni de volumen

– sistemas deformables: masa que se deforma o cambia de volumen

Fuerzas interiores y exteriores

Sea un sistema discreto; sobre cada una de las partículas actuarán dos tipos de fuerzas que son interiores y exteriores

– fuerzas interiores: resultan de la interacción de cada partícula con las del resto del

sistema. En general sobre una partícula genérica i

$$F_i = F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{in}$$

– fuerzas exteriores: resultan de la interacción de las partículas con el mundo exterior

(pej peso). Designaremos por $\mathbf{F}_i$ a la suma de todas las fuerzas exteriores

para cada partícula del sistema se verifica entonces:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i = m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

que generalizando para el sistema

$$\sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

y llamando $\mathbf{R} = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i$ quedara

$$\mathbf{R} = \sum m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

Resumiendo, se confirma que el movimiento de una partícula del sistema depende tanto de las fuerzas internas como de las externas mientras que la velocidad del sistema solo depende de las fuerzas externas.

Momento lineal

Se define el momento lineal para un sistema de partículas como:

$$\mathbf{P} = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_i$$

El momento lineal de un sistema de partículas es igual a la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas del sistema .

- Definimos ahora el *centro de masa* para un sistema de partículas como un punto asociado a cada sistema de partículas (no tiene por que coincidir con una partícula del sistema)

–vector de posición

$$\mathbf{r}_g = \sum m_i \cdot \mathbf{r}_i$$

$$\sum m_i$$

–vector de velocidad

$$\mathbf{V}_g = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_i$$

$$\sum m_i$$

–vector aceleración

$$\mathbf{a}_g = \sum m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

$$\sum m_i$$

–vector del momento lineal

$$\mathbf{P}_g = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_i = m \cdot \mathbf{V}_g$$

Movimiento del centro de masas bajo acción exterior

$R = m \cdot a_g$ donde $R = \frac{d}{dt} F_i$

En el movimiento del centro de masas no influyen las fuerzas interiores, solo las exteriores.

El análisis del movimiento del centro de masas se hace igual que para un punto material.

(C) >>>>>>> sistema de referencia ligado al centro de masas

(L) >>>>>>> sistema de referencia ligado al tierra

Teorema de conservación del momento lineal y de velocidad del centro de masas

$$\frac{dP}{dt} = R$$

dt

de esta expresión se deduce que si $R = 0$ entonces $P = \text{cte}$. Esto se cumple en los siguientes casos

- en sistemas aislados (no existen fuerzas sobre el)
- en sistemas tales que $R = \frac{d}{dt} F_i = 0$ (por $R = 0$ la $a_g = 0$ y por lo tanto $v_g = \text{cte}$)

Determinación del centro de masas de un sistema

- sistemas discretos

$r_g = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i}$ nota: si un cuerpo tiene centro de simetría

$\frac{\sum m_i}{\sum m_i}$ y es homogéneo su c.d.m. coincide con el centro de simetría

- sistemas continuos

$$r_g = \frac{\int r \cdot dm}{\int dm}$$

$\int dm$

Aplicación del teorema de conservación del momento lineal al análisis de colisiones entre partículas

- si el choque es elástico

conserva la E_m $E_m (\text{antes}) = E_m (\text{después})$

conserva el momento lineal $P (\text{antes}) = P (\text{después})$

- si el choque es inelástico

conserva el momento lineal $P (\text{antes}) = P (\text{después})$

no conserva la E_m $E_m (\text{antes}) \neq E_m (\text{después})$

- coeficiente de restitución

$K = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ (después) $K = 1$ >>>> elástico /// $0 < K < 1$ >>>> inelástico

$V_1 - v_2$ (antes)

Momento angular de un sistema de puntos

$$H_o = \sum r_{io} \wedge m_i \cdot v_i$$

La variación del momento angular con respecto al tiempo

$$\frac{dH_o}{dt} = M_o - v_o \wedge m \cdot v_g \quad M_o = \sum r_{io} \cdot F_i \text{ momento resultante de las fuerzas exteriores}$$

v_o velocidad del polo del momento

m masa total del sistema

v_g velocidad del centro de masa

- casos particulares

a) punto 0 fijo $\Rightarrow V_o = 0 \Rightarrow \frac{dH_o}{dt} = M_o$

$\frac{dH_o}{dt}$

b) si 0 es el c.d.m. $\Rightarrow \frac{dH_g}{dt} = M_g$ ya que $v_g \wedge m \cdot v_g = 0$

$\frac{dH_g}{dt}$

Teorema de la conservación del momento angular

De las expresiones

$$\frac{dH_o}{dt} = M_o \quad \frac{dH_g}{dt} = M_g$$

$\frac{dH_o}{dt}$

se deduce:

