

1 La transformada z directa.

La transformada z juega el mismo papel en el análisis de señales de tiempo discreto y sistemas LTI que la transformada de Laplace en el análisis de tiempo continuo y sistemas LTI.

1.1 Definición.

La transformada z de una señal de tiempo discreto $x[n]$ se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$n \in \mathbb{Z}$ y $X(z)$

donde z es una variable compleja.

La transformada z de una señal $x[n]$ se denota por

$$X(z) \equiv Z\{x[n]\}$$

Mientras que la relación entre $x[n]$ y $X(z)$ se indica mediante

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

Desde un punto de vista matemático, la transformada z es simplemente una representación alternativa de la señal. De este modo el coeficiente de z^{-n} , para una transformada determinada, es el valor de la señal en el instante n . Y por tanto, el exponente de z contiene la información necesaria para identificar las muestras de la señal.

2

Ejemplo 1.

Determina la transformada z de la secuencia mostrada en la figura 1.

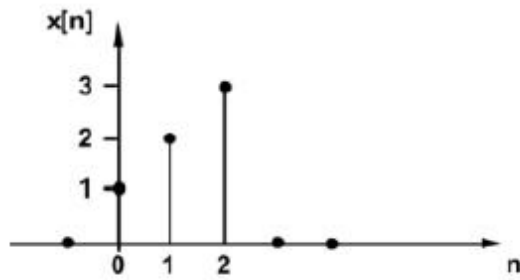


Fig. 1 Secuencia $x[n]$.

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = 1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2}$$

$$X(z) = 1 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2}$$

1.2 Región de convergencia de la transformada z.

Como se puede observar, la transformada z se puede expresar como una serie de potencias infinita y existe sólo para aquellos valores de z para los cuales converge la serie. De esta forma, se define la región de convergencia (ROC) de $X(z)$ como el conjunto de todos los valores de z para los cuales $X(z)$ adquiere valores finitos.

Siempre que se calcule la transformada z de una secuencia, se debe también indicar su correspondiente ROC. En el ejemplo 1, $X(z)$ toma valores finitos para todo z excepto para el punto $z=0$, y por tanto la ROC se define como $C-\{0\}$ (ver figura 2).

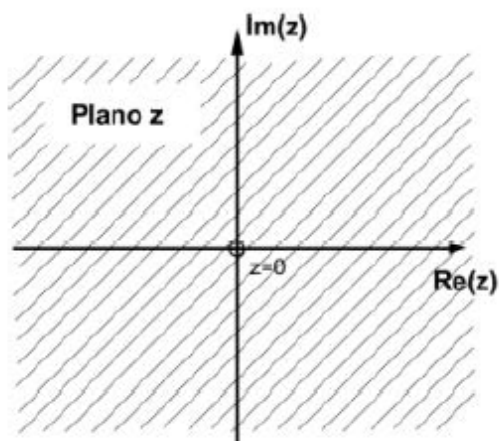


Fig. 2 Región de convergencia de la secuencia $x[n]$, del ejemplo 1.

Si se expresa ahora la variable compleja z en su forma polar lo que se tiene es:

$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \angle z$. De este modo $X(z)$ se puede expresar ahora como:

$$X(z) \Big|_{z=r \cdot e^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\theta n}$$

.

En la ROC de $X(z)$ se debe cumplir que $|X(z)| < \infty$, pero

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] \cdot r^{-n}|$$

Por tanto $|X(z)|$ es finito sólo si la secuencia $x[n] \cdot r^{-n}$ es absolutamente sumable. De esta forma, el problema de encontrar la ROC de $X(z)$ es equivalente a determinar el rango de valores de r para los cuales la secuencia $x[n] \cdot r^{-n}$ es absolutamente sumable.

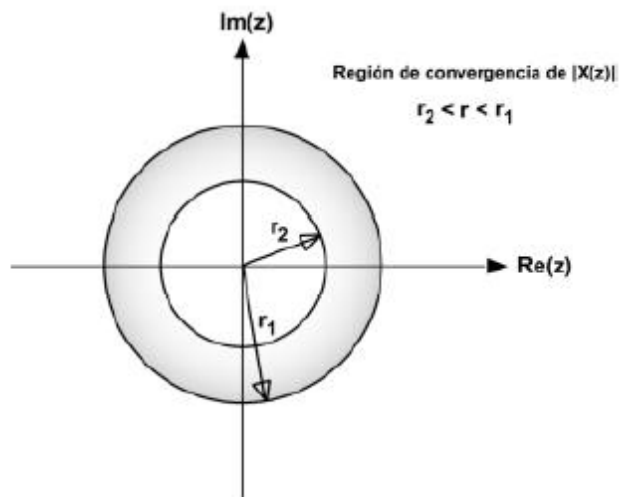


Fig. 3 Región de convergencia de $|X(z)|$.

