

INSTITUTO TECNOLÓGICO de Tlalnepantla.

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA.

MATERIA: ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS II

UNIDAD: III

TEMA: REDES DE DOS PUERTOS.

TRABAJO: REDES DE DOS PUERTOS.

REALIZO: ANÓNIMO

CARRERA: Ing. ELÉCTRICA.

SEMESTRE: 5º.

lunes, 04 de junio de 2001

1. REDES DE DOS PUERTOS

Considérese la red de dos puertos. Convencionalmente se supone que I_1 e I_2 fluyen hacia la red como se indica. Las variables son V_1 , V_2 , I_1 e I_2 . En la red de dos puertos hay dos variables independientes y dos dependientes, y se puede elegir un conjunto de dos variables independientes entre los seis conjuntos posibles: (V_1, V_2) , (I_1, I_2) , (I_1, V_2) , (V_1, I_2) , (V_1, I_1) y (V_2, I_2) . También se supondrá que los elementos son lineales.

En la tabla 18-1 se resumen las posibilidades entre las variables independientes (de entrada) y las variables dependientes asociadas. En la misma tabla se identifican también los nombres de los seis conjuntos de parámetros asociados del circuito. En el caso de transformadas fasoriales o de Laplace con el circuito de la figura 18-1, se tienen las conocidas ecuaciones de impedancia donde las variables de salida son V_1 y V_2 como sigue:

Tabla 18-1

Modelos de seis parámetros del circuito

Variables Variables

independientes dependientes Parámetros

(entradas) (salidas) del circuito

I_1, I_2 V_1, V_2 Impedancia Z

V_1, V_2 I_1, I_2 Admitancia Y

V_1, I_2 I_1, V_2 Híbrido g

I_1, V_2 V_1, I_2 Híbrido h

V_2, I_2 V_1, I_1 Transmisión T
 V_1, I_1 V_2, I_2 Transmisión inversa T

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (18-9)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (18-10)$$

Las ecuaciones para las admitancias son

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (18-11)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (18-12)$$

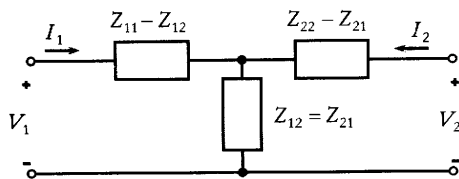
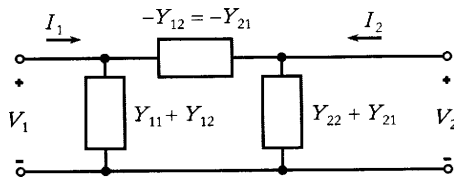
Si se prefiere, es adecuado utilizar las letras minúsculas z y y para los coeficientes de las ecuaciones 18-9 a 18-12. En la tabla 18-2 se resumen las ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos.

Cuando los elementos son lineales y no hay fuentes ni amplificadores operacionales dentro de la red de dos puertos, se puede demostrar, mediante el teorema de reciprocidad, que $Z_{12} = Z_{21}$ y $Y_{21} = Y_{12}$. En la figura 18-7 aparece un posible arreglo de un circuito pasivo como circuito 1. Planteando las dos ecuaciones de malla para esta figura pueden obtenerse fácilmente las ecuaciones 18-9 y 18-10. Por tanto, el circuito de la figura 18-7 puede representar los parámetros de impedancia. Un posible arreglo de los parámetros de admitancia en forma de circuito FI aparece en la figura 18-8.

Tabla 18-2

Ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos

Impedancia Z	$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$
Admitancia Y	$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$
Híbrido h	$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$
Híbrido inverso g	$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$
Transmisión T	$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$
Transmisión inversa T'	$\begin{cases} V_2 = A'V_1 - B'I_1 \\ I_2 = C'V_1 - D'I_1 \end{cases}$

**Figura 18-7** Circuito T representando los parámetros de impedancia.**Figura 18-8** Circuito Π representando los parámetros de admitancia.

Examinando la ecuación 18-9 se observa que Z_{11} puede medirse para obtener

$$V_1$$

$$Z_{11} = I_2 = 0$$

$$I_1$$

Por supuesto, $I_2 = 0$ implica que las terminales de salida están en circuito abierto. Por ello, los parámetros Z suelen llamarse *impedancias de circuito abierto*.

