ÍNDICE :

Introducción : La combinatoria estudia las diferentes formas en que se pueden realizar la ordenación o agrupamiento de unos cuantos objetos siguiendo unas determinadas condiciones o reglas . Una forma de hacer estos recuentos es utilizar los **diagramas en árbol .** Estos recuentos están intimamente relacionados con la **probabilidad .**

Número factorial : es el producto de nos consecutivos naturales

$n! = (n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot.....3\cdot2\cdot1$

Todo producto tiene al menos dos factores , luego debemos admitir que 0! = 1 y que 1! = 1

Variaciones ordinarias :

Se llama variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n (n
m) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que :

- los n elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden) .

$$Vm,n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Variaciones con repetición : se llama variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos formados por n elementos de manera que :

- los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que estos están colocados (influye el orden) .

$VRm,n = mn$

Permutaciones ordinarias : se llama permutaciones de m elementos a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que :

- en cada grupo intervienen los m elementos sin repetirse ninguno (intevienen todos los elementos)
- dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos m elementos es distinto (influye el orden) .

Pm = m!

Permutaciones con repetición : se llama permutaciones con repetición de m elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercer c ..... a los distintos qrupos que pueden formarse con esos m elementos de forma que :

- intervienen todos los elementos
- dos grupos se diferencian en el orden de colocación de alguno de sus elementos .

$PR_{m}^{a,b,c...} = \frac{m!}{a!b!c!...}$

Combinaciones : se llama combinaciones de m elementos tomados de n en n (n
m) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que :

- cada agrupación está formada por n elementos distrintos entre sí
- dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento , sin tener en cuenta el orden .

$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$= \binom{m}{n}$

= número combinatorio

Combinaciones con repetición : se llama combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n , a los distintos grupos formados por n elementos de manera que :

- los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos

- dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento , sin tener en cuenta el orden .

$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = \binom{m+n-1}{n}$

Por ejemplo las combinaciones con repetición de los elementos (a,b,c,d) tomados de dos en dos son :

aa ab ac ad

bb bc bd

cc cd

dd

Otro ejemplo : en una bodega hay 12 botellas de ron , 12 de ginebra y 12 de anís .Un cliente compró 8 botellas en total . ¿Cuántas posibilidades hay ?

$CR_{8,3} = 120$

Resumen :

Intervienen todos los elementos Permutaciones

Influye el orden Variaciones

No intervienen todos los elementos

No influye el orden Combinaciones

Números combinatorios : se llama número combinatorio de índice m y orden n al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n tales que n
m .

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Propiedades :

- $\binom{m}{0} = \binom{m}{n} = 1$
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
- $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$
- $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{m}{n}$

$$= \frac{m+1}{n+1}$$

Triángulo de Tartaglia o Pascal :

0
0

1
0
1
1

2
0
2
1
2
2

3
0
3
1
3
2
3
3

4
0
4
1
4
2
4
3
4
4

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Binomio de Newton :

(a + b) = a + b

(a + b)2 = a2 + 2ab + b2

(a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3

(a + b)4 = a4 + 4a3b + 6 a2b2 + 4ab3 + b4

.....

Si nos fijamos atentamente , los coeficientes coinciden con los del triángulo de Pascal , los exponentes de a van disminuyendo desde n hasta 0 y los de b van aumentando desde 0 hasta n , y en cada término la suma de los exponentes de a y b es igual a n .

Generalizando :

$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$

ÍNDICE

Definición de Estadística : la palabra estadística procede del vocablo "estado" pues era función principal de los gobiernos de los estados establecer registros de población , nacimientos , defunciones , etc . Hoy en día la

mayoría de las personas entienden por estadística al conjunto de datos , tablas , gráficos , que se suelen publicar en los periodicos .

En la actualidad se entiende por estadística como un método para tomar decisiones , de ahí que se emplee en multitud de estudios científicos .

La estadística se puede dividir en dos partes :

- **Estadística descriptiva o deductiva ,** que trata del recuento , ordenación y clasificación de los datos obtenidos por las observaciones . Se construyen tablas y se representan gráficos , se calculan parámetros estadísticos que caracterizan la distribución , etc.
- **Estadística inferencial o inductiva ,** que establece previsiones y conclusiones sobre una población a partir de los resultados obtenidos de una muestra . Se apoya fuertemente en el cálculo de probabilidades .

Población : es el conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica . Ejemplo : alumnos matriculados en COU en toda España .

Muestra : cualquier subconjunto de la población . Ejemplo : alumnos de COU del Sotomayor .

Carácter estadístico : es la propiedad que permite clasificar a los individuos , puede haber de dos tipos :

- Cuantitativos : son aquellos que se pueden medir . Ejemplo : nº de hijos , altura , temperatura .
- Cualitativos : son aquellos que no se pueden medir . Ejemplo : profesión , color de ojos , estado civil .

