

UNIDAD IV

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN 'n'

Son de la forma $F(x, y(x), y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Solución general: $(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ (Familia n-paramétrica)

Algunos **casos especiales**:

1) $y^{(n)} = K$ $K = \text{cte}$; $K \in \mathbb{R}$ Se resuelve integrando n veces

2) $y^{(n)} = f(x)$ Se resuelve integrando n veces

3) falta la función incógnita $y(x)$ (2º orden) $F(x, y', y'') = 0$

Sustitución para disminuir el orden en 1: $y' = P(x)$! $y'' = P'(x)$

Nos queda: $F(x, P(x), P'(x)) = 0$ (ec. Diferencial de 1º orden)

Cuando se resuelve queda como solución general:

$$(x, P(x), c_1) = 0 \text{ ! } (x, y', c_1) = 0 \text{ (ec. diferencial de 1º orden)}$$

Vuelvo a resolver la nueva ecuación:

La solución general será: $(x, y, c_1, c_2) = 0$

4) Falta la variable independiente x (2º orden) $F(y, y', y'') = 0$

Sustitución: $y'(x) = P(y)$ siendo y función de x ($y = y(x)$)

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dP(y)}{dx} = \left(\frac{dP}{dy} \right) \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) = \left(\frac{dP}{dy} \right) \cdot y'$$

(Aplico regla de la cadena)

Como $y' = P(y)$, entonces: $y''(x) = P(y) \cdot \left(\frac{dP}{dy} \right)$

Reemplazando y' e y'' nos queda $F(y(x), P(y), P \cdot \left(\frac{dP}{dy} \right)) = 0$

Lo que es una ecuación diferencial de 1º orden, la que resolviendo nos queda como solución general:

$$(y(x), P(y), c_1) = 0$$

Como $P(y) = y'(x)$ reemplazo:

$$(y(x), y'(x), c_1) = 0$$

Vuelve a quedar una ecuación diferencial de 1º orden, que resolviendo nos da la solución general final:

$$(x, y(x), c_1, c_2) = 0$$

I) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN 'n'

Se llaman lineales porque la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, presentan esta forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas con $a_n(x) \neq 0$

si $f(x) \equiv 0$ la ecuación se llama LINEAL HOMOGÉNEA O INCOMPLETA

Si $f(x) \neq 0$ la ecuación se llama COMPLETA O NO HOMOGÉNEA

PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN 'n'

Estas ecuaciones son de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (I)$$

Donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son funciones continuas de x y $a_n \neq 0$.

Sus propiedades son:

1) $y=0$ es solución trivial de la ecuación (I), ya que $y', y'', \dots, y^{(n)} = 0$ y al reemplazar en la ecuación dada se convierte en la identidad $0 = 0$.

2) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones particulares de la ecuación (I), entonces su suma también es solución de dicha ecuación.

Dem:

Por hipótesis, $y_1(x)$ es solución de la ecuación (I), luego:

$$a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$$

Análogamente, $y_2(x)$ también es solución de la ecuación (I):

$$a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$$

Veamos si $y_1(x) + y_2(x)$ también es solución, entonces reemplazamos en (I).

$$a_n (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1} (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_2 (y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_0 (y_1 + y_2) = 0$$

Por propiedad de la derivada de una suma:

$$a_n y_1^{(n)} + a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_2 y_1'' + a_2 y_2'' + a_1 y_1' + a_1 y_2' + a_0 y_1 + a_0 y_2 = 0$$

Por prop conmutativa y asociativa de la suma:

$$(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) = 0 \text{ (por hipótesis)}$$

+

$$(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = 0 \text{ (por hipótesis)}$$

$$= 0$$

Luego resulta que toda la ecuación queda igualada a cero, por lo que $y_1(x) + y_2(x)$ es también solución de la ecuación (I)

3) Si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial (I), entonces $C y_1(x)$ con C constante también es solución de dicha ecuación

Dem:

Por hipótesis, $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial (I), por lo tanto:

$$a_n(x) y_1^{(n)} + a_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0$$

Veamos si $C y_1(x)$ con C constante es solución de la ecuación (I):

$$a_n(x) C y_1^{(n)} + a_{n-1}(x) C y_1^{(n-1)} + \dots + a_2(x) C y_1'' + a_1(x) C y_1' + a_0(x) C y_1$$

Por propiedad de la derivada del producto de constante por función sacando factor común C :

$$C [a_n(x) y_1^{(n)} + a_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1] = C \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto $C y_1(x)$ es también solución de la ecuación diferencial (I)

Estas tres propiedades aseguran que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es un subespacio del espacio vectorial de las funciones continuas.

