

INTRODUCCION

Los inicios de las matemáticas de la estadística se encuentran a mediados del siglo XVIII, en estudios de probabilidad motivados por el interés en los juegos de azar, por lo tanto, la teoría generada de caras o cruces y de rojo o negro pronto encontró aplicaciones en situaciones donde los resultados eran niño o niña, vida o muerte, aprobado o reprobado, y los estudiantes comenzaron a aplicar la teoría de la probabilidad a problemas actuariales y algunos aspectos de las ciencias sociales. Después, L. Boltzmann, J. Gibbs y J. Maxwell introdujeron a la física la probabilidad y la estadística, y en este siglo se han encontrado aplicaciones en todas las fases del esfuerzo humano que en alguna forma significan elementos de incertidumbre o riesgo. Los nombres que se relacionan en forma más prominente con el crecimiento de la estadística matemática en la primera mitad de este siglo son los de R.A. Fisher, J. Neyman, E.S. Pearson y A. Wald. Más recientemente, el trabajo de R. Schlaifer, L. J. Savage y otros, ha dado ímpetu a teorías estadísticas basadas esencialmente en métodos del clérigo inglés, Thomas Bayes que datan del siglo XVIII.

Métodos combinatorios

En muchos problemas es necesario citar todas las alternativas posibles de una situación dada o por lo menos determinar cuántas posibilidades diferentes existen. Para estos casos frecuentemente se utiliza la regla de multiplicación que se define según el siguiente teorema:

Teorema 1.1

Si una operación consta de dos pasos, de los cuales el primero puede efectuarse en n_1 formas y para cada una de éstas el segundo puede realizarse en n_2 formas, entonces la operación se lleva a cabo de $n_1 n_2$ maneras.

La regla de multiplicación puede ampliarse para comprender situaciones donde una operación consta de un número fijo de pasos. El caso general se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 1.2

Si una operación consta de k pasos, de los cuales el primero puede efectuarse en n_1 formas, para cada una de éstas el segundo puede realizarse en n_2 maneras, para cada una de éstas el tercero puede realizarse en n_3 formas, etc., entonces toda la operación puede llevarse a cabo en $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ formas.

Con frecuencia, estamos interesados en situaciones donde los productos o resultados son los órdenes o arreglos diferentes de un grupo de objetos. Los diversos arreglos se denominan permutaciones.

Teorema 1.3

El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$.

Teorema 1.4

El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez es:

$${}_nP_r =$$

En aplicaciones donde intervienen permutaciones, suele ser más sencillo proceder mediante el uso del teorema 1.2, pero la fórmula del factorial del teorema 1.4 es más fácil de recordar.

Las permutaciones que ocurren cuando se ordenan objetos en un círculo se denominan permutaciones circulares. Dos permutaciones circulares no se consideran distintas si objetos correspondientes de los dos arreglos van precedidos y seguidos de los mismos objetos a medida que avanzamos en el sentido que giran las agujas del reloj.

Teorema 1.5

El número de permutaciones de n objetos distintos ordenados en un círculo es $(n-1)!$.

En todo lo expuesto se ha considerado que los n objetos de los que se seleccionan r objetos y forman permutaciones son todos diferentes.

Teorema 1.6

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, ..., n_k son de un k -ésimo tipo, y $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$, es:

A menudo nos interesa determinar el número de maneras de seleccionar de entre n objetos distintos sin considerar el orden en el cual se seleccionen. Estas selecciones se denominan combinaciones.

En realidad combinación significa lo mismo que subconjunto y, cuando pedimos el número de combinaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos, simplemente solicitamos el número total de subconjuntos de r objetos que pueden seleccionarse de un conjunto de n objetos diversos. En general, existen $r!$ permutaciones de los objetos en un subconjunto de r objetos, de manera que las nPr permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos diferentes contienen a cada subconjunto $r!$ veces. Al dividir nPr entre $r!$ representar el resultado por medio del símbolo

Teorema 1.7

El número de combinaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos es:

=

PROBABILIDAD

Históricamente, la manera más antigua de medir probabilidades, el concepto clásico de probabilidad, se aplica cuando todos los resultados posibles son igualmente probables, como es presumible el caso de la mayoría de juegos de azar. Por consiguiente podemos afirmar que si hay N posibilidades igualmente probables, de las cuales una debe ocurrir y n se consideran favorables o como un acierto, entonces la probabilidad de lograr un acierto está dada por la razón

Una desventaja importante del concepto clásico de probabilidad es su limitada aplicación, ya que hay muchas situaciones en que las posibilidades que se presentan no pueden considerarse igualmente probables.

Entre los diversos conceptos de probabilidad, el más favorecido es la interpretación de la frecuencia o interpretación frecuentista, según la cual la probabilidad de un evento (resultado o acontecimiento), es la proporción de las veces en que ocurrirán a la larga eventos del mismo tipo.

Un punto de vista alternativo, que actualmente está siendo favorecido, consiste en interpretar las probabilidades como evaluaciones personales o subjetivas. Estas probabilidades expresan la fuerza de nuestra creencia en relación con incertidumbres que están asociadas y se aplican cuando hay poca o ninguna evidencia directa, de manera que no hay otra alternativa más que considerar evidencia colateral (indirecta), suposiciones

razonadas, quizá intuición y otros factores subjetivos.