Variable estadística : es el conjunto de valores que puede tomar el carácter estadístico cuantitativo (pues el cualitativo tiene "modalidades") . Puede ser de dos tipos :

- **Discreta :** si puede tomar un número finito de valores . Ejemplo : nº de hijos
- **Continua :** si puede tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo . Ejmplo : temperatura , altura .

Frecuencia absoluta fi : (de un determinado valor xi) al número de veces que se repite dicho valor .

Frecuencia absoluta acumulada Fi : (de un determinado valor xi) a su frecuencia absoluta más la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores anteriores .

Frecuencia relativa hi : es el cociente fi/N , donde N es el número total de datos .

Frecuencia relativa acumulada Hi : es el cociente Fi/N

Si las frecuencias relativas las multiplicamos por 100 obtenemos los % .

Tratamiento de la información : se deben de seguir los siguientes pasos :

- recogida de datos
- ordenación de los datos
- recuento de frecuencias
- agrupación de los datos , en caso de que sea una variable aleatoria continua o bien discreta pero con un número de datos muy grande se agrupan en clases .

Nº de clases = $\sqrt{N}$

Los puntos medios de cada clase se llaman marcas de clase .

Además se debe adoptar el criterio de que los intervalos sean cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha .

- construcción de la tabla estadística que incluirá , clases , marca de clase , fi , Fi , hi , Hi .

Ejemplo : Las notas de Matemáticas de una clase han sido las siguientes :

5 3 4 1 2 8 9 8 7 6 6 7 9 8 7 7 1 0 1 5 9 9 8 0 8 8 8 9 5 7

Construir una tabla :

xi	**fi**	**Fi**	**hi**	**Hi**
0	2	2	2/30	2/30
1	3	5	3/30	5/30
2	1	6	1/30	6/30
3	1	7	1/30	7/30
4	1	8	1/30	8/30
5	3	11	3/30	11/30
6	2	13	2/30	13/30
7	5	18	5/30	18/30
8	7	25	7/30	25/30
9	5	30	5/30	30/30
	30		1	

Representaciones gráficas : para hacer más clara y evidente la información que nos dan las tablas se utilizan los gráficos , que pueden ser :

- Diagramas de barras (datos cualitativos y cuantitativos de tipo discreto) . En el eje y se pueden representar frecuencias absolutas o relativas .

- Histogramas (datos cuantitativos de tipo continuo o discreto con un gran número de datos) . El histograma consiste en levantar sobre cada intervalo un rectángulo cuyo área sea igual a su frecuencia absoluta

área = base · altura fi = $\Delta x_i \; n_i$

luego la altura de cada rectángulo vendrá dada por ni que se llama **función de**

densidad . Si por ejemplo un intervalo es doble de ancho que los demás su altura ni debe ser la mitad de la frecuencia absoluta y así no se puede inducir a errores . Normalmente la amplitud de los intervalos es cte por lo que ni será

proporcional a fi y por tanto podemos tomar fi como la altura ni ya que la forma del gráfico será la misma , aunque ahora el área del rectángulo ya no sea exactamente la frecuencia absoluta (a no ser que la amplitud del intervalo sea igual a 1) .

- Polígono de frecuencias

- Diagrama de sectores

- Cartogramas
- Pirámides de población
- Diagramas lineales
- Pictogramas

CÁLCULO DE PARÁMETROS :

Medidas de centralización :

- **Media aritmética :**

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ...}{N}$$

$$= \frac{x_i}{N}$$

si son pocos datos

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ...}{f_1 + f_2 + ...}$$

$$= \frac{x_i f_i}{N}$$

si son muchos valores pero se repiten mucho

En el caso de que los datos estén agrupados en clases , se tomará la marca de clase

como xi .

No siempre se puede calcular la media aritmética como por ejemplo cuando los

datos son cualitativos o los datos están agrupados en clases abiertas .

Ejemplo : hacer los cálculos para el ejercicio de las notas

- **Moda :** es el valor de la variable que presenta mayor frecuencia absoluta . Puede haber más de una . Cuando los datos están agrupados en clases se puede tomar la marca de clase o utilizar la fórmula :

$$M0 = Linf + \Delta \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

donde : Linf = límite inferior de la clase modal , Δ =amplitud

del intervalo , d1= diferencia entre la fi de la clase modal y la fi de la clase anterior y

d2 = diferencia entre la fi de la clase modal y la fi de la clase posterior .

También se puede hacer gráficamente :

La moda si sirve para datos cualitativos , pero no tiene por qué situarse en la zona

central del gráfico .