Los parámetros Y pueden medirse para determinar que

$$I_1$$

$$Y_{12} = V_1 = 0$$

$$V_2$$

En general, los parámetros de admitancia se llaman *parámetros de admitancia de corto-circuito*.

Ejemplo 18-3 Determinar los parámetros de admitancia e impedancia de la red 1 que aparece en la figura 18-9.

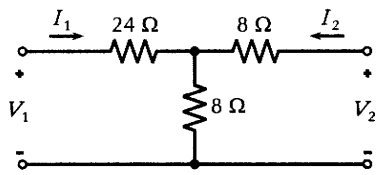


Figura 18-9 Circuito del ejemplo 18-3.

Solución: Los parámetros de admitancia utilizan las terminales de salida en cortocircuito y

$I_2 = 0$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}$$

Entonces,

los dos resistores de 8 Ω están en paralelo y $1/Y_{11} = 28 \Omega$. Por tanto,

$Y_{11} = 1/28 \text{ S}$

Para Y_{12} ,

$I_1 = 0$

$$Y_{12} = \frac{I_2}{V_1}$$

así que se cortocircuitan las terminales de entrada. Se obtiene así el circuito que aparece en la figura 18-10.

Empleando la división de corriente,

$$-I_1 = I_2 \left(\frac{8}{8 + 24} \right)$$

e

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

Por tanto,

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-(V_2/14)(1/4)}{V_2} = -\frac{1}{56} \text{ S}$$

Asimismo

$$Y_{21} = Y_{12} = -\frac{1}{56} \text{ S}$$

Por último, Y_{22} se obtiene de la figura 18-10 con el resultado

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

donde

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

Por tanto,

$$Y_{22} = \frac{1}{14} \text{ S}$$

Luego, en forma matricial se tiene $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$ o

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{1}{56} \\ -\frac{1}{56} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcularán los parámetros de impedancia. Se tiene

parámetros de impedancia. Se tiene

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Las terminales de salida están en circuito abierto, como en el circuito de la figura 18-9. Entonces,

$$Z_{11} = 24 + 8 = 32 \, \Omega$$

De igual modo, $Z_{22} = 16 \, \Omega$ y $Z_{12} = 8 \, \Omega$. Entonces, en forma matricial se tiene $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ o sea

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

=

Los métodos generales para determinar los parámetros Z y Y se resumen en las tablas 18-3 y 18-4, respectivamente.

Tabla 18-3

Método para obtener los parámetros Z de un circuito

Paso La Para calcular Z_{11} y Z_{21} , conectar una fuente de corriente V_1 a las terminales de entrada y poner en cortocircuito las terminales de salida.

Paso IB Calcular I_1 y V_2 y después $Z_{11} = V_1/I_1$ y $Z_{21} = V_2/I_1$

Paso IIA Para determinar Z_{22} y Z_{12} , conectar una fuente de corriente V_2 en las terminales de salida y poner en cortocircuito las terminales de entrada.

Paso IIB Calcular I_2 y V_1 y luego $Z_{22} = V_2/I_2$ y $Z_{12} = V_1/I_2$

Nota: $Z_{12} = Z_{21}$ solo si no hay fuentes dependientes ni amplificadores operacionales dentro de la red de dos puertos.

Tabla 18-4

Método para obtener los parámetros Y de un circuito

Paso JA Para determinar Y_{11} y Y_{21} , conectar una fuente de voltaje I_1 a las terminales de entrada y poner las terminales de salida en circuito abierto.

Paso IB Calcular V_1 e I_2 y luego $Y_{11} = I_1/V_1$ y $Y_{21} = I_2/V_1$

Paso IIA Para determinar Y_{22} y Y_{12} , conectar una fuente de voltaje V_2 a las terminales de salida y poner las terminales de entrada en circuito abierto.

Paso IIB Calcular I_1 y V_2 y luego $Y_{22} = I_2/V_2$ y $Y_{12} = I_1/V_2$.

Nota: $Y_{12} = Y_{21}$ solo si no hay fuentes dependientes ni amplificadores operacionales dentro de la red de dos puertos.

EJERCICIO 18-2

Determine los parámetros Z y Y en el circuito de la figura E 18-

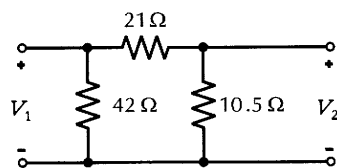


Figura E 18-2

Respuestas: $Z = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

1.1 PARAMETROS Z y Y PARA UN CIRCUITO CON 18-6 FUENTES DEPENDIENTES

Cuando un circuito incluye una fuente dependiente, es fácil utilizar los métodos de las tablas 18-3 o 18-4 para determinar los parámetros Z o Y. Cuando en el circuito hay una fuente dependiente, $Z_{21} = Z_{12}$ y $Y_{12} = Y_{21}$.

