

COLEGIO SAN GABRIEL

TRABAJO DE FISICA

TEMA : MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE(ENERGÍA Y PÉNDULOS)

1999–2000

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza hay muchos movimientos que se repiten a intervalos iguales de tiempo, estos son llamados movimientos periódicos. En Física se ha idealizado un tipo de movimiento oscilatorio, en el que se considera que sobre el sistema no existe la acción de las fuerzas de rozamiento, es decir, no existe disipación de energía y el movimiento se mantiene invariable, sin necesidad de comunicarle energía exterior a este. Este movimiento se llama *MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE(MAS)*

El movimiento Armónico Simple, un movimiento que se explica en el movimiento armónico de una partícula tiene como aplicaciones a los péndulos, es así que podemos estudiar el movimiento de este tipo de sistemas tan especiales, además de estudiar las expresiones de la Energía dentro del Movimiento Armónico Simple.

PÉNDULO SIMPLE O PÉNDULO MATEMÁTICO

Se denomina péndulo a un cuerpo que puede girar a un eje que no pase por su centro de masas o de gravedad, describiendo un movimiento armónico simple. El péndulo simple o matemático es aquel que se considera formado por una masa puntual o de pequeñas extensiones suspendida del extremo de un hilo, que se supone inextensible y sin masa, de forma que pueda oscilar respecto al otro extremo del hilo que se supone fijo.

El cuerpo estará en la posición de equilibrio cuando el centro de gravedad de la masa m esté en la vertical del punto de suspensión O , es decir, cuando la masa esté en la posición C . Si llevamos m al punto A y lo abandonamos, el péndulo comenzará a oscilar describiendo el arco ABC ; debido a la velocidad adquirida sobrepasará C y llegará hasta D , punto en el que la velocidad volverá a anularse y comenzará el descenso en sentido contrario. Si no existiera resistencia del aire ni rozamiento en el punto O , el movimiento sería indefinido, pero en la práctica esta inexistencia de fuerzas resistentes es imposible y el movimiento se va amortiguando hasta pararse.

El movimiento pendular se irá repitiendo de forma periódica, por lo menos idealmente. También se lo denomina movimiento oscilatorio.

La justificación teórica de este movimiento es sencilla.

Si observamos la figura veremos que: el peso P e la masa puntual (o pequeña esfera) m , cuando está en la posición A , se descompone en dos fuerzas, F y T . La fuerza T es asumida o contrarrestada por la tensión del hilo suspendido en O . La fuerza F hará que la masa se desplace en su dirección pues no hay nada que equilibre su efecto.

La fuerza F irá disminuyendo a medida que la masa se acerque a la posición de equilibrio, tal como muestra en la posición B la figura, hasta que la única componente sea vertical (posición C). Superada la posición de equilibrio a causa de la energía cinética adquirida en su caída, la masa ascenderá hasta D con una fuerza en oposición cada vez mayor, que alcanzará en dicho extremo de la trayectoria, para volver a descender hasta C ,

y así sucesivamente se irá repitiendo el movimiento de vaivén.

• ECUACIÓN DEL PÉNDULO SIMPLE

PERÍODO

Como se ha indicado la masa del péndulo simple está sometida a una fuerza recuperadora variable con la distancia a la posición de equilibrio, es decir, $F = -kx$; siendo x el arco de circunferencia medido sobre la trayectoria circular del móvil m , como se indica en las siguientes ecuaciones, en la que además se puede observar lo siguiente:

$$F = -kx \Rightarrow F = -k.l.$$

Por otra parte:

$$F = -mg \sin \theta$$

(El signo es negativo porque se considera a F como una fuerza recuperadora y por lo tanto opuesta al movimiento). Esta fórmula nos indicaría que la fuerza no es proporcional al ángulo sino a $\sin \theta$, con lo cual no podemos decir que el movimiento sea totalmente armónico simple, pero para ángulos no muy grandes, es decir para amplitudes pequeñas, que es el caso supuesto para péndulos simples, podemos decir que $\sin \theta \approx \theta$, con lo cual:

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg \theta$$

Igualando ambas expresiones:

$$-k.l. = -mg \theta \Rightarrow k.l = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{l}$$

l

De donde se puede concluir que para pequeñas amplitudes, la constante de proporcionalidad del movimiento es directamente proporcional a la masa, e inversamente proporcional a la longitud del péndulo, y la fuerza quedará reflejada en la expresión matemática:

$$F = -\frac{mg}{l} \cdot x \quad (J)$$

l

De esta ecuación para el péndulo simple de pequeña amplitud podemos deducir el período del péndulo matemático. Si recordamos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

k

Para este caso con $k = \frac{mg}{l}$ obtendremos:

l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

mg

l

es decir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ (s)}$$

g

Siendo l la longitud del péndulo y g la gravedad del lugar donde oscile.

PÉNDULO DE TORSIÓN

Se dice que un cuerpo se desplaza con movimiento armónico de rotación en torno a un eje fijo cuando el ángulo de giro resulta función sinusoidal del tiempo y el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza recuperadora cuyo momento es proporcional a la elongación angular. Las ecuaciones que rigen este movimiento se obtienen por sustitución de las magnitudes lineales del movimiento armónico simple por las respectivas magnitudes angulares. Así pues, la elongación angular será:

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t$$

Donde θ es la elongación angular y θ_0 la amplitud de la oscilación. Por derivación de la ecuación anterior respecto al tiempo puede obtenerse la expresión de la velocidad angular y de esta a su vez la de la aceleración angular ($\ddot{\theta}$):

$$\text{Vel. Angular} = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \omega \cos \omega t$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$= \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \theta$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$

La aceleración expresada en función del período puede también formularse como:

$$= -\frac{4\pi^2}{T^2} \theta$$

T^2

Un péndulo de torsión es un sistema físico formado por un filamento metálico unido por uno de sus extremos a un soporte fijo y por el otro al centro de gravedad de un disco oscilante en el plano horizontal. Por producirse un movimiento armónico de rotación, en el péndulo de torsión el período de oscilación vendrá dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}}$$

k'

ENERGIA EN EL OSCILADOR ÁRMONICO SIMPLE

Para estirar o comprimir un resorte se debe efectuar trabajo. Por lo tanto, se almacena energía potencial en un

resorte estirado o comprimido. Pero antes veamos el movimiento de un péndulo simple:

La energía potencial es:

$$EP = 1/2KX^2 \quad (1)$$

Así, ya que la energía mecánica total E es la suma de las energía cinética y potencial, tenemos que

$$EP = 1/2mV^2 + 1/2kX^2 \quad (2)$$

Donde v es la velocidad de la masa m cuando está a una distancia x de la posición de equilibrio. Siempre que no haya fricción, la energía mecánica total E permanece constante. Cuando la masa oscila para uno y otro lado, la energía se intercambia continuamente de energía potencial a energía cinética, y viceversa y es la misma cuando está comprimido o estirado el resorte hasta la amplitud total. En esos puntos extremos, la masa se detiene momentáneamente al cambiar de dirección, de modo que $v = 0$ y

$$EP = 1/2m(0)^2 + 1/2kA^2 = 1/2K A^2 \quad (3)$$

Así, la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud. En el punto de equilibrio, $x = 0$, toda la energía es cinética:

$$E = 1/2mV_0^2 + 1/2k(0)^2 = 1/2M V_0^2 \quad (5)$$

en la que V_0 representa la velocidad máxima durante el movimiento que se da cuando $x = 0$. En los puntos intermedios, la energía es en parte cinética y en parte potencial. Combinando la ecuación 2 y 3, podemos deducir una ecuación útil para la velocidad como función de la posición X :

$$1/2mV^2 + 1/2kx^2 = 1/2MA^2 \quad (6)$$

Despejamos a V^2 :

$$V^2 = K/M(A^2 - x^2) = K/m \cdot A^2(1 - x^2/A^2) \quad (7)$$

De acuerdo con la ecuación 3 y 4, tenemos que $1/2mV_0^2 = 1/2mKA^2$, y entonces $V_0^2 = (k/m)A^2$. Introduciendo esto en la ecuación anterior, y sacando raíz cuadrada, llegamos a

$$V = \pm V_0 \sqrt{1 - x^2/A^2} \quad (8)$$

Esto da la velocidad del objeto en cualquier posición X . El objeto se mueva de un lado para otro, y entonces su velocidad puede ser en dirección positiva o negativa, pero su magnitud solo depende de la magnitud de x .