Como estamos trabajando en el espacio vectorial de las funciones continuas, recordemos la definición de función linealmente independiente (L.I):

Dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.I si $\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) = 0$ solo para $\lambda = \mu = 0$

Generalización para n funciones:

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son L.I si $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0$ solo para $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ (coef. de la comb. lineal) ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$)

Otra definición equivalente para funciones L.I es:

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.I si su razón o cociente es una función de x distinta de constante, es decir:

$$y_1(x)/y_2(x) = g(x) \text{ " } K \text{ (cte)}$$

Observación:

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.D, entonces el cociente $y_1(x)/y_2(x) = K$ (cte)

DETERMINANTE DE WRONSKI O WRONSKIANO

Definición:

Al determinante formado por dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y sus derivadas primeras $y_1'(x)$ y $y_2'(x)$ se lo llama DETERMINANTE DE WRONSKI O WRONSKIANO

Se simboliza: $W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Generalización:

Si tenemos n funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{vmatrix}$$

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano:

1) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones L.D en un intervalo $[a, b]$, entonces el wronskiano de y_1 e y_2 se anula en todo punto de dicho intervalo (es idénticamente nulo).

Dem:

Por hipótesis $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.D, es decir $y_1(x)/y_2(x) = K(\text{cte})$ o $y_1(x) = K \cdot y_2(x)$

$$\text{Derivamos: } y_1'(x) = K \cdot y_2'(x)$$

Armamos el wronskiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K \cdot y_2(x) & y_2(x) \\ K \cdot y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = K \cdot y_2 \cdot y_2' - K \cdot y_2' \cdot y_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K \cdot y_2(x) & y_2(x) \\ K \cdot y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

2) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones L.I en $[a, b]$, entonces $W(y_1(x), y_2(x))$ no se anula en ningún punto del intervalo

Dem:

Intentaremos demostrarlo por el absurdo. Supongamos que $w(y_1, y_2)$ se anula en algún punto del $[a, b]$, es decir:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$$

como por hipótesis $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.I entonces $y_1(x) \neq 0$ e $y_2(x) \neq 0$. Podemos dividir por $y_1^2(x)$:

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2) / y_1^2(x) = 0$$

El primer miembro de la igualdad es la derivada del cociente entre y_2 e y_1 :

$$(y_2/y_1)' = 0 \quad \text{! integro !} \quad y_2/y_1 = K \text{ (cte)}$$

$$\text{Luego: } y_2 = K \cdot y_1$$

Esto significa que y_1 e y_2 son L.D, lo que contradice la hipótesis, luego, el $W(y_1, y_2)$ no se anula en ningún punto.

Conclusión:

La solución general de la ecuación $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ es una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes, es decir:

$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ siendo $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funciones L.I y soluciones particulares de la ecuación.

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES, HOMOGENEAS, DE ORDEN 'N', CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} ; a_n \neq 0$

Comenzamos el análisis con las de primer orden, es decir:

$$a_1 y' + a_0 y = 0$$

O bien $a y' + b y = 0$ con $a, b \in \mathbb{R} ; a \neq 0$

Es una ecuación diferencial a variables separables:

$$a \cdot (dy/dx) = -b \cdot y$$

integro:

$$\int dy/y = -\int b/a \, dx$$

$$\ln y = (-b/a)x + K$$

Por definición de logaritmo

$$(-b/a)x + K$$

$$Y = e$$

Por prop de distribución de potencias de igual base

$$(-b/a)x^k$$

$$k Y = e \cdot e$$

Puesto que e es igual a una constante tenemos que la solución general será:

$$(-b/a)x$$

$$Y = C \cdot e \quad C = \text{constante}$$

$$r x$$

Observamos que una solución particular es de la forma $y = e$ con $r = \text{cte}$.