Ejemplo 18-4

Determinar los parámetros Z del circuito de la figura 18-11 cuando $m = \frac{2}{3}$.

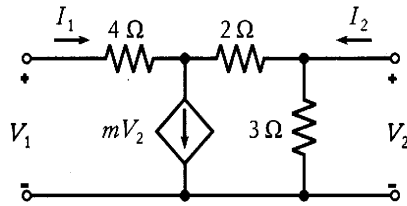


Figura 18-11 Circuito del ejemplo 18-4.

Solución: Los parámetros Z se determinan con el método de la tabla 18-3. Se conecta una fuente de voltaje ~ 1 y se abre el circuito en las terminales de salida, como aparece en la figura 18-12a.

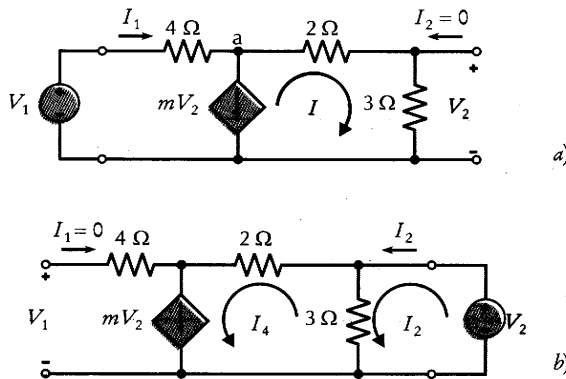


Figura 18-12 Circuito para determinar
a) Z_{11} y Z_{21} , y b) Z_{22} y Z_{12} .

La LKC en el nodo a conduce a

$$I_1 - mV_2 - I = 0 \quad (18-13)$$

La LKV en torno al lazo exterior es

$$V_1 = 4I_1 + 5I \quad (18-14)$$

Además, $V_2 = 3I$, o sea $I = V_2/3$; sustituyendo esto en la ecuación 18-13, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= mV_2 + \frac{V_2}{3} \\ &= \left(m + \frac{1}{3}\right)V_2 \end{aligned}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 1 \, \Omega$$

Sustituyendo $I = V_2/3$ y la ecuación 18-15 en la 18-14,

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 4I_1 + \frac{5V_2}{3} \\
 &= 4I_1 + \frac{5}{3}I_1
 \end{aligned}
 \tag{18-16}$$

De donde

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{17}{3} \Omega$$

Para obtener Z_{22} y Z_{12} , se conecta una fuente de voltaje ~ 2 a las terminales de salida y se abre el circuito en las terminales de entrada, como se muestra en la figura 18-12b. Pueden plantearse dos ecuaciones de malla con la dirección supuesta de la corriente, que son

$$V_1 + 5I_4 - 3I_2 = 0 \tag{18-17}$$

y

$$V_2 + 3I_4 - 3I_2 = 0 \tag{18-18}$$

Además, $I_4 = mV_2$, que substituida en la ecuación 18-18, da

$$V_2 + 3mV_2 - 3I_2 = 0$$

o sea

$$V_2 = \frac{3}{3} I_2$$

Por tanto,

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 1 \Omega$$

Substituyendo $I_4 = mV_2$ en la ecuación 18-17, se obtiene

$$V_1 + 5mV_2 = 3I_2$$

o sea

$$V_1 + 5mI_2 = 3I_2$$

Por tanto,

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = (3 - 5m) = -\frac{1}{3} \Omega$$

Entonces, en resumen, se tiene

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que $Z_{21} = Z_{12}$, dado que existe una fuente dependiente en el circuito.

1.2 PARAMETROS HÍBRIDOS Y DE TRANSMISIÓN

Las ecuaciones de los parámetros híbridos de dos puertos se basan en V_1 e I_2 como variables de salida, de modo que

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (18-19)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (18-20)$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (18-21)$$

Estos parámetros se emplean mucho en modelos de circuitos con transistores. El modelo de circuito híbrido aparece en la figura 18-13.