Ejemplo : en el ejercicio de las notas la moda sería x=8

- **Mediana :** es el valor de la variable tal que el número de observaciones menores que él es igual al número de observaciones mayores que él . Si el número de datos es par , se puede tomar la media aritmética de los dos valores centrales .

Cuando los datos están agrupados la mediana viene dada por el primer valor de la variable cuya Fi excede a la mitad del número de datos . Si la mitad del número de datos coincide con Fi se tomará la semisuma ente este valor y el siguiente .

Cuando los datos estén agrupados en clases se puede utilizar reglas de tres o la fórmula :

$$M = Linf + \Delta \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i}$$

Gráficamente se hace a partir del polígono de frecuencias acumuladas .

Ejemplo : En el caso de las notas podrías ordenar de menor a mayor los datos y obtendríamos : 0 0 1 1 1 2 3 4 5 5 5 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9

dato número 15−16 (por ser par)

luego la mediana sería 7

También se podría observar las Fi y ver que en el 7 se excede a la mitad del nº de datos , es decir , sobrepasa el 15 .

- **Cuantiles :** son parámetros que dividen la distribución en partes iguales , así por ejemplo la mediana los divide en dos partes iguales , los **cuartiles** son tres valores que dividen a la serie de datos en cuatro partes iguales , los **quintiles** son cuatro valores que lo dividen en 5 partes , los **deciles** en 10 y los **percentiles** en 100 . Se calculan de la misma manera que la mediana .

También se puede utilizar la fórmula : $Cn = Linf + \Delta \frac{n \frac{N}{100} - F_{i-1}}{f_i}$

donde n es el valor que deja el n% de valores por debajo de él .

Medidas de dispersión :

- **Rango o recorrido :** es la diferencia entre el mayor valor y el menor . Depende mucho de los valores extremos por que se suele utilizar el rango intercuartílico =

Q3 − Q1 o el rango entre percentiles = P90 − P10

Ejemplo : Para el caso de las notas sería 9 − 0 = 9

- **Varianza s2 :** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media (desviación respecto a la media d = xi − $\overline{x}$) .

$$s2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ...}{N}$$

$$= \frac{(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

$$s2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ...}{f_1 + f_2 + ...}$$

$$= \frac{f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

Al igual que la media en el caso de que los datos estén agrupados en clases , se tomará la marca de clase como xi .

Otra forma de calcular s2 es :

$$s2 = \frac{f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

$$= \frac{f_i(x_i^2 + \overline{x}^2 - 2x_i\overline{x})}{N} =$$

$$\frac{f_i x_i^2}{N} + \overline{x}^2 - 2\overline{x}^2$$

$$= \frac{f_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2$$

Se llama **desviación típica s** a la raíz cuadrada de la varianza . Es más útil que la varianza ya que tiene las mismas dimensiones que la media

Ejemplo : Hacer los cálculos para el ejercicio de las notas

- **Coeficiente de variación :** es el cociente entre la desviación típica y la media aritmética . Valores muy bajos indican muestras muy concentradas .

$$C.V. = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES :

Variables estadísticas bidimensionales : es cuando al estudiar un fenómeno obtenemos dos medidas x e y , en vez de una como hemos hecho hasta ahora .

Ejemplo : pulso y tª de los enfermos de un hospital , ingresos y gastos de las familias de los trabajadores de una empresa , edad y nº de días que faltan al trabajo los productores de una fábrica .

Tipos de distribuciones bidimensionales :

- cualitativa − cualitativa
- cualitativa − cuantitativa (discreta o continua)
- cuantitativa (discreta o continua) − cuantitativa (discreta o continua)

Tipos de tablas :

- Tabla de dos columnas xi , yi (pocos datos)
- Tabla de tres columnas xi , yi , fi (muchos datos y pocos valores posibles)
- Tablas de doble entrada (muchos datos y muchos valores posibles)

	x1	x2	.....	xn	f*j
y1	f11	f21	.....	fn1	f*1
y2	f12	f22	.....	fn2	f*2
.....	.....	.....	.....	.....	.....
ym	f1m	f2m	.....	fnm	f*m
fi*	f1*	f2*	.....	fn*	f**=N

Diagramas de dispersión :

Si hay pocos datos (tabla de dos columnas), se representan las variables en los ejes x e y .

Si hay muchos datos pero muy agrupados (tabla de tres columnas y tablas de doble entrada), se hace igual pero con los puntos más gordos según la fi ,o se pintan muchos puntos juntos , o se pinta en tres dimensiones x , y , fi , con lo que obtendríamos un diagrama de barras en tres dimensiones .

Si hay muchos datos y muchos valores posibles , se pueden agrupar en clases , y se utilizan los **estereogramas** (3 dimensiones) en los que el volumen de cada prisma es proporcional a la frecuencia . También se puede tomar la marca de clase de los intervalos y tratar la variable continua como si fuese discreta .