Es lógico pensar que para la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$r x$$

Con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ una solución también sea de la forma $y_1 = e$

Derivamos dos veces y reemplazamos en la ecuación de 2º orden:

$$r x \quad r x$$

$$y_1' = r \cdot e; \quad y_2' = r^2 \cdot e$$

$$r x \quad r x \quad r x$$

$$a \cdot r^2 \cdot e + b \cdot r \cdot e + c \cdot e = 0$$

$$r x \quad r x$$

$$e (a \cdot r^2 + b \cdot r + c) = 0 \quad e \neq 0$$

Luego $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$. Esta ecuación se llama **ecuación o polinomio característico**

Se presentan tres casos:

1º CASO: la ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas ($r_1 \neq r_2$), r_1 y $r_2 \in \mathbb{R}$. $r_1 x \quad r_2 x$

Las dos soluciones particulares de la ecuación son: $y_1 = e$ y $y_2 = e$

Analizamos si y_1 y y_2 son L.I:

$$r_1 x \quad r_2 x \quad r_1 x - r_2 x \quad (r_1 - r_2)x$$

$$Y_1(x)/Y_2(x) = e/e = e = e^{\text{constante}} \text{ pues } r_1 \neq r_2 \quad (r_1 - r_2 \neq 0)$$

$$r_1 x \quad r_2 x \quad r_1 x \quad r_2 x$$

Luego e^x y $e^{r_2 x}$ son L.I (base={ e, e^{r_2} })

El conjunto de todas las soluciones es una combinación lineal de dos soluciones L.I

$$r_1 x \quad r_2 x$$

Solución General: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2º CASO: las raíces de la ecuación característica son reales e iguales ($r_1 = r_2$)

$$r_1 x \quad r_2 x$$

Las soluciones particulares $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son la misma solución:

$$r_1 x \quad r_2 x \quad (r_1 - r_2)x$$

$e^{r_1 x} / e^{r_2 x} = e^{(r_1 - r_2)x} = 1$ son L.D

$$r_1 x$$

Necesitamos hallar otra solución L.I con $e^{r_1 x}$, es decir, el cociente entre y_1 y y_2 debe ser una función de x distinta de constante $u(x)$:

$$y_2(x)/y_1(x) = u(x)$$

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$$

$$r_1 x$$

$$y_2(x) = u(x) \cdot e^{r_1 x}$$

Debemos determinar cual es la función $u(x)$ tal que $y_2(x)$ sea solución de la ecuación diferencial.

Derivamos $y_2 = u(x) \cdot e^{r_1 x}$ dos veces y reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$r_1 x \quad r_1 x \quad r_1 x$$

$$y_2' = u' \cdot e^{r_1 x} + u \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} = e^{r_1 x} (u' + u \cdot r_1)$$

$$r_1 x \quad r_1 x \quad r_1 x \quad r_1 x \quad r_1 x$$

$$y_2'' = u'' \cdot e^{r_1 x} + u' \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + u' \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + u \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 x} = e^{r_1 x} (u'' + 2u' \cdot r_1 + u \cdot r_1^2)$$

$$r_1 x$$

$$e^{r_1 x} (a \cdot u'' + 2a \cdot u' \cdot r_1 + a \cdot u \cdot r_1^2 + b \cdot u' + b \cdot u \cdot r_1 + c \cdot u) = 0$$

Reagrupando y sacando factor común a las derivadas de u , y como $e^{r_1 x} \neq 0$, tenemos:

$$a \cdot u'' + (2a \cdot r_1 + b) \cdot u' + (a \cdot r_1^2 + b \cdot r_1 + c) \cdot u = 0 \quad (\text{ec. Diferencial con función incógnita } u(x))$$

Como r_1 es raíz de la ecuación característica entonces $a.r_1^2 + b.r_1 + c = 0$ (A)