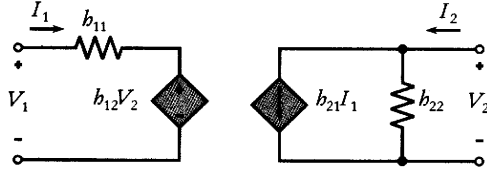


Figura 18-13 Modelo de parámetros h de un circuito de dos puertos.

Las ecuaciones de los parámetros híbridos inversos son

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (18-24)$$

En la figura 18-14 aparece el modelo de circuito híbrido inverso.

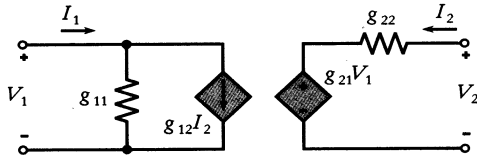


Figura 18-14 Modelo de circuito híbrido inverso (parámetro g).

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \quad (18-22)$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad (18-23)$$

Los parámetros híbridos e híbridos inversos incluyen tanto los parámetros de impedancia como los de admitancia, de ahí su nombre de híbrido. Los parámetros h_{11} , h_{12} , h_{21} y h_{22} representan, respectivamente, la impedancia de entrada en cortocircuito, la ganancia inversa de voltaje en circuito abierto, la ganancia directa de corriente en cortocircuito y la admitancia de salida en circuito abierto. Los parámetros g_{11} , g_{12} , g_{21} y g_{22} representan la admitancia de transferencia en cortocircuito, la ganancia directa de corriente en circuito abierto, la ganancia directa de voltaje en circuito abierto y la impedancia de salida en cortocircuito, respectivamente.

Los parámetros de transmisión se expresan como sigue:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (18-25)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (18-26)$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (18-27)$$

Los parámetros de transmisión se utilizan para describir la transmisión por cable, por fibra y por línea. Los parámetros A , B , C y D representan, respectivamente, la razón de voltajes en circuito abierto, la impedancia de transferencia negativa en cortocircuito, la admitancia de transferencia en circuito abierto y la razón de corriente negativa en cortocircuito. Los parámetros de transmisión suelen llamarse parámetros $ABCD$. En este libro, el interés se centrará en los parámetros híbridos y de transmisión, dado que se utilizan extensamente.

Ejemplo 18-5

- Determinar los parámetros h del circuito T de la figura 18-15 en términos de R_1 , R_2 y R_3 .
- Evaluar los parámetros cuando $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ y $R_3 = 6\Omega$.

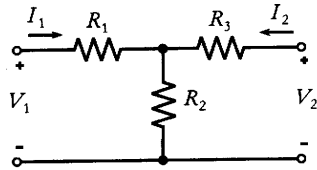


Figura 18-15 Circuito T del ejemplo 18-5.

Solución

- Primero, se calculan h_{11} y h_{21} cortocircuitando las terminales de salida y conectando una fuente de corriente de entrada I_1 , como se ve en la figura 18-16a. Por tanto,

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

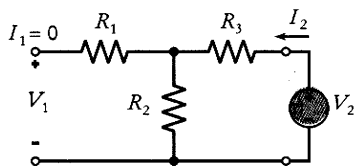
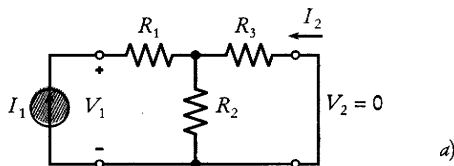


Figura 18-16 Circuitos para determinar a) h_{11} y h_{21} , y b) h_{22} y h_{12} .

Entonces, usando el principio del divisor de corriente,

$$I_2 = \frac{-R_2}{R_2 + R_3} I_1$$

De donde

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3}$$

El siguiente paso es redibujar el circuito con $I_1 = 0$ y conectar la fuente de voltaje V_2 como se ve en la figura 18-16b. Entonces se puede determinar h_{12} a partir del principio del divisor de voltaje, como sigue:

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Por último, se determina h_{22} a partir de la figura 18-16b como sigue:

Una propiedad de un circuito pasivo (sin fuentes entre los dos puertos) es que $h_{12} = -h_{21}$. (b) Cuando $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ y $R_3 = 6\Omega$,