Cálculo de parámetros :

- Cuando hay pocos datos o están muy agrupados (tablas de 2 o 3 columnas)

$$\overline{x} = \frac{x_i f_i}{N}$$

$$\overline{y} = \frac{y_i f_i}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}$$

$$s_y^2 = \frac{f_i (y_i - \overline{y})^2}{N}$$

Aparece un parámetro nuevo que es la **covarianza** que es la media aritmética de las desviaciones de cada una de las variables respecto a sus medias respectivas .

$$s_{xy} = \frac{f_i(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{N}$$
$$= \frac{f_i x_i y_i}{N} - \overline{x}\ \overline{y}$$

- Cuando hay muchos datos (tablas de doble entrada)

$$\overline{x} = \frac{x_i f_{i*}}{N} = \frac{x_i f_{ij}}{N}$$
$$\overline{y} = \frac{y_j f_{*j}}{N} = \frac{y_j f_{ij}}{N}$$
$$s_x^2 = \frac{f_{i*}(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{f_{ij}(x_i - \overline{x})^2}{N} = f_{ij} x_i^2 - \overline{x}^2$$
$$s_y^2 = \frac{f_{*j}(y_j - \overline{y})^2}{N} = \frac{f_{ij}(y_j - \overline{y})^2}{N} = f_{ij} y_j^2 - \overline{y}^2$$
$$s_{xy} = \frac{f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{N}$$
$$= \frac{f_{ij} x_i y_j}{N} - \overline{x}\ \overline{y}$$

Correlación o dependencia : es la teoría que trata de estudiar la relación o dependencia entre las dos variables que intervienen en una distribución bidimensional , según sean los diagramas de dispersión podemos establecer los siguientes casos :

- **Independencia funcional o correlación nula** : cuando no existe ninguna relación entre las variables .(r = 0)
- **Dependencia funcional o correlación funcional** : cuando existe una función tal que todos los valores de la variable la satisfacen (a cada valor de x le corresponde uno solo de y o a la inversa) (r = 1)
- **Dependencia aleatoria o correlación curvilinea (ó lineal)**: cuando los puntos del diagrama se ajustan a una linea recta o a una curva , puede ser positiva o directa , o negativa o inversa ($-1<r<0$ ó $0<r<1$)

Ejemplo : a 12 alumnos de COU se les toma las notas de los últimos exámenes de Matemáticas , Física y Filosofía :

Matemáticas	Física	Filosofía
2	1	2
3	3	5
4	2	7
4	4	8
5	4	5
6	4	3
6	6	4

7	4	6
7	6	7
8	7	5
10	9	5
10	10	9

Si representamos las variables matemáticas− física en un diagrama y matemáticas−filosofía en otro vemos que la correlación es mucho más fuerte en el primero que en el segundo ya que los valores están más alineados .

Coeficiente de correlación lineal : es una forma de cuantificar de forma más precisa el ttipo de correlación que hay entre las dos variables .

$$\mathbf{r} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Regresión : consiste en ajustar lo más posible la nube de puntos de un diagrama de dispersión a una curva . Cuando esta es una recta obtenemos la recta de regresión lineal , cuando es una parábola , regresión parabólica , cuando es una exponencial , regresión exponencial , etc . (logicamente r debe ser distinto de 0 en todos los casos) .

La **recta de regresión de y sobre x** es : $y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$

en la cual se hace mínima la distancia entre los valores yj obtenidos experimentalmente y los valores teóricos de y.

A valor $\frac{s_{xy}}{s_x^2}$

se le llama **coeficiente de regresión de y sobre x** (nos da la pendiente de la recta de regresión).

La **recta de regresión de x sobre y** es : $x - \overline{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})$

en la cual se hace mínima la distancia entre los valores xi obtenidos experimentalmente y los valores teoricos de x.

A valor $\frac{s_{xy}}{s_y^2}$

se le llama **coeficiente de regresión de x sobre y** (su inversa nos da la otra pendiente) .

ÍNDICE

Métodos de muestreo : para no tener que trabajar con toda la población se utiliza el muestreo . Puede ser :

- Muestreo no probabilístico : no se usa el azar , sino el criterio del investigador , suele presentar grandes sesgos y es poco fiable .
- Muestreo probabilístico : se utilizan las leyes del azar . Puede ser :