Entonces podríamos decir que se demuestra con facilidad que la ecuación 2 también vale para un resorte vertical. Si tomamos como punto de referencia para calcular la EP, la longitud natural del resorte, como en la Fig. 11-3a, entonces, la EP en la nueva posición vertical de equilibrio (fig 11-3b) es $EP = (1/2kX_0^2 - mgX_0)$, en la cual incluimos la EP elástica y gravitacional. La EP cuando el resorte está estirado una distancia adicional x , como en la figura 11-3c, es $EP = 1/2k(X + X_0)^2 - mg(X + X_0)$: La diferencia entre ellas es (recuérdese $X_0 = mg/k$):

$$\begin{aligned} 1/2k(X + X_0)^2 - mg(X + X_0) - 1/2kX_0^2 - mgX_0 &= 1/2kX^2 + KX X_0 - mgX \\ &= 1/2kX^2 + KX(mg/k) - mgX \end{aligned}$$

$$= 1/2kx^2$$

Así la Energía potencial del sistema, en la reacción con la posición vertical del equilibrio se da por $1/2kx^2$, y la ecuación 2 se conoce que es válida para un resorte vertical, al igual que para uno que oscile en dirección horizontal.

ENERGÍA DEL MAS

La fuerza que actúa sobre una partícula que vibra con MAS depende de la posición ($F = -kx$), entonces se da que esta será una fuerza conservativa, que mantiene constante la energía mecánica total del sistema:

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte.}$$

La energía cinética en un instante cualquiera es

$$E_c = 1/2m.v^2, \text{ donde } v = \pm \omega A \cos(\omega t + \phi) \text{ y } m = K/\omega^2$$

$$E_c = 1/2(k/\omega^2) \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Como $\cos^2(\omega t + \phi)_{\text{max}} = 1$, tenemos:

$$E_{c \text{ max}} = 1/2m.\omega^2 A^2 = 1/2kA^2$$

Durante el movimiento, la energía cinética varía entre cero y el valor máximo indicado.

La energía potencial en un instante cualquiera es:

$$E_p = 1/2kx^2, \text{ donde } x = \pm A \sin(\omega t + \phi)$$

$$E_p = 1/2k [A^2 \sin^2(\omega t + \phi)]$$

$$E_p = 1/2k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

Como $\sin^2(\omega t + \phi)_{\text{max}} = 1$, tenemos:

$$E_{p \text{ max}} = 1/2kA^2$$

Durante el movimiento la energía potencial varía entre cero y el valor máximo indicado.

En el transcurso de la oscilación hay un continuo intercambio de energía potencial y cinética.

Cuando la partícula se aleja de la posición de equilibrio, la energía potencial incrementa su valor, o a expensas de una disminución de la energía cinética y viceversa.

Se explica en el siguiente gráfico:

Generalizando se tendrá que:

$$E_{m \text{ max}} = 1/2mV_x^2 + 1/2kx^2 = 1/2mV_{\text{max}}^2 = 1/2k A^2$$

Donde V_x es la velocidad de la partícula en la posición X , y V_{max} es la velocidad de la partícula en la posición de equilibrio ($V_{\text{max}} = \omega A$).

BIBLIOGRAFÍA:

- WWW.ALTAVISTA.COM/APUNTES DE FISICA
- <http://www.cbb.ulpdc.es/fisica/docencia/euitt/apuntes/ondas/ondasweb.html>
- ZEMANSKY, Física General, Páginas 212, 213, 214, 215, 216
- VALLEJO, Física, Tomo 2.
- BLATT, Física, MAS

$$X = \text{arco CD} = \text{radio} \cdot \text{ángulo} = l.$$

$$F = P \sin \theta = mg \sin \theta$$

$$T = P \cos \theta = mg \cos \theta$$