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 3.4 \Omega$$

$$h_{21} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3} = -0.4$$

$$h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0.4$$

$$h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3} = 0.1 \text{ S}$$

1.3 RELACIONES ENTRE PARAMETROS DE DOS PUERTOS

Si existen todos los parámetros bipuerto en un circuito, es posible relacionar un conjunto de parámetros con otro, dado que las variables V_1 , I_1 , V_2 e I_2 están interrelacionadas por los parámetros. Se examinará primero la relación entre los parámetros Z y Y . La ecuación matricial de los parámetros Z es $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$, o sea

$\mathbf{I}$, o sea

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (18-28)$$

Asimismo, la ecuación de los parámetros Y es $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$, o bien

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (18-29)$$

Sustituyendo $\mathbf{I}$ de la ecuación 18-29 en la 18-28, se obtiene

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{Y}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \quad (18-30)$$

$$\text{adj } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{Y}}{\Delta Y} \quad (18-31)$$

Así, se puede obtener la matriz $\mathbf{Z}$ invirtiendo la matriz $\mathbf{Y}$. Por supuesto, de igual modo puede obtenerse la matriz $\mathbf{Y}$ si se invierte una matriz $\mathbf{Z}$ conocida. Es posible que un bipuerto tenga una matriz $\mathbf{Y}$ o una matriz $\mathbf{Z}$, pero no ambas. En otras palabras, en algunas redes pueden no existir $\mathbf{Z}'\mathbf{o}\mathbf{Y}'$.

Si se tiene una matriz $\mathbf{Y}$ conocida, la matriz $\mathbf{Z}$ se determina calculando el determinante ΔY de la matriz $\mathbf{Y}$ y la adjunta de la matriz $\mathbf{Y}$, que se define como sigue:

donde $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$

Tabla 18-5
Relaciones entre parámetros

	$\mathbf{Z}$		$\mathbf{Y}$		$\mathbf{h}$		$\mathbf{g}$		$\mathbf{T}$	
$\mathbf{Z}$	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$-\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta T}{C}$
	Z_{21}	Z_{22}	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
$\mathbf{Y}$	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$	$-\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta T}{B}$
	$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
$\mathbf{h}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta g}$	$\frac{g_{12}}{\Delta g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta T}{D}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
$\mathbf{g}$	$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta T}{A}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
$\mathbf{T}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta Y}{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta Y}{g_{21}}$	C	D

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}, \quad \Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}, \quad \Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \quad \Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}, \quad \Delta T = AD - BC.$$

Las relaciones de conversión de dos puertos para los parámetros $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$ y $\mathbf{T}$ aparecen en la tabla 18-5.

Ejemplo 18-6

Determinar los parámetros $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{h}$ si

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución Primero se determinarán los parámetros Y calculando el determinante como sigue:

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 18(9) - 6(6) =$$

Después, de la tabla 18-5, se obtiene

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14} \text{ S}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} = \frac{-1}{21} \text{ S}$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = \frac{18}{126} = \frac{1}{7} \text{ S}$$

Los parámetros h se obtienen de la tabla 18-5,

$$h_{11} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} = \frac{126}{9} = 14 \Omega$$

$$h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$h_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{9} \text{ S}$$

1.4 INTERCONEXIONES REDES DE DOS PUERTOS.

En muchos circuitos es común que haya varias redes de dos puertos interconectadas en paralelo o en cascada. La conexión *en paralelo* de dos puertos, que se muestra en la figura 18-17, exige que V_1 sea igual para cada uno de ellos.

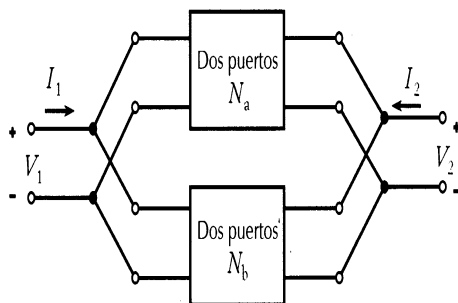


Figura 18-17 Conexión en paralelo de dos redes de dos puertos.

De igual modo, en el puerto de salida, V_2 es el voltaje de salida de ambas redes. La ecuación matricial que define a la red N_a es

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{Y}_a \mathbf{V}_a \quad (18-32)$$

Por tanto, los parámetros $\mathbf{Y}$ en la red formada por dos redes de dos puertos en paralelo se describen mediante la ecuación matricial

y para la red N_b

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \mathbf{V}_b \quad (18-33)$$

Además, la corriente total $\mathbf{I}$ es

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b$$

Asimismo, puesto que $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b = \mathbf{V}$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_a \mathbf{V} + \mathbf{Y}_b \mathbf{V} = (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b) \mathbf{V} = \mathbf{Y} \mathbf{V}$$

Por tanto, para determinar los parámetros $\mathbf{Y}$ de la red total se suman los parámetros $\mathbf{Y}$ de cada red. En general, la matriz de los parámetros $\mathbf{Y}$ de la conexión en paralelo es igual a la suma de las matrices de los parámetros $\mathbf{Y}$ de cada una de las redes de dos puertos.