- **Muestreo aleatorio simple** (es el más importante) : cada elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser elegido , las observaciones se realizan con reemplazamiento , de manera que la población es identica en todas las extracciones , o sea , que la selección de un individuo no debe afectar a la probabilidad de que sea seleccionado otro cualquiera aunque ello comporte que algún individuoo pueda ser elegido más de una vez . ("se hacen tantas papeletas numeradas como indivuos hay , se coge una y se devuelve , se vuelve a coger otra y se devuelve , etc")
- **Muestreo sistemático** : es cuando los elementos de la población están ordenados por listas . Se elige un individuo al azar y a continuación a intervalos constantes se eligen todos los demás hasta completar la muestra . Si el oreden de los elementos es tal que los individuos próximos tienden a ser más semejantes que los alejados , el muestreo sistemático tiende a ser más preciso que el aleatorio simple , al cubrir más homogeneamente toda la población .
- **Muestreo estratificado** : es cuando nos interesa que la muestra tenga la misma composición a la de la población la cual se divide en clases o estratos . Si por ejemplo en la población el 20% son mujeres y el 80% hombres , se mantendrá la misma proporción en la muestra .

Distribuciones de muestreo : al obtener conclusiones de la muestra y las comparamos con las de la población puede que se aproximen o no . No obstante , las medias muestrales se comportan estadísticamente bien y siguen leyes perfectamente previsibles , esto nos permitirá hacer inferencias precisas a partir de ellas , incluso determinar el riesgo que asumimos al hacerlas .

Si una población está formada por N elementos , el nº de muestras diferentes de tamaño n que se pueden obtener , si se pueden repetir los elementos (m.a.s.) sería :

$VRN,n=Nn$

Distribución de medias muestrales : aunque al tomar una muestra no podemos estar seguros de que los parámetros obtenidos sean buenos estimadores de los parámetros poblacionales si se puede afirmar que :

- La media de las medias muestrales es igual a la media real de la población es decir :

$$\overline{X} = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots\ldots\ldots + \overline{x}_n}{\text{n de muestrasposibles}} = \mu$$

- La desviación típica de las medias muestrales vale :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Esto significa que la distribución de medias muestrales de tamaño n extraidas de una población (normal o no normal) se distribuye según una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Ejemplo : Supongamos que tenemos los elementos 2,4,6,8 .

$$\mu = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2}{4} - 5^2} = 2'23$$

En esta población vamos a tomar todas las muestras posibles de tamaño 2 :

Elementos e1 e2	Media de la muestra
2 2	2
2 4	3
2 6	4
2 8	5
4 2	3
4 4	4
4 6	5
4 8	6
6 2	4
6 4	5
6 6	6
6 8	7
8 2	5
8 4	6
8 6	7
8 8	8

La media de las medias muestrales será : $\overline{X} = \frac{2+3+4+5+3+....}{16} = 5$

La varianza de las medias muestrales será : $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + ...}{16}} = 1'58$

Por lo tanto $\overline{X} = \mu$

y $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ejemplo : el peso de los recién nacidos en una maternidad se ha distribuido según una ley normal de media μ =3100gr y de desviación típica σ
=150gr ¿ Cuál será la probabilidad de que la media de una muestra de 100 recién nacidos se superior a 3130gr ?

La distribución muestral sigue una N(3100,15) por lo que $p(\bar{x} > 3130) =$

$p\ Z > \frac{3130 - 3100}{15} = p(Z > 2)$

= 1 − 0'9772 = 0'0228

por lo tanto solo un 2'28% de las muestras tendrá una media por encima de los 3130gr

Intervalos de probabilidad : inferencia estadística ;Como la distribución de medias muestrales es $N\ \mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
se tendrá por ejemplo que :

$$p\ \mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad \overline{X}\quad \mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ =0'6826$$

$$p\ \mu-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad \overline{X}\quad \mu+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ =0'9544$$

$$p\ \mu-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad \overline{X}\quad \mu+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ =0'9974$$

Esto significa que por ejemplo el 68'26% de las muestras de tamaño n extraidas de una población de media μ y desviaci n σ
tendrán una media perteneciente al intervalo $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$

En general el 100·(1–α
)% de las muestras de tamaño n tendrán una media comprendida entre : $\mu-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

siendo $\alpha/2$
el valor de la probabilidad que queda a cada lado del intervalo . O lo que es lo mismo :

$$p\ \mu-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad x\quad \mu+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ =1-\alpha$$

(nivel de confianza)

Así por ejemplo si α
=0'05 entonces el 95% de las muestras tendrán una media comprendida entre $\mu-z_{0'025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{0'025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

= $\mu-1'96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+1'96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

μ

$1-\alpha$

$\alpha/2$

$\alpha/2$

$\mu+1'96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sin embargo lo normal será que se desconozca la media y la desviación típica de la población y que mediante técnicas de muestreo se busque estimarlas con la fiabilidad necesaria .

Por lo tanto si nos hacen la pregunta de otra forma (¿ cuál es la probabilidad de que la media poblacional se encuentre entre ...?) podremos transformar la desigualdad obteniendo :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu \quad \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$p\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu \quad \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

(nivel de confianza)

A este intervalo se le llama **intervalo de confianza** para la media poblacional . A lo que está fuera del intervalo se le llama **regíon crítica** .

