

GEOMETRÍA DE MASAS

CENTROS DE GRAVEDAD

En el estudio de la mecánica del sólido rígido se manejan dos tipos de fuerzas : el peso y las fuerzas de inercia.

Para tener en cuenta el peso propio de los sólidos se modeliza la realidad para simplificarla, de forma que se pueda considerar el peso de un sólido como un vector localizado en un punto del mismo.

Masa: cantidad de materia que posee un cuerpo (escalar)

Peso : fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo (vector deslizante)

En realidad cada punto del sólido rígido es atraído por la Tierra de forma que sobre cada punto actuará un diferencial de peso, y por ello se puede asociar el peso de un cuerpo como un sistema infinito de vectores actuando sobre los infinitos puntos de un sólido rígido.

Para trabajar tomamos el cuerpo como algo muy pequeño en comparación con el tamaño de la Tierra , por tanto consideraremos el peso y la masa como puntuales, y se estudiará el peso como un sistema de vectores paralelos y reduciendo este sistema se podrá obtener la resultante del sistema (peso del cuerpo), y su punto de aplicación, que será el punto central de un sistema de vectores localizados paralelos, pudiendo estar dentro o fuera del sólido.

CENTRO DE GRAVEDAD

Punto del sistema de puntos materiales en el que se puede considerar concentrada toda la masa del cuerpo.

Al punto de concurrencia lo llamamos G, $OG = \sum m_i \mathbf{r}_i$ (Cdm)

m_i

(Cdg) $OG = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$

Si tuviéramos un sistema continuo las expresiones serían integrales:

PRIMEROS MOMENTOS O MOMENTOS ESTÁTICOS

Si consideramos la densidad del cuerpo constante :

$X_G L = \int x \, dl$; $Y_G L = \int y \, dl$; $Z_G L = \int z \, dl$;

$L \, L \, L$

$X_G S = \int x \, ds$; $Y_G S = \int y \, ds$; $Z_G S = \int z \, ds$;

$S \, S \, S$

$X_G V = \int x \, dv$; $Y_G V = \int y \, dv$; $Z_G V = \int z \, dv$;

V V V

El momento estático o primer momento de un volumen V respecto a un plano o recta es la integral extendida a todo el volumen, del producto de los diferenciales de volumen por su distancia al plano o recta.

El momento estático o primer momento de una superficie respecto a eje es la integral extendida a toda el área, del producto de los diferenciales de dicha área por su distancia al eje

El momento estático o primer momento de una curva respecto a un eje es la integral extendida a toda la longitud del producto de los diferenciales de volumen por su distancia al eje

CENTRO DE GRAVEDAD Y SIMETRÍA

SI UN CUERPO TIENE UN PLANO DE SIMETRÍA EL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO SE HALLA EN EL.

Si un cuerpo tiene un eje de simetría el centro de gravedad estará en el eje

Si un cuerpo tiene un punto de simetría, el centro de gravedad estará sobre dicho punto.

CALCULO DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE FIGURAS COMPLEJAS

Las coordenadas del centro de gravedad total vendrán dadas por los productos de las coordenadas de los centros de gravedad correspondientes a cada figura por su longitud, área o volumen, dividido por la longitud, área o volumen de la figura completa, si el cuerpo tuviera un hueco se restarían las coordenadas.

TEOREMAS DE PAPPUS – GULDIN

Se utilizan para calcular de forma sencilla volúmenes de cuerpos de revolución y áreas de superficies de revolución. También se aplican al cálculo de c.d.g de curvas planas o de superficies planas si son conocidas el área de la superficie generada por la curva o el volumen del cuerpo engendrado por el área.

PRIMER TEOREMA :

El área lateral que engendra una línea plana L al girar alrededor de un eje contenido en su plano y que no la corta es igual al producto de la longitud de la línea por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad en su giro alrededor de dicho eje.

$$A = 2 \pi \times L$$

SEGUNDO TEOREMA:

El volumen que engendra una superficie plana S al girar alrededor de un eje contenido en su plano y que no lo corta, es igual al producto de la superficie que gira por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad en un giro alrededor del eje

$$V = 2 \pi \times S$$

MOMENTOS DE INERCIA:

Momento de inercia de un punto material respecto de un (punto, eje, plano) es el producto de su masa por el cuadrado de la distancia al (punto, eje, plano).