Además r_1 es raíz doble. Por propiedad de las raíces de una ecuación de 2º grado, la suma de las mismas es $-b/a$. En nuestro caso:

$$r_1 + r_1 = -b/a \quad 2.r_1 = -b/a$$

$$2.r_1.a = -b$$

$$2.a.r_1 + b = 0 \text{ (B)}$$

Según (A) y (B) la ecuación diferencial en $u(x)$ se reduce a:

$$a.u'' = 0 \quad a \neq 0$$

$$u'' = 0$$

Se resuelve integrando dos veces:

$$u' = C_1$$

$$u = C_1x + C_2 \quad \text{! es la función } u(x) \text{ buscada}$$

$$r_1x$$

$$\text{Reemplazando en } y_2: y_2 = (C_1x + C_2).e$$

$$r_1x$$

¿Bajo que condiciones sobre C_1 y C_2 y_2 es L.I con $y_1 = e$?

$$C_1 \neq 0 \text{ para cualquier } C_2 \in \mathbb{R}$$

De todas las posibilidades elegimos $C_1=1$ y $C_2=0$, es decir resulta $u(x) = x$ y luego

$$r_1x \quad r_1x \quad r_1x$$

$$Y_2 = x.e, \text{ la base es } \{e, x.e\}$$

La solución general es:

$$r_1x \quad r_1x \quad r_1x$$

$$Y = C_1.e + C_2.x.e = e(C_1 + C_2.x)$$

3º CASO: Las raíces de la ecuación característica son complejos conjugados

$$r_1 = +i; r_2 = -i, \quad , \quad \mathbb{R}, \quad \neq 0$$

Conceptos previos al tercer caso:

Definición: toda función de la forma $u(x) + v(x).i$ se llama función compleja de variable real (x es la variable

real, $x \in \mathbb{R}$)

$-u(x)$ se llama componente real

$-v(x)$ se llama componente imaginaria

Propiedad: Si una función compleja de variable real $u(x)+v(x).i$ es solución de la ecuación diferencial $a.y''+b.y'+cy=0$, entonces sus componentes real ($u(x)$) e imaginaria ($v(x)$) separadamente también son soluciones de dicha ecuación.

Demostración:

Por hipótesis $u(x)+v(x).i$ es solución de la ecuación diferencial, es decir:

$$A(u+v.i)'' + b(u+v.i)' + c(u+v.i) = 0$$

Por propiedad distributiva de la derivación:

$$a.u'' + a.v''.i + b.u' + b.v'.i + c.u + c.v.i = 0$$

por prop.conmutativa, asociativa y factor común i

$$(a.u'' + b.u' + c.u) + (a.v'' + b.v' + c.v).i = 0$$

Llamamos al primer termino de la suma $A(x)$ y al segundo $B(x)$.

Luego sabemos que

$$A(x)+B(x).i = 0 + 0.i \text{ si y solo si } A(x)=0 \text{ y } B(x)=0$$

Por lo tanto:

$$a.u''+b.u'+c.u = 0 \quad ! \quad u(x) \text{ es solución de la ec.diferencial } a.y''+b.y'+cy=0$$

y

$$a.v''+b.v'+c.v = 0 \quad ! \quad v(x) \text{ es solución de la ec.diferencial } a.y''+b.y'+cy=0$$

Las soluciones particulares de $a.y''+b.y'+cy=0$ son:

$$y_1(x) = e^{\lambda x} ; y_2(x) = e^{\mu x}$$

Analizamos si son L.I:

$$y_1(x) = e^{\lambda x} ; y_2(x) = e^{\mu x}$$

$$y_1(x)/y_2(x) = e^{\lambda x} / e^{\mu x} = e^{(\lambda - \mu)x}$$

$$= e^{2x}$$

Como $2 \neq 0$ entonces e^{2x} cte y $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son L.I

$$(+i)x$$

Tratemos de expresar a e de otra forma usando la formula de Euler que dice:

$$i$$

$$e = \cos x + i \cdot \sin x$$

Aplicada a nuestro caso:

$$(+i)x \quad x + ix \quad x \quad ix \quad x \quad x \quad x$$

$$e = e = e \cdot e = e (\cos x + i \cdot \sin x) = e \cos x + e \sin x \cdot i =$$

$$= u(x) + v(x) \cdot i \text{ (función compleja de variable real } x \text{)}$$

$$x$$

Por la propiedad vista, como $u(x) + v(x) \cdot i$ es solución de la ecuación, entonces $e \cdot$

$$x$$

$\cos x$ y $e \cdot \sin x$ también son soluciones de la ecuación diferencial dada.

