

UNIDAD III

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

DEFINICION DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es una igualdad en la que intervienen:

- a) Una o varias variables independientes
- b) La variable dependiente o función incógnita
- c) Las derivadas de la función incógnita

Si la función incógnita es solo función de una variable, la ecuación diferencial se llama ordinaria.

Si la función incógnita es función de mas de una variable, la ecuación diferencial se llama en derivadas parciales.

En este curso solo estudiaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias.

FORMA IMPLICITA: $F(x, y(x), y', y'', \dots, y(n)) = 0$

FORMA EXPLICITA: $y(n) = f(x, y(x), y', y'', \dots, y(n-1))$

ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Esta dado por el orden de la mayor derivada que interviene en la ecuación.

GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es el exponente (n° natural) al que esta elevada la derivada de mayor orden que interviene en la ecuación.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es una familia de curvas n -parametricas (es decir, con n constantes) de la forma:

$$Y = (x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

El n° de constantes corresponde al orden de la ecuación diferencial. En esta unidad estudiaremos solo las ec. Diferenciales de 1° orden, es decir:

$$F(x, y(x), y') = 0$$

Y la solución es de la forma $y = (x, c_1)$

Se distinguen tres tipos de soluciones (curvas integrales)

1) Solución general: Es el conjunto de todas las curvas que verifican la ecuación.

2) Solución particular: Es una de las curvas que conforman la solución general. Se halla conociendo ciertas condiciones iniciales.

3) Solución singular: es una curva que, sin formar parte de la solución general, también es solución de la ecuación (no toda ecuación diferencial tiene solución singular).

FORMACION DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL CONOCIDA SU SOLUCIÓN GENERAL

Dato: $y = (x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ (solución general en forma explícita)

Para hallar la ecuación diferencial de la cual la solución general es la dada, se siguen los siguientes pasos:

- Derivamos tantas veces como constantes independientes o esenciales aparecen en la solución general, respecto de la variable independiente.
- Si al terminar de derivar la ecuación que resulta no contiene ninguna de las constantes, entonces esta es la ecuación diferencial buscada
- Si en cambio una o todas las constantes permanecen aun, debemos formar un sistema con las ecuaciones resultantes tras las derivaciones y eliminar las constantes, es decir:

$$Y = (x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$Y' = '$$

$$Y' = ''$$

$$Y^{(n)} = (n)$$

METODOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1) ECUACIONES DIFERENCIALES A VARIABLES SEPARADAS O SEPARABLES

Las ecuaciones a variables separadas son de la siguiente forma:

$$f(y)dy = g(x)dx$$

Se resuelve integrando ambos miembros:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) = G(x) + C$$

En cambio, si tenemos una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$F(x, y(x))dy = g(x, f(x))dx$$

Si es posible descomponer ambos miembros de la igualdad en producto de funciones de una sola variable, es decir:

$$F(x, f(x)) = f_1(x) \cdot f_2(f(x))$$

$$G(x, f(x)) = g_1(x) \cdot g_2(f(x))$$

Resulta una ecuación diferencial a variables separables:

$$f_1(x).f_2(y(x))dy = g_1(x).g_2(f(x))dx$$

Agrupamos según las variables:

$$f_2(y(x))/g_2(y(x))dy = f_1(x)/g_1(x)dx$$

Integro en ambos miembros y resuelvo:

$$\int f_2(y(x))/g_2(y(x))dy = \int f_1(x)/g_1(x)dx$$

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

II) ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS DE 1º ORDEN

Recordamos la definición de función homogénea:

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado m si se verifica la siguiente igualdad:

$$F(x, y) = f(x,y) \quad R$$

A partir de ahora nos interesaran únicamente las funciones homogéneas de grado cero.

Estas funciones poseen una característica especial: siempre es posible expresarlas como una función del cociente y/x o x/y .

DEFINICION DE ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGENEA DE 1º GRADO

Es de la forma $y' = f(x,y)$ una función homogénea de grado cero.