Cuando se trata de un sólido su momento de inercia elemental.

I_x , I_y , I_z son los momentos de inercia respecto de los planos.

J_x es el momento de inercia respecto del eje OX

I_O : momento de inercia respecto del punto O

$$J_x + I_x = I_O$$

$$I_O = 1/2(J_x + J_y + J_z)$$

El momento de inercia de un sistema material respecto de un eje es igual a la suma de los momentos de inercia de sistema respecto de dos planos perpendiculares que se cortan en dicho eje.

El momento de inercia respecto de un punto es igual a la suma de los momentos de inercia del sistema respecto de un eje y de un plano perpendiculares que pasan por dicho punto.

El momento de inercia respecto de un punto es la semisuma de los momentos de inercia del sistema respecto de tres ejes perpendiculares entre sí y que pasan por dicho punto.

En el caso en el que la masa pueda considerarse contenida en un plano.

Tomando el XOY, el momento de inercia respecto de ese plano será nulo y tendremos:

$$I_O = J_x + J_y$$

RADIO DE GIRO

Distancia a que debe estar concentrada toda la masa del sistema para que la expresión de su momento de inercia sea: $I = mK^2$

K: " I/m siendo I el momento de inercia respecto del elemento considerado.

TEOREMA DE STEINER

El momento de inercia respecto a un punto es igual al momento de inercia del sistema respecto de su centro de gravedad más el producto de su masa por el cuadrado de la distancia entre ambos puntos.

$$I_O = I_G + r_O^2 m$$

El momento de inercia de un sistema respecto de un eje es igual al momento de inercia del sistema respecto de un eje paralelo al primero y que pase por G, más el producto de la masa del sistema por el cuadrado de la distancia entre ejes

$$J_z = J_zG + r_{OZ}^2 m$$

El momento de inercia de un sistema respecto de un plano es igual al momento de inercia del mismo respecto de otro paralelo al mismo y que pasa por su centro de gravedad más el producto de su masa por la distancia al cuadrado entre esos dos planos.

$$I_z = I_zG + m z_G^2$$

PRODUCTOS DE INERCIA

Dado un sistema de puntos p_i , de masas m_i y dos planos π y π' , el producto de inercia $P_{\pi\pi'}$ es la suma de cada una de las masas m_i por el producto de sus distancias r_i y r'_i a dichos planos por el signo que les corresponde.

$$P_{xy} = \sum m_i x_i y_i$$

$$P_{xy} = \sum m_i y_i z_i$$

$$P_{xy} = \sum m_i x_i z_i$$

Teorema de Steiner el producto de un sistema respecto a 2 planos cualesquiera es igual al producto de inercia respecto a 2 planos paralelos que pasen por el c.d.g del sistema más el producto de la masa total del sistema por las distancias del c.d.g a los planos. $P_{xy} = P_{xGyG} + m x_G y_G$

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UNA RECTA CUALQUIERA

R definida por $u = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ y tomemos un referencial ortogonal con origen en o en un punto cualquiera de la recta.

$$J_R = \sum m_i d_i^2$$

$$\text{Siendo } d_i = |OP_i| \sin \theta$$

$$\cos \theta =$$

$$\cos \theta =$$

$$J_R = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$ es la matriz de inercia respecto a O

ELIPSOIDE DE INERCIA

La cuádrica asociada a la matriz de inercia en O tiene por ecuación :

$$x^2$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

$$z^2$$

elipsoide de inercia en el punto O :

En todo punto del espacio existen 3 direcciones ortogonales entre sí respecto de las cuales los momentos de inercia son máximos o mínimos, se llaman direcciones principales y los momentos de inercia momentos de inercia principales.

Cuando nos referimos a la matriz del c.d.g. del sistema se llama matriz central de inercia.

CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO:

El movimiento se dice absoluto cuando se realiza respecto a un sistema de referencia en reposo absoluto.

Determinamos el sistema de referencia fijo $S_1 (O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ siendo sus vectores bas i, j, k móvil respecto a S_1 ; el movimiento instantáneo del sistema de referencia S respecto a S_1 queda determinado por la velocidad de su origen O , v_O y la velocidad angular ω_a con que gira el sistema S respecto a S_1 alrededor de una recta que pasa por O : **queda determinado por el torsor cinemático en O** . El movimiento referido al sistema S , como si fuera fijo se denomina relativo así como la trayectoria velocidad y aceleración. **Luego, en el movimiento relativo los versores i, j, k se consideran fijos.**

Todo punto fijo se moverá respecto de S_1 , por ser S móvil respecto S_1 , a éste movimiento se le denomina de arrastre y tendrá trayectoria, velocidad y aceleración de arrastre.

COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

Sea M un punto móvil respecto de $S_1 (O_1, X_1, Y_1, Z_1)$, que a su vez es móvil respecto a $S (O, X, Y, Z)$:

r_1 es el vector que fija la posición de M en el sistema S_1

r fija la posición del móvil en el sistema S .

r_0 fija la posición de O dentro del sistema de referencia S_1 .

$$r_0 = r_0 + r = r_0 + x i + y j + z k$$

Si M es fijo en $S (X, Y, Z)$ constantes el movimiento será el de arrastre y Luego, la velocidad absoluta es la suma de la relativa más la de arrastre:

$$v = v_r + v_a$$

Donde :

$$v = v_r + v_0 + \omega_a \wedge r$$

LEY DE COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES. TEOREMA DE CORIOLIS

La aceleración absoluta, es igual a la suma de aceleraciones relativa más la de arrastre más un término complementario llamado aceleración de Coriolis.

La aceleración de Coriolis será nula:

Cuando no exista en el movimiento de arrastre rotación

Cuando no haya movimiento relativo

Cuando existiendo ambos, los vectores velocidad angular de rotación de arrastre y velocidad relativa sean paralelos

$$a_A = a_r + \omega_a \wedge v_r + a_0 + \omega_a \wedge r + \omega_a \wedge (\omega_a \wedge r)$$

CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

El movimiento genérico de un sólido rígido se puede asociar a la estructura del campo de momentos de un

sistema de momentos deslizantes

DEFINICION

Un sistema indeformable de puntos es un conjunto de puntos materiales o no tales que la distancia entre dos puntos cualesquiera permanece constante.

$$|AB| = |AB| = \text{cte}$$

Llamaremos sólido rígido a todo sistema indeformable formado exclusivamente por puntos materiales.

Para estudiar el movimiento del sólido rígido contaremos con dos sistemas de coordenadas, uno fijo (O_1, X_1, Y_1, Z_1) y uno móvil (O, X, Y, Z).

Situaremos el origen del sistema móvil en un punto del sólido rígido, **el sistema de coordenadas móvil está intrínsecamente ligado al sólido.**

Consiguiendo así que el movimiento de cualquier punto del sólido rígido con respecto a los ejes móviles sea nulo y solo hay que estudiar el movimiento de arrastre, que definirá el campo de velocidades y aceleraciones del sólido rígido.

MOVIMIENTOS ELEMENTALES DEL SÓLIDO RÍGIDO

Traslación:

Se verifica que $d|AB|/dt = 0$

Es decir, cuando el vector que une dos puntos conserva su dirección o el triedro ligado al sólido permanece paralelo a sí mismo.

Las trayectorias de todos los puntos del sólido rígido serán de forma idéntica, pudiéndose escribir el vector de posición de un punto arbitrario como:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} \text{ con } |\mathbf{r}_{AB}| = \text{cte}$$

Los vectores velocidad y aceleración serán los mismos para cada valor del parámetro tiempo, en módulo, dirección y sentido.

Al ser los mismos en todos los puntos en un instante determinado, el movimiento instantáneo del sólido se puede expresar mediante un vector libre, igual a la velocidad de cada punto (vector de traslación)

Rotación:

Dos de los puntos del sólido permanecen fijos en todo instante.

Como se conserva la alineación de todos los puntos pertenecientes a la recta AB permanecen también fijos, a esta recta de puntos fijos se le denomina eje de rotación y éste será la línea de acción de la velocidad angular ω .

Las trayectorias de los puntos no pertenecientes al eje serán circulares, contenidas en un plano normal al eje de rotación, por tanto el movimiento efectuado será un movimiento circular de velocidad angular ω , uniforme o variado dependiendo de si ω es o no constante,

Rototraslación:

Un sólido está sometido a un movimiento de rototraslación si se le somete simultáneamente a rotación y traslación y ambos son colineales en cada instante (**helicoidal**)

En este caso la velocidad lineal será la suma de la velocidad de traslación y la de rotación.

$$V_A = v + \omega \wedge r$$

siendo r el vector que define el radio del giro del eje de rotación al punto A.