Veamos nuevamente si son L.I:

$$e \cos x / e \sin x = \cos x / \sin x$$

Como " $0 \neq \cos x / \sin x$ " cte $\neq$ son L.I

$$(-i)x$$

Para $y_2(x) = e$ resulta, sabiendo que $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$x \quad x \quad x$$

$$e (\cos x - i \cdot \sin x) = e \cos x - e \sin x \cdot i$$

Siendo el primer miembro de la resta $u(x)$ y el segundo $v(x)$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es una combinación lineal

$$x \quad x$$

de dos soluciones L.I. en nuestro caso esas soluciones son $e \cos x$ y $e \sin x$

$$x \quad x$$

$$\text{luego } y = C_1 \cdot e \cos x + C_2 \cdot e \sin x$$

$$x$$

x

$$y = e(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

CONCLUSION (GENERALIZACION):

Sea $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ($a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$)

Se arma la ec. característica: $a_n r^n + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

Se hallan las raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$ y de ahí se discrimina:

1) Si las raíces son reales y distintas $r_1, r_2, \dots, r_n$, entonces la solución general es: $r_1 x \ r_2 x \ r_n x$

$$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

2) Si r_1 es de multiplicidad n (caso límite: todas las raíces son iguales)

$$r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x \ r_1 x$$

$$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + \dots + C_n x^{n-1} e^{r_1 x} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1})$$

3) Si las raíces son complejos conjugados

x

$$Y = e(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

4) Si existen dos o mas tipos de raíces de las nombradas, entonces se suman las soluciones particulares de cada tipo

II) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS DE ORDEN 'N'

Son de la forma: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ (I)

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son funciones continuas de x , $a_n \neq 0$, $f(x) \neq 0$

Propiedad:

La solución general de la ecuación diferencial (I) es igual a la suma entre la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a (I) y una solución particular de la ecuación (I):

$$Y = y_h + y_p$$

Demostración:

Llamamos y_h a la solución general de la ec. diferencial homogénea asociada a (I), e y_p a una solución particular de la ecuación (I). Debemos demostrar que se cumple $y = y_p + y_h$

Por hipótesis y_h es solución de la ec. diferencial homogénea asociada a (I):

$$(n) \ (n-1)$$

$$A_n y_h + a_{n-1} y_h + \dots + a_2 y_h'' + a_1 y_h' + a_0 y_h = 0$$

También por hipótesis y_p es solución de la ecuación (I)

(n) (n-1)

$$A_n y_p + a_{n-1} y_p + \dots + a_2 y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(x)$$

Sumamos miembro a miembro extrayendo factores comunes:

(n) (n) (n-1) (n-1)

$$a_n (y_h + y_p) + a_{n-1} (y_h + y_p) + \dots + a_2 (y_h'' + y_p'') + a_1 (y_h' + y_p') + a_0 (y_h + y_p) = f(x)$$

por propiedad de derivada de una suma:

$$a_n (y_h + y_p) + a_{n-1} (y_h + y_p) + \dots + a_2 (y_h + y_p)'' + a_1 (y_h + y_p)' + a_0 (y_h + y_p) = f(x)$$

Entonces $y_h + y_p$ es solución de la ecuación diferencial.

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS DE ORDEN 'N' CON COEFICIENTES CONSTANTES

1) METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Se puede aplicar cuando las derivadas de la función $f(x)$ mantienen la misma forma que

x

dicha función; es el caso de los polinomios, las exponenciales e y las combinaciones lineales de senos y cosenos.

1º caso: $f(x) = P_k(x)$ polinomio de grado k con coeficientes conocidos

La solución general es $y = y_h + y_p$

- Para determinar y_h :

1º) Se arma la ec.característica: $a_n r + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

2º) Se hallan las raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$.