El enfoque o método axiomático, es en el cual las probabilidades se definen como conceptos matemáticos que se comportan según ciertas reglas bien definidas.

Espacios de muestra

En estadística se acostumbra denominar experimento aun proceso de observación o medición cualquiera. En este sentido, un experimento consiste en el proceso de verificar si un interruptor está en posición de encendido o apagado, en contar las imperfecciones que hay en un rollo de tela, o puede consistir en el proceso muy complicado de determinar la masa de un electrón. Lo que se obtiene de un experimento, ya sea lectura de instrumentos, cuentas, respuestas si o no o valores obtenidos a través de muchas operaciones, se denominan resultados del experimento.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento recibe el nombre de espacio de muestra y suele representarse por medio de la letra S. Cada resultado o producto de un espacio de muestra se conoce como el elemento del espacio de muestra o simplemente como punto de la muestra. Si un espacio de muestra tiene un número de elementos finito, podemos citar los elementos en la notación de conjuntos usual; por ejemplo, el espacio de muestra de los posibles resultados del lanzamiento al aire de una moneda puede escribirse como:

$$S = \{C, X\}$$

Donde C y X representan cara y cruz.

Los espacios de muestra suelen clasificarse según el número de elementos que contienen.

Eventos

En muchos problemas nos interesa la incidencia de eventos que no están dados directamente por un elemento específico de un espacio de muestra.

A cualquier evento puede asignársele un conjunto de puntos de muestra, que constituyen un subconjunto de un espacio de muestra adecuado. Este subconjunto representa todos los elementos para los cuales ocurre el evento. Por lo tanto, por definición, un evento es un subconjunto de un espacio de muestra.

En relación con espacio de muestra todos los subconjuntos son eventos; pero, en el caso continuo deben excluirse algunos conjuntos de puntos más bien oscuros por razones matemáticas.

En muchos problemas de probabilidad nos interesan eventos que son, en realidad, combinaciones de dos o más eventos, que se forman tomando uniones, intersecciones y complementos.

Los espacios de muestra y eventos, en particular relaciones entre eventos, a menudo se presentan por medio de diagramas de Venn, en los cuales el espacio de muestra está representado por medio de un rectángulo, en tanto que los eventos se representan a través de regiones contenidas en el rectángulo, por lo general a través de círculos o partes de círculos.

Probabilidad de un evento

Las probabilidades son valores de una función de conjuntos, también llamada medida de probabilidad.

Los axiomas por sí mismos no requieren demostración, pero si se va a aplicar la teoría resultante, debemos demostrar que se cumplen los axiomas cuando damos a las probabilidades un significado real.

Axioma 1

La probabilidad de un evento es un numero real no negativo; o sea, $P(A) \geq 0$ para cualquier subconjunto de S .

Axioma 2

$$P(S) = 1$$

Axioma 3

Si $A_1, A_2, A_3, \dots$ es un secuencia finita o infinita de eventos mutuamente exclusivos de S entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Los axiomas por si mismo no requieren demostración, pero si se va a aplicar la teoría resultante, debemos demostrar que se cumplen los axiomas cuando damos a las probabilidades un significado real.

Como las proporciones son siempre positivas o cero, el primero axioma coincide por completo con la interpretación de la frecuencia. El segundo axioma expresa indirectamente que la certeza se identifica con una probabilidad de 1 (después de todo, siempre se supone que debe ocurrir una de las posibilidades de S y es a este evento cierto que asignamos una probabilidad de 1. Hasta donde atañe a la interpretación de la frecuencia, una probabilidad de 1 implica que el evento en cuestión ocurrirá el 100% del tiempo o bien, dicho de otra manera, que ocurre con certeza.

Tomando el tercer axioma en le caso mas simple; o sea, en relación con dos eventos mutuamente exclusivos A_1 y A_2 , se aprecia fácilmente que se cumple a través de la interpretación de la frecuencia. Si un evento ocurre, por ejemplo 28% del tiempo, otro 39% del tiempo y ambos eventos no pueden incidir en forma simultanea(o sea, que son mutuamente exclusivo), entonces uno o el otro ocurrirá $28 + 39 = 67\%$ del tiempo. Por tanto, se cumple el tercer axioma y aplica el mismo tipo de argumento cuando hay más eventos mutuamente exclusivos.

Para asignar una medida de probabilidad a un espacio de muestra, no es necesario especificar la probabilidad de cada subconjunto posible. En vez de citar las probabilidades de todos los subconjuntos posibles, a menudo hacemos una lista de probabilidades de los resultados individuales o puestos de muestra de S , y depuse aplicamos el siguiente teorema:

Teorema 2.1

Si A es un evento de un espacio de muestra discreto S , entonces $P(A)$ es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales que componen A .