La aceleración de un punto vendrá dada por una aceleración lineal, una aceleración tangencial y una aceleración normal

$$a_A = a_0 + \ddot{\theta} r + \omega \wedge r \omega \wedge (\omega \wedge r)$$

Si ω y v son constantes el movimiento será helicoidal uniforme.

MOVIMIENTO GENERAL DE UN SÓLIDO RÍGIDO.

Definiremos cuál será en el movimiento genérico de un sólido rígido la velocidad de un punto P de dicho sólido.

Contamos con un sistema de referencia (O_1, X_1, Y_1, Z_1) y un sistema de ejes fijos (O, X, Y, Z). El origen del sistema móvil lo situaremos en otro punto cualquiera del sólido, punto O.

Aplicando la expresión de la velocidad absoluta :

$$V_P = v_0 + \omega \wedge r_{OP}$$

Si ligamos invariablemente al sólido el sistema de ejes relativos se consigue:

- el movimiento del sólido en el espacio vendrá dado por el movimiento del triedro que lleva ligado (**El estudio del movimiento de un sólido rígido en el espacio es el estudio del movimiento de un sistema móvil respecto a otro fijo**)
- la velocidad relativa del punto genérico P es nula debido a que el vector OP es constante en módulo, dirección y sentido con respecto al sistema de ejes relativos e intrínsecamente ligado al sólido.

$$V_P = v_0 + \omega \wedge r_{OP}$$

EQUIPROYECTIVIDAD

El conjunto de las velocidades de todos los puntos de un sólido rígido es equiproyectivo.

$$v_B \cdot u_{AB} = v_A \cdot u_{AB}$$

es decir, en un sólido rígido en movimiento las velocidades de dos puntos cualesquiera tienen la misma proyección sobre la recta que los une.

CAMPO DE VELOCIDADES DE UN SÓLIDO RÍGIDO

La velocidad de un punto del sólido rígido y el campo de momentos en un sistema son análogas:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{PO} \wedge \boldsymbol{\omega} \text{ y } \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{PO} \wedge \mathbf{R}$$

la expresión del campo permite encontrar el momento de un sistema de vectores respecto de un punto P.

Existen dos diferencias: la 1ª es que el campo de momentos está definido en todo el espacio, el campo de velocidades está definido únicamente para el espacio ocupado por los puntos del sólido.

La 2ª diferencia es que el campo de velocidades está formado por funciones vectoriales de variable escalar de tiempo, y por tanto varían con él.

TORSOR CINEMÁTICO.

Conjunto de vectores formado por el vector rotación instantánea $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad lineal del punto O, llamado también translación instantánea $\mathbf{V}_O$.

INVARIANTES CINMÁTICOS

Cantidades que permanecen constantes en el sistema para un valor de T determinado:

- el primer invariante es el vector rotación, suma de todas las rotaciones a las que está sometido este sistema.
- El segundo invariante se define como el producto escalar del vector rotación instantánea por el vector translación instantánea calculado en cualquier punto del sólido rígido.
- El concepto correspondiente al momento mínimo en un sistema de vectores deslizantes, se denomina velocidad del mínimo deslizamiento y constituye el tercer invariante.

EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DE DESLIZACIÓN.

Lugar geométrico de los puntos que tienen velocidad mínima.

Y debido a que las rotaciones a las que están sometido el sólido son funciones vectoriales de variable escalar tiempo, para cada valor de T existirá un eje de rotación distinto.

Para calcular la expresión del eje instantáneo de rotación, procederemos como los sistemas de vectores deslizantes.

Establecer la condición de paralelismo entre la velocidad de un punto P cualquiera y la rotación instantánea.

AXOIDES

El sistema de rotación es función del tiempo, el eje instantáneo de rotación es único para cada valor de T. Dando valores a T, obtendremos distinto eir.

La superficie engendrada por el eir es una superficie reglada que se llama axoide.

Puede expresarse en distintos sistemas de referencia axoide fijo. O axoide móvil.

El eir puede estar quieto o en movimiento para cada valor.

La velocidad del eir es precisamente la velocidad de mínimo deslizamiento.