- para un sistema aislado $M_o = 0$; $M_g = 0$. Por lo tanto $H_o = \text{cte}$; $H_g = \text{cte}$
- para un sistema no aislado, se verifica

$$M_o = 0 \Rightarrow H_o = \text{cte}$$

$$M_g = 0 \Rightarrow H_g = \text{cte}$$

Aquí vamos a relacionar H_o con H_g

$$H_o = H_g + r_g \wedge m \cdot v_g$$

La relación existente entre el momento angular y el vector rotación es en su caso más general

$$H_g = I_g \omega$$

Energía cinética de un sistema de partículas

$$E_c = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

La energía cinética medida desde distintos sistemas de referencia

- movimiento traslatorio

$$E_c (L) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{ sr ligado a tierra}$$

$$E_c (C) = \frac{1}{2} m_i V_i^2 \text{ sr ligado al c.d.m.}$$

Vamos a tratar de buscar una relación para las dos expresiones ($v_i = V_i + v_g$)

$$E_c (L) = E_c (C) + \frac{1}{2} m v_g^2 \text{ ----- mov traslatorio ----- } V_i = 0 \text{ (velocidad de } i \text{ desde c.d.m.)}$$

- movimiento rototraslatorio

$$E_c (L) = \frac{1}{2} m_i v_g^2 + \frac{1}{2} I_g \omega^2 \text{ sr ligado a tierra}$$

$$E_c (C) = \frac{1}{2} I_g \omega^2 \text{ sr ligado al c.d.m.}$$

Teorema del trabajo y de la energía cinética para un sistema de partículas

b b

$$W (f. \text{ Intr.}) + W (f. \text{ Exter}) = E_c (a) - E_c (b)$$

a a b interna interna

como las fuerzas internas son conservativas $W (f. \text{ Intr.}) = E_p (a) - E_p (b)$ quedará

a

b interne interna

$$W (f. \text{ Externas}) = [E_c (b) + E_p (b)] - [E_c (a) + E_p (b)]$$

a

teorema de conservación de la masa

$$E_c (L) + E_p \text{ interna} + E_p = \text{cte}$$

TEMA 10 CAMPO ELECTROESTÁTICO

Propiedades de la carga eléctrica

Si colocamos una carga puntual q en el espacio dicha carga modifica el espacio que le rodea de manera que en cada punto p de dicho espacio aparece una magnitud vectorial llamada campo eléctrico:

si colocamos una nueva carga q' y la colocamos en p esta estara sometida a una fuerza

$$f = q' \cdot E(p)$$

que podra ser de atracción o de repulsión. Entonces la fuerza de atracción de dos cargas es:

Distribución continua de carga

Consiste en una carga distribuida por un volumen, superficie o linea de manera uniforme o no uniforme. Para poder caracterizar esto definimos el concepto de densidad de carga como una magnitud definida en cada punto de la region que consideremos.

* Volumen: $q = \int_V \rho \, dv$

si es uniforme

* Superficie: si es uniforme

* Lineal: si es uniforme

Calculo de E producido por una distribución continua de carga.

El campo total en el punto p será :

–volumen: $E(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \frac{\vec{r}_0}{r_0^3}$

–superficie:

–lineal:

que tiene los siguientes casos particulares:

a)campo electrico E sobre el eje de una carga lineal finita

b)campo electrico E sobre la mediatriz de una carga lineal finita

c)campo electrico E proximo a una carga lineal infinita

d)campo electrico E sobre el eje de una carga anular

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \, x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

e)campo electrico E en el eje de un disco uniformemente cargado

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\rho_s \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right)$$

f)campo electrico E en las proximidades de un plano infinito de carga

Potencial electrico.

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

diferencia de potencial entre p y ð

diferencia de potencial entre A y B

la diferencia de potencial entre dos puntos coincide numéricamente con el trabajo que realizaria la fuerza del campo E para trasladar la unidad de carga desde un punto a otro a traves de cualquier linea.

$$W_a^b = q[\varphi(a) - \varphi(b)]$$

el potencial en un punto debido a varias cargas se calcularia mediante de la superposición

Calculo del potencial electrico en distribuciones continuas de carga.