3º) Se hallan 'n' soluciones L.I $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ de acuerdo al tipo de raíces encontradas.

Entonces y_h es una combinación lineal de estas 'n' soluciones:

$$Y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

- Para determinar y_p :

Es lógico pensar que y_p debe ser un polinomio, entonces ensayamos en principio un polinomio del mismo grado que $P_k(x)$ pero con coeficientes a determinar:

$$y_p = Q_k(x) \text{ grado } k$$

Derivamos n veces:

$$y_p' = Q_k'(x) \text{ grado } k-1$$

$$y_p'' = Q_k''(x) \text{ grado } k-2$$

.....

$$(n) (n)$$

$$Y_p = Q_k(x) \text{ grado } k-n$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$(n) (n-1)$$

$$A_n Q_k(x) + a_{n-1} Q_k'(x) + \dots + a_2 Q_k''(x) + a_1 Q_k'(x) + a_0 Q_k(x) = P_k(x)$$

- Si $a_0 \neq 0$ el grado del primer miembro es k y la igualación de polinomios es posible para determinar los coeficientes de $Q_k(x)$.

Decir que $a_0 \neq 0$ equivale a afirmar que la ec.característica tiene término independiente no nulo y entonces cero no es raíz de la misma.

En este caso tomamos $y_p = Q_k(x)$

- Si $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$ entonces el primer miembro tiene grado $k-1$. la igualación de polinomios en estas condiciones no es posible ya que ambos miembros tienen distinto grado. La ec.característica tiene término independiente nulo y por lo tanto cero es raíz simple de la misma. En este caso tomamos un polinomio de grado $k+1$ o bien $y_p = x \cdot Q_k(x)$ para que la igualación sea posible.
- Si $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ y $a_2 \neq 0$ el primer miembro es de grado $k-2$. esto equivale a decir que cero es raíz doble de la ec.característica y para que la igualación de polinomios sea posible es necesario elevar en dos el grado de $Q(x)$, o lo que es lo mismo tomar $y_p = x^2 \cdot Q_k(x)$.

Conclusión (generalización):

- Si cero no es raíz de la ec.característica entonces $y_p = Q_k(x)$.
- Si cero es raíz de multiplicidad n de la ec.característica entonces $y_p = x^n \cdot Q_k(x)$

x

2º Caso: $f(x) = e^x \cdot P_k(x)$ constante y $P_k(x)$ polinomio de grado k con coeficientes conocidos.

x

Desarrollamos para ecuaciones diferenciales de 2º orden: $a \cdot y'' + b \cdot y' + c y = e^x \cdot P_k(x)$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

La solución general es $y = y_h + y_p$ donde y_h es la solución general de la ecuación diferencial homogénea

asociada a la ecuación dada.

$Y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones particulares L.I de la ec.homogenea asociada.

Y_p es una solución particular de la ecuación dada.

En principio tomamos:

$Y_p = e^{\lambda x} Q(x)$ siendo Q un polinomio de grado k con coeficientes a determinar

$x \ x \ x$

$$Y_p' = \lambda e^{\lambda x} Q(x) + e^{\lambda x} Q'(x) = e^{\lambda x} [\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$Y_p'' = \lambda^2 e^{\lambda x} Q(x) + 2\lambda e^{\lambda x} Q'(x) + e^{\lambda x} Q''(x) = e^{\lambda x} [\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

Reemplazamos en la ec.diferencial sacando factor común:

$x \ x$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 Q + 2\lambda Q' + Q'' + b_1 Q + b_2 Q' + b_3 Q) = e^{\lambda x} P_k(x)$$

Reagrupando y ordenando:

$$Q'' + (2\lambda + b_2)Q' + (\lambda^2 + b_1 + b_3)Q = P_k(x)$$

De aquí podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Si λ no es raíz de la ec.característica entonces $\lambda^2 + b_1 + b_3 \neq 0$, el grado del primer miembro de la ecuación es k y por igualación podemos hallar los coeficientes de $Q_k(x)$.
- Si λ es raíz simple de la ec.característica entonces $\lambda^2 + b_1 + b_3 = 0$ y $2\lambda + b_2 \neq 0$ el grado del polinomio del primer miembro es $k-1$ y la igualación de polinomios no es posible. Para solucionar este problema elevamos en 1 el grado de $Q(x)$, o lo que es

x

lo mismo, tomamos $y_p = x e^{\lambda x} Q(x)$.