Cuando dicha velocidad sea distinta de cero, el eir se moverá linealmente con dicha velocidad. Si dicha velocidad es nula, el eir permanecerá en reposo.

CAMPO DE ACELERACIONES DE UN SÓLIDO RÍGIDO

$$A_p = a_o + \omega \wedge OP + \omega \wedge (\omega \wedge OP)$$

MOVIMIENTO PLANO

DEFINICIÓN

Un sólido tiene movimiento plano cuando las trayectorias de todos sus puntos son curvas planas paralelas a un mismo plano, y las velocidades también sean paralelas al mismo plano.

Si un sólido rígido está sometido a un movimiento plano, el vector rotación instantánea es perpendicular al plano del movimiento, con lo cual, también lo es el EIR

CAMPO DE VELOCIDADES

Las particularidades del movimiento plano son dos:

- Las velocidades de todos los puntos que estén contenidas en el mismo plano pertenecen a un mismo plano.
- El vector rotación instantánea siempre es normal al plano del movimiento, si tomo como referencia los ejes coordenados y suponen dos puntos A y B del sólido, la expresión del campo de velocidades resulta:

$$V_A = V_B + AB \wedge \omega k$$

CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

El movimiento plano vendrá definido por su torsor cinemático en un punto cualquiera O y en un instante determinado.

En este tipo de movimiento, la velocidad lineal de un punto siempre es perpendicular al vector rotación instantánea. Por tanto el segundo invariante cinemático será nulo y el movimiento se puede reducir al vector rotación instantánea aplicada en el eje instantáneo de rotación, ya que la velocidad de los puntos del EIR es nula.

Al punto I intersección con el Eir se le denomina CIR.

Cálculo del CIR:

a) *Método analítico:*

Las coordenadas del CIR se pueden expresar en función de unos ejes fijos y de unos ejes móviles.

–EJES MÓVILES:

$$V_I = 0 = V_A + IA \wedge \omega k$$

Desarrollando y despejando obtendríamos:

$$V_A \wedge V_{Ax}$$

$$I_x = - I_y =$$

$$W \ w$$

-EJES FIJOS:

$$VAY1 \ VAx1$$

$$I_x = - A_{x1} \ I_y =$$

$$W \ w$$

- *Método Gráfico*

Caso 1) Velocidades paralelas y perpendiculares a rectas distintas:

Por equiproyectividad la proyección de ambas velocidades sobre la recta AB es la misma, y el ángulo que forman respecto a AB tb es el mismo, con lo que se cumplirá que ambas velocidades son iguales. Aplicando el campo de velocidades obtenemos que la resultante de rotaciones es nula y el CIR estará en el infinito (Movimiento de traslación)

Caso 2) Velocidades de dos puntos conocidas, paralelas, distintas y perpendiculares a la misma recta:

Las velocidades pueden tener o no mismo sentido, de todos modos , el CIR será el punto de intersección de dos rectas, la que une los puntos A y B de velocidad conocida y la que une los extremos de los vectores velocidad de ambos puntos.

Caso 3) Las velocidades conocidas de dos puntos tienen cualquier dirección sentido y módulo:

Las coordenadas del cir se calcularán trazando por dos puntos de velocidad conocida, A y B, dos perpendiculares a sus velocidades y el punto de intersección de ambas velocidades será el cir.

BASE Y RULETA

La intersección del axoide fijo y el axoide con el plano de movimiento determinan dos curvas polares que se llaman base o ruleta , dependiendo de que estén expresadas en el sistemas de ejes fijos o móviles.

RULETA:

Lugar geométrico de las posiciones del CIR (expresado como la intersección del axoide móvil con el plano del movimiento) para los diferentes valores de tiempo.

$$VAY \ VAx$$

$$I_x = - I_y =$$

$$W \ w$$

BASE:

Lugar geométrico de las posiciones del CIR (expresado como la intersección del axoide fijo con el plano del movimiento) para los diferentes valores de tiempo.

$$V_{Ay1} = V_{Ax1}$$

$$I_x = -A_{x1} \quad I_y =$$

$$W = w$$

CAMPO DE ACELERACIONES EN EL MOVIMIENTO PLANO

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_M + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{MP} - \omega^2 \mathbf{MP}$$

Aunque la velocidad del cir sea nula la aceleración no lo es.

Velocidad de sucesión :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{A}_i = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_s$$