Teniendo en cuenta la característica especial de las funciones homogéneas de grado cero podemos expresar a la ecuación dada así:

$$Y' = f(y/x)$$

Por lo tanto, la sustitución apropiada es:

$$Y(x)/x = z(x) \quad (z \text{ es función de la misma variable independiente que } y/x)$$

$$Y(x) = z(x).x$$

$$Y'(x) = z(x) + x.z'(x)$$

Sustituimos en la ecuación diferencial

$$y' = f(y/x)$$

$$z + x.dz/dx = f(z)$$

Separo las variables:

$$x \cdot dz/dx = f(z) - z$$

$$dz/(f(z) - z) = dx/x$$

Integro ambos miembros:

$$\int dz/(f(z) - z) = \int dx/x$$

$$G(z) = \ln(x) + \ln C$$

$$G(z) = \ln(Cx)$$

Vuelvo a las variables x e y , por prop.de logaritmos y n° e:

$$G(y/x)$$

$$\ln = Cx$$

III) ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCTIBLES A HOMOGENEAS

Son de la forma $y' = (a_1x + b_1y + c_1)/(a_2x + b_2y + c_2)$ con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$ (pues si $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ seria homogénea)

Se presentan tres casos:

1) $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = k$ ($k = \text{cte}; k \neq 0$) (rectas paralelas coincidentes o superpuestas)

Por lo tanto: $a_1 = a_2 \cdot k$; $b_1 = b_2 \cdot k$; $c_1 = c_2 \cdot k$

Reemplazamos en la ecuación:

$$y' = f(k \cdot a_2x + k \cdot b_2y + k \cdot c_2 / a_2x + b_2y + c_2) \quad y' = f[k \cdot (a_2x + b_2y + c_2) / (a_2x + b_2y + c_2)]$$

$$y' = f(k)$$

Tengo una ecuación diferencial a variables separables:

$$dy/dx = f(k)$$

Separo las variables e integro:

$$\int dy = \int f(k) dx$$

$Y = f(k) \cdot x + C$ Solución general (familia de rectas paralelas sin puntos coincidentes)

2) $a_1/a_2 = b_1/b_2 = k$ ($k = \text{cte}; k \neq 0$); $c_1/c_2 \neq k$ (rectas paralelas no coincidentes)

Por lo tanto: $a_1 = a_2 \cdot k$; $b_1 = b_2 \cdot k$

Reemplazamos en la ecuación:

$$Y' = f(k \cdot a_2x + k \cdot b_2y + c_1 / a_2x + b_2y + c_2)$$

$$Y' = f\left[\frac{k(a^2x + b^2y) + c_1}{a^2x + b^2y + c_2}\right]$$

Sustitución:

$$a^2x + b^2y = z$$

Despejamos y:

$$y = (z - a^2x) / b^2$$

Hallamos y':

$$y' = (z' - a^2) / b^2$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$(z' - a^2) / b^2 = f\left(\frac{kz + c_1/z + c_2}{z}\right)$$

Separo las variables e integro:

$$Z' = b^2 \cdot f\left(\frac{kz + c_1/z + c_2}{z}\right) + a^2$$

$$Dz/dx = b^2 \cdot f\left(\frac{kz + c_1/z + c_2}{z}\right) + a^2$$

$$Dz / [b^2 \cdot f\left(\frac{kz + c_1/z + c_2}{z}\right) + a^2] = dx$$

$$G(z) = x + C$$

Vuelvo a las variables x e y:

$$G(a^2x + b^2y) = x + C$$

3) $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ (las rectas se cortan en un punto de coordenadas (,))

Si graficamos las rectas en un plano coordenado, podemos observar que si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$, las rectas se cortan en cualquier punto que no es el origen. Si pudiéramos hacer que c_1 y c_2 sean cero, la ecuación se transformaría en homogénea, lo que implica 'armar' un nuevo sistema de coordenadas en el cual el punto de intersección entre las rectas sea el origen

$$X = x + u \quad dx = du$$

$$Y = y + v \quad dy = dv$$

Estas ecuaciones son la sustitución adecuada para convertir la ecuación diferencial dada en homogénea. Además debemos sustituir: $y' = dy/dx = dv/du$