Al valor $1-\alpha$
se le llama **nivel de confianza** .

Al valor α
se le llama **nivel de significación** .

$\overline{x}$

Por lo tanto el nuevo dibujo sería :

$$\overline{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto podemos afirmar que en ese intervalo tenemos una probabilidad del 95

% de que está la media poblacional .

Como ya hemos dicho lo normal será que se desconozca la desviación , por lo que debemos sustituir σ **por sn−1=** $\sqrt{\frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$

donde sn−12 es la cuasivarianza muestral .

La relación entre la varianza muestral y la cuasivarianza muestral es :

$$s^2_{n-1} = \frac{n}{n-1}s^2$$

Aunque para valores grandes de n (mayores de 30) coinciden aproximadamente la cuasivarianza y la varianza por lo que se puede sustituir σ por s .

Por lo tanto :

$$p\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\ \ \mu\ \ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

Para n grandes :

$$p\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \ \mu\ \ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

Distribución para proporciones : cuando se trata de determinar la proporción de una población que posee un cierto atributo (hombre/mujer , video/no video , éxito/fracaso , etc) su estudio es equiparable al de una distribución binomial . Así pues si tomamos muestras aleatorias de tamaño n , la media y la desviación típica de las medias muestrales será : $\bar{p}=p \qquad \sigma_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$

Esta distribución es aproximadamente normal para valores grandes de n (mayor de 30) en consecuencia puede estudiarse como una N $p,\sqrt{\frac{pq}{n}}$

Si hablamos de intervalos de probabilidad entonces :

$$p\left(p-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ \ \bar{p}\ \ p+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=1-\alpha$$

(nivel de confianza)

Como lo que no se suele saber es la media y la varianza podemos hacer :

$$p\left(\bar{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\ \ p\ \ \bar{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\right)=1-\alpha$$

Error admitido y tamaño de la muestra :

cuando decimos que $\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \mu\ \ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

estamos admitiendo un error máximo de $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

esto es : la diferncia máxima entre la media poblacional y la media muestral debe ser menor que este valor . Como se puede observar de este valor se puede controlar dos parámetros , n y z .

El tamaño mínimo de una encuesta depende de la confianza que se desee para los resultados y del error máximo que se esté dispuesto a asumir :

E = $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

despejando $n = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}^{2}$

Analogamente se puede hacer para la distribución de proporciones .

Ejemplo : se desea realizar una investigación para estimar el peso medio de los hijos de madres fumadoras . Se admite un error máximo de 50 gr , con una confianza del 95% . Si por estudios se sabe que la desviación típica es de 400 gr ¿ Qué tamaño mínimo de muestra se necesita en la investigación ?

El tamaño mínimo de la muestra debe ser n = $1\!96\frac{400}{50}^{2} = 245\!86$

= 246

Contraste de hipótesis sobre la media poblacional : La media muestral ppuede ser diferente de la media poblacional . Lo normal es que estas diferencias sean pequeñas y estén justificadas por el azar , pero podría suceder que no fuesen debidas al azar sino a que los parámetros poblacionales sean otros , que por los motivos que sea , han cambiado .

El contraste de hipótesis es el instrumento que permite decidir si esas diferencias pueden interpretarse como fluctuaciones del azar (hipótesis nula)o bien , son de tal importancia que requieren una explicación distinta (hipótesis alternativa). Como en los intervalos de confianza las conclusiones se formularán en términos de probabilidad .

Comparando la media poblacional y la media muestral ¿ Podemos asegurar que esa muestra procede de una población de media μ
0 ? La respuesta será no cuandoμ
0 no pertenezca al intervalo de confianza de $\overline{x}$
, para el nivel de significación prefijado , por el contrario la respuesta será sí cuando sí pertenezca a tal intervalo .

Sí pertenece a la población..... $\mu_0 \quad \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

se acepta la hipótesis nula . Otra forma de verlo es que : $\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \quad z_{\alpha/2}$

No pertenece a la población ..... $\mu_0 \quad \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

se rechaza la hipótesis nula . Otra forma de verlo es que : $\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \quad z_{\alpha/2}$

Error de tipo I : es el que cometemos cuando rechazamos la hipótesis nula siendo verdadera .

Error de tipo II : es el que cometemos cuando aceptamos la hipótesis nula siendo falsa .

Podemos hacer todavía dos preguntas :

¿ La muestra procede de una población con media mayor que la supuesta ?

Se acepta que la media poblacional es mayor que la supuesta μ_0
cuando : $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad z_\alpha$
desarrollando la igualdad obtenemos que : $\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu_0$

μ_0

$\overline{x}$

$\overline{x} - 196\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La media poblacional debe de estar por encima de $\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

y por lo tanto por encima de μ_0

La rechazamos en caso contrario .

