

Valores Máximos y mínimos

Sin duda alguna una de las mayores aplicaciones del cálculo diferencial es la optimización, en los cuales se nos pide la manera óptima de hacer algo. Todos estos problemas de optimización se reducen a encontrar valores máximos y mínimos de funciones.

Una función f tiene un máximo absoluto en C si

$F(c) \geq F(x)$ para toda x en D , donde D es el dominio de f . El número $F(c)$ se llama valor máximo de f en D . De manera análoga una función f tiene un mínimo absoluto en C si

$F(c) \leq F(x)$ para toda x en D , donde D es el dominio de f . El número $F(c)$ se llama valor mínimo de f en D . Estos valores se conocen como valores extremos.

Una función f tiene un máximo local en C si

$F(c) \geq F(x)$ cuando x está cercano a C .

Pero no todas las funciones tienen valores extremos, por eso estudiamos el teorema del valor extremo que dice que si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

Este teorema nos indica si existe o no un valor extremo pero no nos dice como encontrarlo, para este propósito estudiamos el teorema de Fermat que dice que si f tiene un máximo o mínimo local en C y si $F'(c)$ existe, entonces

$f'(c) = 0$. Este teorema sugiere que empecemos a buscar los valores mínimos y extremos de f en los números que hace la función 0 o indefinida. Estos números tienen un nombre especial: Los números críticos de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Por ende si f tiene un extremo local en C , entonces C es un número crítico de f .

En síntesis para hallar los valores máximos y mínimos de una Función f se debe seguir este procedimiento (absolutos de un intervalo $[a, b]$):

Método del intervalo cerrado:

- Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b) .
- Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
- El mas grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el mas pequeño, el valor mínimo absoluto.

Teorema del valor medio

Antes de indaga en el tema del valor medio debemos saber que una función f debe satisfacer el teorema de Rolle que dice que si una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

- f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) .
- $f(a) = f(b)$

Entonces hay un numero c , en (a,b) , tal que $f'(c) = 0$.

Teniendo una función que satisface esas 3 condiciones ponemos en practica una aplicación del teorema de Rolle:

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Sea f una funcion que satisface las siguientes hipótesis:

- f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- f es diferenciable en el intervalo (a, b) .

Entonces, hay un numero c en (a, b) , tal que

$$F'(c) = F(b) - F(a) / (b - a)$$

O bien, lo que es lo mismo

$$F(c) - F(a) = F'(c) (b - a)$$

Este teorema del valor medio sirve para establece algunos de los hechos básicos del calculo diferencial, uno de las cuales es el siguiente teorema.

Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b) entonces f es constante en (a, b) .

En vista de ello, f tiene el mismo valor en dos numero cualesquiera X y Y en (a, b) . Esto quiere decir que f es constante en (a, b) ;

COROLARIO

Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo (a, b) , entonces $f - g$ es constante en (a, b) ; esto es, $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.