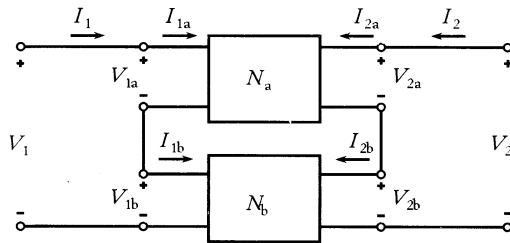


Figura 18-18 Conexión en serie de dos redes de dos puertos.

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{Z}_a \mathbf{I}_a \quad (18-35)$$

y

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Z}_b \mathbf{I}_b \quad (18-36)$$

Las corrientes en las terminales son

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_b$$

Por tanto, dado que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b$,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{Z}_a \mathbf{I}_a + \mathbf{Z}_b \mathbf{I}_b \\ &= (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b) \mathbf{I} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \end{aligned}$$

o sea que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b \quad (18-37)$$

En la figura 18-18 se muestra la interconexión en serie de dos redes de dos puertos. Se emplearán los parámetros $\mathbf{Z}$ para describir cada red y su combinación en serie. Las dos redes se describen mediante las ecuaciones matriciales

Por tanto, los parámetros $\mathbf{Z}$ de la red total son iguales a la suma de los parámetros $\mathbf{Z}$ de las dos redes. Cuando la salida de una red se conecta al puerto de entrada de la red siguiente, como aparece en la figura 18-19, se

dice que las redes están *en cascada*. Puesto que las variables de salida de la primera red se convierten en las variables de entrada de la segunda, se utilizan los parámetros de transmisión.

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix}$$

Para N_b ,

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

Se observa, además, que en la salida y en la entrada

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

En la conexión intermedia,

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \quad (18-38)$$

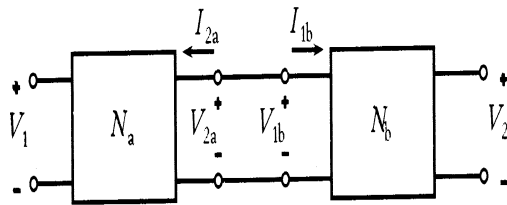


Figura 18-19 Conexión en cascada de dos redes de dos puertos.

La primera red de dos puertos, N_a , se representa por la ecuación matricial

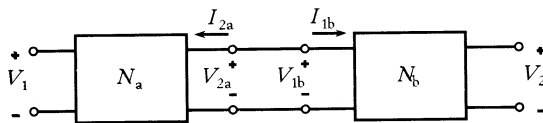


Figura 18-19 Conexión en cascada de dos redes de dos puertos.

Así, los parámetros de transmisión de la red total se calculan multiplicando las matrices, observando el orden pertinente.

Todos los cálculos precedentes para redes interconectadas presuponen que la interconexión no altera la naturaleza de los dos puertos en las subredes individuales.

Ejemplo 18-7 En la red T de la figura 18-20, a) determinar los parámetros Z, Y y Ty b) determinar los parámetros resultantes después de conectar dos bipuertos en paralelo y en cascada. Ambas redes son idénticas a la de la figura 18-1.

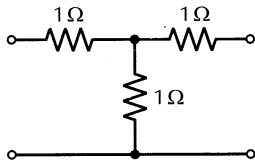


Figura 18-20 Red T del ejemplo 18-7.

Solución Primero, se calculan los parámetros Z de la red T. Examinando la red, se ve que

Después, usando los factores de conversión de la tabla 18-5,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dos redes idénticas conectadas en paralelo tendrán la siguiente matriz $\mathbf{Y}$ total:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b$$

Puesto que $\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_b$,

$$\mathbf{Y} = 2\mathbf{Y}_a = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Por último, cuando dos redes idénticas se conectan en cascada, se tiene la matriz total $\mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = 1 \, \Omega$$

$$Z_{22} = Z_{11} = 2 \, \Omega$$

1

Por tanto

(18-15)