Si un exponente es tal que podemos suponer probabilidades iguales para los puntos de la muestra de S , se puede aprovechar el siguiente caso especial del teorema 2.1:

Teorema 2.2

Si un experimento puede dar origen a uno de N resultados diferentes igualmente probables y si n de estos resultados constituye juntos el evento A , entonces la probabilidad del evento A es

$$\frac{n}{N}$$

$$P(A)=$$

Reglas de probabilidad

Mediante el uso de los tres axiomas de probabilidad, podemos deducir muchas otras reglas que tienen importantes aplicaciones. Entre las consecuencias inmediatas de los axiomas, demostramos los siguientes teoremas:

Teorema 2.3

Si A y A' son eventos complementarios de un espacio de muestra S, entonces

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Teorema 2.4

$P(\emptyset) = 0$ para un espacio de muestra S cualquiera.

Teorema 2.5

Si A y B son eventos de un espacio muestral S y $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Con palabras este teorema señala que si el evento A es un subconjunto del evento B, entonces P(A) no es mayor que P(B).

Teorema 2.6

$0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.

Teorema 2.7

Si A y B son dos eventos cualquiera en el espacio muestra S, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Al aplicar repetidamente el teorema 2.7, esta regla de adición puede generalizarse de manera que se aplique a un número cualquiera de eventos dados; en relación con tres eventos se obtiene

Teorema 2.7

Si A, B y C son tres eventos cualquiera de un espacio de muestra S, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Probabilidad condicional

Fácilmente pueden presentarse dificultades cuando las probabilidades se citan sin especificación del espacio de muestra. Por ejemplo, si pedimos la probabilidad de que un abogado gane más de \$50,000 al año, bien podemos obtener varias respuestas diferentes y quizá todas correctas. Una de ellas podría aplicarse a todos los graduados de la escuela de leyes, otra a todas las personas que tienen autorización de ejercer la profesión, una tercera a todas las personas que estén activamente comprometidas en el ejercicio de la ley, etc. Como la elección del espacio muestra (es decir, el conjunto de todas las posibilidades sometidas a consideración) no siempre se manifiestan por ningún medio, a menudo debemos utilizar el símbolo $P(A|S)$ para representar la probabilidad condicional del evento A en relación con el espacio de muestra S o también la llamamos

la probabilidad de A dado S. El símbolo $P(A|S)$ hace referencia explícita a un espacio de muestra determinado S. El símbolo $P(A|S)$ hace referencia explícita a un espacio de muestra determinado S es preferible a la notación abreviada $P(A)$ a menos que se entienda con claridad la elección táctica S.

Definición 2.1

Si A y B son dos eventos cualesquiera de un espacio de muestra S y $P(A) > 0$, la probabilidad condicional de B dada A es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Al multiplicar las expresiones de ambos lados de la fórmula de la definición 2.1 por $P(A)$, obtenemos la siguiente regla de multiplicación:

Teorema 2.9

Si A y B son dos eventos cualesquiera de un espacio de muestra S y $P(A) > 0$, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

La probabilidad de que ocurrirán A y B es el producto de la probabilidad de A y una probabilidad condicional de B dada A. En forma alternativa, si $P(B) > 0$, es el producto de la probabilidad de B y la probabilidad condicional de A dada B; simbólicamente, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Eventos independientes

En términos informales, se dice que dos eventos A y B son independientes si la incidencia de uno u otro no afecta la probabilidad en la incidencia del otro.

Simbólicamente, dos eventos A y B son independientes si $P(B|A) = P(B)$ y la $P(A|B) = P(A)$.

Definición 2.2

Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si dos eventos no son independientes, se dice que son dependientes. En la determinación de la fórmula de la definición n pasada se supone que $P(A|B)$ existe y, por consiguiente, que $P(A) > 0$. Por comodidad matemática, haremos que la definición se aplique también cuando $P(A) = 0$ y/o $P(B) = 0$.

Teorema de Bayes

Existen muchos problemas en los cuales el resultado final de un experimento depende de lo que sucede en las diversas fases intermedias.

Teorema 2.12

Si los eventos $B_1, B_2, \dots, B_k$ constituyen una partición del espacio de muestra S y $P(B_i) > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces para cualquier evento A contenido en S

$$P(A) =$$

Teorema de Bayes

Si los eventos $B_1, B_2, \dots, B_k$ constituyen una partición del espacio de muestra S y $P(B_i) > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces para un evento A cualquiera contenido en S tal que $P(A) > 0$

$$P(B_r|A) =$$

Para $r = 1, 2, \dots, k$.

BIBLIOGRAFÍA

FREUND John, Ronald Walpole. Estadística matemática con aplicaciones. 4 ed., Tr. de Juan Carlos Vega Fagoaga. Prentice-Hall. México. Pags 1 – 73.

$$\frac{n}{N}$$
$$\frac{n}{r}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{n!n!2 \dots n!k}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n!2 \dots n!k$$

$$n!n^2$$

$$k$$

$$\prod_{i=1}^n (B_i \prod_{j=1}^n A_j) B_i$$

$$i=1$$

$$\frac{P(B)_r \cdot P(A|B)_r}{k}$$

$$P(B)_i \cdot P(A|B)_i$$

$$i=1$$