- Si λ es raíz doble de la ec.característica entonces $\lambda^2 + b_1 + b_3 = 0$ y $2\lambda + b_2 = 0$ y como $\lambda \neq 0$, por la propiedad de las raíces de una ecuación de 2º grado:

$$\lambda + b_2 = -b/a$$

$$2\lambda = -b/a$$

$$2\lambda + b_2 = 0$$

Entonces el grado del primer miembro es $k-2$. luego, para poder efectuar la igualación de polinomios debemos elevar en dos el grado de $Q(x)$ o bien tomar

x

$$Y_p = x^2 \cdot e \cdot Q_k(x)$$

Conclusión (generalización):

x

- Si no es raíz de la ec.característica entonces $y_p = e \cdot Q_k(x)$

x

- Si es raíz de multiplicidad 'n' de la ec.característica entonces $y_p = x^n \cdot e \cdot Q_k(x)$

3º Caso: $f(x) = m \cdot \cos x + n \cdot \sin x$ $m, n \in \mathbb{R}$

Expresamos a $f(x)$ en función de polinomios por exponenciales (reducción al 2º caso). Para eso usamos la fórmula de Euler:

e^{ix}

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$-ix$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = i \cdot \sin x - (-i \cdot \sin x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cdot \cos x \quad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$$

Si restamos:

$$e^{ix} - e^{-ix} = i \cdot \sin x - (-i \cdot \sin x)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot \sin x \quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

Reemplazamos en $f(x)$:

$$e^{ix} - e^{-ix} = i \cdot \sin x - (-i \cdot \sin x)$$

$$f(x) = m \cdot (e^{ix} + e^{-ix})/2 + n \cdot (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

$$e^{ix} - e^{-ix}$$

$$f(x) = (m/2 + n/2i) \cdot e^{ix} + (m/2 - n/2i) \cdot e^{-ix}$$

Los términos entre paréntesis son constantes, es decir polinomios de grado cero, por lo que su solución queda reducida al segundo caso donde $\lambda = \pm i$. Usamos las conclusiones del segundo caso:

- Si $\pm i$ no son raíces de la ec.característica, entonces $y_p = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$

- Si $\pm i$ son raíces de multiplicidad 'n', entonces $y_p = (A \cos x + B \sin x) \cdot x^n$

4° Caso: Combinación lineal de los tres casos anteriores

En este caso y_p se escribe también como combinación lineal de las soluciones para cada uno de los tipos de función incluida en $f(x)$, siempre que sean alguno de los casos vistos.

5° Caso: $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$; $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios conocidos con grados no necesariamente iguales. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Expresamos $\cos x$ y $\sin x$ en forma exponencial con la formula de Euler y sumamos miembro a miembro:

$$e^{ix}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} \quad e^{ix} + e^{-ix}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$$

Restamos miembro a miembro también:

$$e^{ix} - e^{-ix} \quad e^{ix} + e^{-ix}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

reemplazamos en $f(x)$:

$$x^2 e^{ix} - x^2 e^{-ix} \quad x^2 e^{ix} + x^2 e^{-ix}$$

$$f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot [e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}]/2 + Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot [e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}]/2i$$

$$((+i)x - (-i)x)((+i)x - (-i)x)$$

$$f(x) = (P(x)/2) \cdot (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + (Q(x)/2i) \cdot (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$((+i)x - (-i)x)((-i)x - (+i)x)$$

$$f(x) = [P(x)/2 + Q(x)/2i] \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} + [P(x)/2 - Q(x)/2i] \cdot e^{(\alpha - i\beta)x}$$

donde los terminos entre corchetes son polinomios de grado igual al del polinomio $P(x)$ o $Q(x)$ de mayor grado.