Se calcula mediante la siguiente integral

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

que tiene los siguientes casos particulares

a)potencial sobre el eje de un anillo cargado

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

b)potencial sobre el eje de un disco uniformemente cargado

c)potencial en las proximidades de un plano infinito de carga

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}(x+a) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$$

d)potencial en el interior y el exterior de una corteza esferica de carga

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{con } r < R \quad (\text{interior})$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{con } r > R \quad (\text{exterior})$$

e)potencial proximo a una carga lineal infinita

$$\varphi(p) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\rho_l \ln \frac{r}{a}$$

Superficies equipotenciales

Superficie sobre la cual el potencial eléctrico es constante se denomina superficie equipotencial

Energía potencial de una distribución de cargas

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es igual al trabajo necesario para transportar las cargas desde una separación infinita a sus posiciones finales.

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$$

– con la 1ª carga el trabajo es 0; para la 2ª carga el trabajo que resulta es de la interacción con la primera; para la 3ª carga el trabajo que resulta es de la interacción con la primera carga más el trabajo de interacción con la segunda; para la 4ª carga el trabajo que resulta es de la interacción con la primera carga más el trabajo de interacción con la segunda más el trabajo de interacción con la tercera; así sucesivamente..el trabajo total es la suma de todos los trabajos de todas las partículas.

Teorema de Gauss

$$\text{el flujo del vector } D \left(\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 \right)$$

)a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma de todas las cargas contenidas o encerradas en dicha superficie

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_i q_i$$

Calculo del campo eléctrico mediante Gauss

a)campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una corteza cilíndrica de carga

$$E=0 \quad \text{para } r < R \quad (\text{interior})$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{r} \quad \text{para } r > R \quad (\text{exterior})$$

b)campo eléctrico en el interior y en el exterior de un cilindro sólido de carga infinitamente largo

c)campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga

c)campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una esfera sólida cargada

Propiedades de los conductores en equilibrio

Un conductor es un cuerpo que se caracteriza por tener electrones libres (portadores libres de carga).

– Conductor en equilibrio es aquel en el que no hay movimiento ordenado de carga (no esta sometido a la accion de un campo) por lo que el campo dentro del conductor es nulo.

– Conductor que no esta en equilibrio es aquel que tiene un movimiento ordenado de cargas.

Todos los puntos de un conductor en equilibrio incluidos los de la superficie estan al mismo potencial por lo que la superficie será una superficie equipotencial. Se debe cumplir que

$$E(p) = E(p)_q + E(p)_+ + E(p)_- = 0$$

Conductor con cavidades

Supongamos un conductor con tres cavidades; en cada una de las cavidades introducimos cargas puntuales de manera que se produce una acumulaci3n de carga de igual valor que la carga y de signo contrario en la superficie de cada cavidad. Seguidamente como el campo E tiene que ser nulo en la superficie del conductor se producira una acumulacion de carga que consiga que el campo total del conductor sea nulo.

$$Q_{\text{conductor}} = Q(1) + Q(2) + Q(3) + Q_{\text{ext}} = 0$$

* dentro de las cavidades hay campo E producido por las cargas.

* la superficie del conductor que esta cargada produce un campo como el de una carga puntual para puntos exteriores a ella.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Campo en la superficie de un conductor.

Dipolo electrico.

Un dipolo electrico consiste en dos cargas puntuales(sueltas), una positiva y otra negativa, del mismo valor absoluto, separadas una distancia.

Se define momento del dipolo como

$$\vec{p} = q_+ \vec{l}$$

:posici3n de q_+ respecto de q_-

Fuerza sobre un dipolo bajo la accion de un campo exterior cte.

Un dipolo en un campo electrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar tiende a alinearse con el campo electrico.

Dielectricos.

Un material no conductor se denomina dielectrico.

Vamos a definir el momento dipolar de una distribuci3n de cargas tal que la suma de todas las cargas sea cero.

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Los dielectricos polares en presencia de campos E tienden a convertirse en dielectricos no polares ya que los dipolos se orientan en la dirección del campo. Para caracterizar este comportamiento se define el vector polarizacion P :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$
$$<<<<<<<<<< \vec{p} = \vec{P}_v$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{donde } \vec{E} = \text{campo electrico del dielectrico}$$
 $\epsilon_0 = \text{constante dielectrica del vacio}$

– en algunas superficies de dielectricos hay densidades superficiales de carga que llamaremos densidades superficiales de polarizacion y designaremos por s^* donde siendo $\vec{n}$ perpendicular a la superficie.

Una carga puntual crea un campo menor en un dielectrico que en el vacio. El hecho de que este campo sea menor se ve reflejado en una constante que introducimos y que será la constante dielectrica del dielectrico δ que será mayor que la del vacio $\delta\delta$. Cada dielectrico se caracteriza por su constante pero se acostumbra a utilizar lo que llamaremos constante relativa δr que viene dada por: $\epsilon = \epsilon_0 \delta r$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

22

si P fuese constante no habria densidad de polarizacion.

29