¿ La muestra procede de una población con media menor que la supuesta ?

Se acepta que la media es menor que la supuesta cuando : $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad -z_\alpha$

desarrollando la igualdad obtenemos que : $\overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu_0$

μ_0

$\overline{x}$

$\overline{x} + 196\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La media poblacional debe de estar por debajo de $\overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

y por lo tanto por debajo de μ_0

La rechazamos en caso contrario .

Nota : No olvidemos que en todas las ecuaciones anteriores si se desconoce la deviación típica de la población debemos sustituirla por la cuasivarianza de la muestra.

Contraste de hipótesis sobre la proporción p : por analogía con el apartado anterior par responder a la pregunta : ¿ Puede asegurarse que esa muestra de proporción $\overline{p}$
procede de una población con proporción p0 ?

La respuesta será sí cuando : $\left|\frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{pq/n}}\right| \quad z_{\alpha/2}$

con una probabilidad de 1 – α

Se admite que la media poblacional es mayor que un valor p0 si :

$$\frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{pq/n}} \quad z_\alpha$$

Se admite que la media poblacional es menor que un valor p0 si :

$$\frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{pq/n}} \quad -z_\alpha$$

ÍNDICE

SUCESOS ALEATORIOS

Experimento aleatorio : es aquel que se caracteriza porque al repetirlo bajo análogas condiciones jamás se puede predecir el resultado que se va a obtener . En caso contrario se llama experimento determinista .

Espacio muestral E : (de un experimento aleatorio) es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento .

Suceso de un experimento aleatorio : es un subconjunto del espacio muestral . Puede haber los siguientes tipos :

- suceso elemental
- suceso compuesto (de varios sucesos elementales)
- suceso seguro
- suceso imposible
- suceso contrario

Operaciones con sucesos :

- **Unión de sucesos** : la unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando se realiza A ó B
- **Intersección de sucesos** : la intersección de A y B es el suceso que se realiza cuando se realizan simultaneamente los sucesos A y B . Cuando es imposible que los sucesos se realicen

simultaneamente se dice que son **incompatibles** . Si $A \quad B = \Phi$ entonces son incompatibles . En caso contrario se dice que son compatibles .

Propiedades :

	Unión	Intersección
Asociativa	(A B) C=A (B C)	(A B) C=A (B C)
Conmutativa	A B=B A	A B=B A
Idempotente	A A=A	A A=A
Simplificativa	A (B A)=A A (B A)=A	
Distributiva	A (B C)=(A B) (A C) A(B C)=(A B) (A C)	
Suceso contrario	$\underline{A}$ $\overline{A}$ = E	$\underline{A}$ $\overline{A} = \Phi$

Sistema completo de sucesos : Se dice que un conjunto de suceesos A1 , A2 .....constituyen un sistema completo cuando se verifica :

- A1 A2 .....=E
- A1 , A2 , ...son incompatibles 2 a 2 .

A1 A2 ..... An

PROBABILIDAD

Ley de los grandes números : La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número , a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente . Este número lo llamaremos **probabilidad de un suceso .**

Definición clásica de probabilidad : (regla de Laplace)

$$p(A) = \frac{\text{n de casos favorables}}{\text{n de casos posibles}}$$

(para aplicar esta definición se supone que los sucesos elementales son equiprobables)

Definición axiomática de probabilidad : (Kolmogorov) Se llama probabilidad a una ley que asocia a cada suceso A un número real que cumple los siguientes axiomas :

- La probabilidad de un suceso cualquiera del espacio de sucesos siempre es positiva , es decir **p(A) 0**
- La probabilidad del suceso seguro es 1 , es decir , **p(E) = 1**
- La probabilidad de la unión de sucesos <u>incompatibles</u> es igual a la suma de probabilidades de cada uno de ellos , o sea , **p(A B) = p(A) + p(B)**

Consecuencias de los axiomas :

- p($\overline{A}$) = 1 − P(A)
- p(Φ) = 0
- $0 \quad p(A) \quad 1$
- Si A B $p(A) \quad p(B)$
- Si los suceso son <u>compatibles</u> : p(A B) = p(A) + p(B) − p(A B)

Para el caso de tres sucesos compatibles sería :

p(A
B
C) = p(A) + p(B) + p(C) − p(A
B) − p(A
C) − p(B
C) + p(A
B
C)

Probabilidad condicionada p(A/B) : Se llama probabilidad del suceso A condicionado por B a la probabilidad de que se cumpla A una vez que se ha verificado el B .