Reemplazamos en la ecuación diferencial dada:

$$Y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$dv/du = f\left[\frac{(a_1 + a_1u + b_1 + b_1v + c_1)}{(a_2 + a_2u + b_2 + b_2v + c_2)}\right]$$

Como (x, y) es el punto donde se cortan las dos rectas, entonces verifica el sistema, es decir:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ y } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

por lo tanto estos términos se cancelan y nos queda:

$$dv/du = f(a_1u + b_1v/a_2u + b_2v) \text{ (ecuación diferencial homogénea)}$$

Con la sustitución $v(u)/u = z(u)$; $v(u) = u \cdot z(u)$, reducimos a una ecuación diferencial a variables separables

$$v(u) = u \cdot z(u) \quad dv/du = z(u) + u \cdot dz/du$$

Finalmente, al resolver la ecuación diferencial debemos volver a las variables x e y .

IV) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 1º ORDEN

Son de la forma: $a_2(x) \cdot y' + a_1(x) \cdot y = a_0(x)$

Se llaman lineales pues y e y' son de 1º grado

$A_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son funciones continuas conocidas; $a_2(x) \neq 0$

Dividimos por $a_2(x)$ en ambos miembros y reducimos:

$$Y' + a_1(x)/a_2(x) \cdot y = a_0(x)/a_2(x) \text{ llamando } P(x) = a_1(x)/a_2(x) \text{ y } Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$$

$$\text{Sustitución: } y = u \cdot v \quad y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

Reemplazamos:

$$u \cdot v' + u' \cdot v + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

$$u \cdot v' + v(u' + P(x) \cdot u) = Q(x) \quad (2)$$

Buscamos una función tal que $u' + P(x) \cdot u = 0$, entonces resolvemos esto:

$$du/dx = -P(x) \cdot u$$

$$\frac{du}{u} = -P(x) dx$$

$$\ln u = -\int P(x) dx$$

$$-\int P(x) dx$$

$$U = e^{\int P(x) dx} \quad (3)$$

Reemplazamos con (3) en (2), para despejar v :

$$-\int P(x) dx$$

$$e^{\int P(x) dx} \cdot v(u' + P(x) \cdot u) = Q(x) \text{ donde el termino entre paréntesis es igual a cero}$$

Entonces: $-P(x)dx$

$$e \cdot v' = Q(x)$$

$$-P(x)dx$$

$$dv/dx = Q(x)/e$$

$$P(x)dx$$

$$dv = Q(x) \cdot e \, dx$$

$$P(x)dx$$

$$v = \int Q(x) \cdot e \, dx + C$$

como $y = u(x) \cdot v(x)$, entonces:

$$-P(x)dx \quad P(x)dx$$

$$y = e^{\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

V) ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCTIBLES A LINEALES (BERNOULLI)

Son de la forma $a_2(x) \cdot y' + a_1(x) \cdot y = a_0(x) \cdot y^n$ (Q racionales)

$A_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ son funciones continuas con $a_2(x) \neq 0$

Para llevarla a una ecuación diferencial lineal, dividimos ambos miembros por y y también dividimos por el coeficiente de y' ($a_2(x)$):

$$y'/y + (a_1(x)/a_2(x)) \cdot y/y = a_0(x)/a_2(x) \cdot y^{n-1} \quad (1)$$

Donde llamamos $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$

$$-n \quad 1-n$$

$$\text{Entonces: } y' \cdot y + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

Si $n=0$! es ecuación lineal

$$\text{Si } n=1 ! \quad y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y$$

$$y' = [q(x) - p(x)] \cdot y$$

$$dy/y = [q(x) - p(x)] dx \quad \text{! es diferencial a variables separadas}$$

Si $n \neq 0$ y $n \neq 1$! es reducible a lineal (Bernoulli)