Ejemplo 2.

Determinar la transformada z de la siguiente señal

$$x[n] = \alpha^n \cdot u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Esta señal recibe el nombre de señal causal ya que para valores negativos de n la

secuencia vale 0.

4

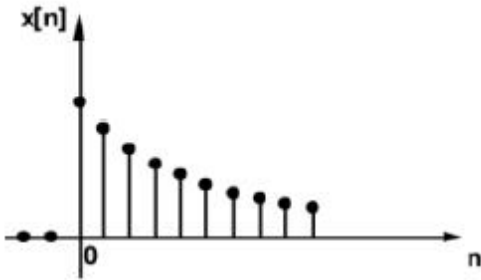


Fig. 4 Secuencia causal del ejemplo 2.

Aplicando la definición de la transformada z se tiene

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n$$

Si $|\alpha \cdot z^{-1}| < 1$ o equivalentemente, $|z| > |\alpha|$, esta serie de potencias converge a $1 / (1 - \alpha \cdot z^{-1})$. Por lo tanto, se tiene que la transformada z es

$$x[n] = \alpha^n \cdot u[n] \xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad \text{ROC : } |z| > |\alpha|$$

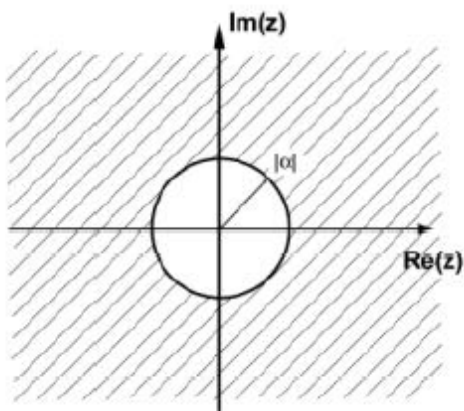


Fig. 5 Ejemplo2: Región de convergencia de X(z).

A continuación se citan algunas conclusiones acerca de la relación entre el tipo de señal bajo estudio, en el dominio del tiempo, y la ROC, en el dominio z:

- 1) La ROC de una señal limitada por la derecha ($\alpha^n u[n]$) es el interior de una circunferencia de radio r_1 , pudiendo incluir o no el punto $z=0$ (Ver

ejemplo 3).

2) La ROC de una señal limitada por la izquierda ($x[n] = 0$ para $n < 0$) es el exterior de una circunferencia de radio r_2 , pudiendo incluir o no el punto $z = r_2$ (Ver ejemplo 2).

3) Si $x[n]$ es una secuencia bilateral, esto es, una señal de duración infinita que no está limitada por la derecha ni por la izquierda, entonces la ROC es una región anular comprendida entre dos radios cualesquiera tales que $r_1 > r_2$.

4) Si $x[n]$ es una secuencia de duración finita entonces la ROC es todo el plano z excepto quizás los puntos $z = 0$ y/o $z = \infty$.

2 Propiedades de la transformada z .

En la tabla 1, se muestran de forma resumida las propiedades más importantes que cumple la transformada z .

PROPIEDAD	Secuencia	Transformada z	ROC
Linealidad	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	$\{R_{x_1} \cap R_{x_2}\} \subset ROC$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$ROC = R_x$
Escalado en frecuencia	$z_o^n x[n]$	$X(z / z_o)$	$ROC = z_o R_x$
Reflexión temporal	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$ROC = 1/R_x$
Diferenciación de $X(z)$	$n \cdot x[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$ROC = R_x$
Convolución de secuencias	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	$\{R_{x_1} \cap R_{x_2}\} \subset ROC$
Teorema del valor inicial	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

Tabla 1 Propiedades de la transformada z .

Propiedad de la convolución.

De todas esas propiedades destaca por su importancia y utilidad la propiedad de la convolución.

Para calcular la convolución de dos señales usando la transformada z , se deberán

seguir los siguientes pasos:

1. Calcular las transformadas z de las señales.

$$X_1(z) = Z\{x_1[n]\}$$

$$X_2(z) = Z\{x_2[n]\}$$

2. Multiplicar las dos transformadas z .

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

3. Encontrar la transformada z inversa de $X(z)$.

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$$