Entonces $f(x)$ queda reducida al segundo caso. Las conclusiones son:

- Si $\alpha + i\beta$ no son raíces de la ecuación característica tomamos $y_p = A(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + B(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$

$$+ B(x).e^{\cos x}$$

- Si $\alpha \pm i$ son raíces de multiplicidad n de la ec. característica tomamos

$$Y_p = (A(x).e^{\cos x} + B(x).e^{\sin x}).x$$

2) METODO DE VARIACION DE LOS PARAMETROS

Sirve para resolver ec. diferenciales lineales, completas con coeficientes constantes y de orden n .

La deducción se hará para ecuaciones de segundo orden, es decir:

$$a.y'' + b.y' + c.y = f(x) \quad a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0; f(x) \neq 0 \quad (I)$$

Como ya sabemos, la solución general de esta ecuación es $y = y_h + y_p$ siendo y_h la solución general de la ec. diferencial homogénea asociada e y_p una solución particular de la ecuación dada.

Para obtener y_h armamos la ecuación característica $a.r^2 + b.r + c = 0$ y siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones L.I de la ec. diferencial homogénea asociada resulta:

$$Y_h = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$$

Para la determinación de y_p tomamos una combinación de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ con coeficientes variables.

$$Y_p = L_1(x).y_1(x) + L_2(x).y_2(x) \text{ siendo } L_1(x) \text{ y } L_2(x) \text{ funciones a determinar.}$$

Derivamos dos veces:

$$Y_p' = L_1.y_1' + L_1'.y_1 + L_2.y_2' + L_2'.y_2$$

$$\text{Tomo como condición arbitraria } L_1'.y_1 + L_2'.y_2 = 0 \quad (II)$$

$$Y_p'' = L_1.y_1'' + L_1'.y_1' + L_2.y_2'' + L_2'.y_2'$$

Reemplazamos en (I):

$$a.L_1.y_1'' + a.L_1'.y_1' + a.L_2.y_2'' + a.L_2'.y_2' + b.L_1.y_1' + b.L_2.y_2' + c.L_1.y_1 + c.L_2.y_2 = f(x)$$

Sacamos factores comunes y ordenamos convenientemente:

$$a(L_1'.y_1' + L_2'.y_2') + (a.y_1'' + b.y_1' + c.y_1).L_1 + (a.y_2'' + b.y_2' + c.y_2).L_2 = f(x)$$

Como y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, los últimos dos términos de la suma son nulos, por lo tanto nos queda:

$$a(L_1'.y_1' + L_2'.y_2') = f(x)$$

$$(L_1'.y_1' + L_2'.y_2') = f(x)/a \quad (III)$$

Las condiciones (II) y (III) son dependientes entre si y forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$L_1' y_1 + L_2' y_2 = f(x)/a \text{ incógnitas: } L_1'(x) \text{ y } L_2'(x)$$

$$L_1' y_1 + L_2' y_2 = 0 \text{ coeficientes: } y_1, y_2, y_1', y_2'$$

Term.independientes: 0 y $f(x)/a$

Analizamos la compatibilidad de este sistema. El determinante de los coeficientes de las incógnitas es:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$$

% % es el wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Recordamos la propiedad:

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones L.I en el intervalo $[a,b]$, entonces $W(y_1, y_2) \neq 0$ en todo el intervalo.

En nuestro caso y_1 e y_2 son L.I, entonces el $W \neq 0$ y el sistema es compatible determinado.

Resolvemos por determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} f(x)/a & y_2' \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_2' & 0 \\ f(x)/a & y_2 \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_2' \cdot 0 - (f(x)/a) \cdot y_2}{W(y_1, y_2)} \quad L_1 = - \frac{[f(x) \cdot y_2]/a}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$W(y_1, y_2)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1' & f(x)/a \end{vmatrix}$$

$$L_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & f(x)/a \\ 0 & y_1' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 \cdot (f(x)/a) - 0 \cdot y_1'}{W(y_1, y_2)} \quad L_2 = \frac{[f(x) \cdot y_1]/a}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$W(y_1, y_2)$$

Solución general:

$$Y_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + L_1 y_1 + L_2 y_2$$