Retomamos la ecuación:

$$-n \quad 1-n$$

$$y'.y + p(x).y = q(x)$$

Sustituimos: $1-n$

$$y = Z(x) \quad (2)$$

Derivamos usando la regla de la cadena:

$$1-n-1$$

$$(1-n).y .y' = Z' \text{ donde } (1-n) \neq 0 \text{ pues } n \neq 1$$

$$-n -n$$

$$Z' = (1-n).y .y' \quad y .y' = Z'/(1-n) \quad (3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1):

$$Z'/(1-n) + p(x).Z = q(x)$$

Multiplicamos por $(1-n)$ miembro a miembro:

$$Z' + (1-n).p(x).Z = (1-n).q(x)$$

Obtenemos una ecuación diferencial lineal en $Z(x)$, con $P(x) = (1-n).p(x)$

y $Q(x) = (1-n).q(x)$. Para resolver según lo visto anteriormente sustituimos:

$$Z(x) = u(x).v(x) \quad Z'(x) = u(x).v'(x) + u'(x).v(x)$$

Y continuamos con el desarrollo para ecuaciones diferenciales lineales. La solución general es:

$$-\int (1-n)p(x)dx \quad \int (1-n)p(x)dx$$

$$Z(x) = e^{\int (1-n).q(x).e dx} + C$$

$$1-n$$

Vuelvo a la variable y ($Z(x)=y$):

$$(1-n) - \int (1-n)p(x)dx \quad \int (1-n)p(x)dx$$

$$Y = e^{\int (1-n).q(x).e dx} + C$$

TRAYECTORIAS ISOGONALES Y ORTOGONALES

DEFINICION

Las familias de curvas $(x,y,c1)=0$ y $(x,y,c2)=0$ son dos familias isogonales si cada curva de la familia $(x,y,c1)=0$ corta a todas y cada una de las curvas de la familia $(x,y,c2)=0$ bajo un mismo ángulo constante.

En el caso particular de que el ángulo sea recto, las familias se llaman trayectorias ortogonales.

Dato: $(x,y,c_1)=0$ (Familia de curvas)

Se desea hallar el haz o familia de trayectorias ortogonales. Los pasos a seguir son:

1) Hallamos la ecuación diferencial de la cual $(x,y,c_1)=0$ es su solución general (con esto hallamos la familia de rectas tangentes a las curvas del haz dado en cada punto). Para esto derivamos respecto de x y eliminamos la constante c_1 si apareciera en la derivación:

$F(x,y,y') = 0$! ecuación diferencial del haz o familia dada

2) Pasamos a la ecuación diferencial del haz o familia ortogonal teniendo en cuenta la relación de perpendicularidad entre las rectas tangentes:

$$m_1 = -1 / m_2 \quad ! \quad y' = -1 / y'(t.o)$$

$y'(t.o)$ = derivada de la familia ortogonal

por lo tanto $y'(t.o) = -1 / y' \quad ! \quad F(x,y, -1/y') \quad ! \quad \text{ec.diferencial del haz ortogonal}$

3) resolvemos la ecuación diferencial obtenida y su solución general es la familia buscada $(x,y,c_2)=0$

TRAYECTORIAS ISOGONALES

El ángulo bajo el cual se cortan todas y cada una de las curvas de una de las familias respecto de la otra es constante y lo llamaremos

DATO: $\tan \theta = K$ ($K=\text{cte}$)

Del triangulo ABC por propiedad:

$$= +$$

Aplico tg en ambos miembros:

$$\tan \theta = \tan (+)$$

$$\tan \theta = \tan \alpha + \tan \beta / (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta)$$

Si $\tan \theta = y'$, $\tan \alpha = k$ y $\tan \beta = y'(t.i)$, entonces:

$$Y' = k + y'(t.i) / [1 - k \cdot y'(t.i)]$$

$$Y'(x) = z(x) + x \cdot dz/dx$$

X

Y

y

x

$P(x,y)$

(u,v)

u

v

A

B

C