$$p(A/B) = \frac{p(A \quad B)}{p(B)}$$

A B

a b c

p(A B) = $\frac{b}{a+b+c}$

p(B) = $\frac{b+c}{a+b+c}$

p(A/B) = $\frac{b}{b+c}$

Otra forma de ver la fórmula es :

p(A B) = p(B) · p(A/B) = p(A) · p(B/A) = p(B A)

Generalizando : p(A B C) = p(A) · p(B/A) · p(C/A B)

Ejemplo :

	Hombres	Mujeres	
Fuman	70	40	110
No Fuman	20	30	50
	90	70	160

p(H) = 90/160 p(M) = 70/160 p(F) = 110/160 p(NF) = 50/160

p(H/NF) = 20/50 p(H/F) = 70/110 p(M/NF) = 30/50 p(M/F) = 40/110

p(H F) = 70/160 = p(F) · p(H/F) = (110/160) · (70/110)

Lo mismo se podría hacer con color de ojos (marrones y azules) y color de pelo (rubio y castaño) .

Sucesos independientes : dos sucesos A y B se dice que son independientes si

p(A) = p(A/B) . En caso contrario , p(A) p(A/B) , se dice que son dependientes .

Probabilidad de la intersección o probabilidad compuesta :

- Si los sucesos son dependientes p(A B) = p(A) · p(B/A) = p(B) · p(A/B)
- Si los sucesos son independientes p(A B) = p(A) · p(B)

Ejemplo : si al extraer dos cartas de una baraja lo hacemos con devolución tendremos dos sucesos independientes , p(A

B) = p(A) · p(B) pero si lo hacemos sin devolución ahora si son dependientes p(A
B) = p(A) · p(B/A) .

Teorema de la probabilidad total : sea un sistema completo de sucesos y sea un suceso B tal que p(B/Ai) son conocidas , entonces :

p(B) = p(B
A1) + p(B
A2) + ...= $p(B \quad A_i)$

A1 A2 A3 A4

B

B

Teorema de Bayes : sea un sistema completo de sucesos y sea un suceso B tal que p(B/Ai) son conocidas , entonces :

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i)\ p(B / A_i)}{p(A_i)\ p(B / A_i)}$$

Ejemplo importante : Se va ha realizar el siguiente experimento , se tira una moneda , si sale cara se saca una bola de una urna en la que hay 4 bolas negras , 3 turquesa y 3 amarillas , si sale cruz se saca una bola de otra urna en la que hay 5 bolas negras , 2 turquesa y 3 amarillas .

NNNN

TTT

AAA

Cara −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

NNNNN

TT

AAA

Cruz −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

N 4/10 p(Cara
N) = 1/2 · 4/10 = 4/20

Cara 1/2 T 3/10 p(Cara
T) = 1/2 · 3/10 = 3/20

A 3/10 p(Cara
A) = 1/2 · 3/10 = 3/20

N 5/10 p(Cruz
N) = 1/2 · 5/10 = 5/20

Cruz 1/2 T 2/10 p(Cruz
T) = 1/2 · 2/10 = 2/20

A 3/10 p(Cruz
A) = 1/2 · 3/10 = 3/20

Tª de la probabilidad total : p(N) = p(Cara
N) + p(Cruz
N) = 4/20 + 5/20 = 9/20

Tª de Bayes : $p(\text{Cara}/N) = \frac{p(\text{Cara} \quad N)}{p(\text{Cara} \quad N) + p(\text{Cruz} \quad N)}$

que no es ni más ni menos que casos favorables entre casos posibles .

DISTRIBUCIONES DISCRETAS : DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Variable aleatoria X : es toda ley que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real . Esto permite sustituir los resultados de una prueba o experimento por números y los sucesos por partes del conjunto de los números reales .

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas .

Por ejemplo en el experimento aleatorio de lanzar tres monedas el espacio muestral es E = [CCC , CCX , CXC , XCC , CXX , XCX , XXC , CCC] . Supongamos que a cada suceso le asignamos un número real igual al número de caras obtenidas . Esta ley o función que acabamos de construir la llamamos variable aleatoria (discreta) que representa el nº de caras obtenidas en el lanzamiento de tres monedas .

Consideremos el experimento que consiste en elgir al azar 100 judías de una plantación y medimos su longitud . La ley que asocia a cada judía su longitud es una variable aleatoria (continua).

Por ejemplo al lanzar un dado podemos tener la varible aleatoria xi que asocia a cada suceso el nº que tiene en la parte de arriba .

Por ejemplo al lanzar dos dados podemos tener la variable aleatoria xi que asocia a cada suceso el producto de los dos números que tiene en la parte de arriba .

Función de probabilidad : (de una variable aleatoria) es la ley que asocia a cada valor de la variable aleatoria xi su probabilidad pi = p(X = xi) .

Función de distribución F(x) : (de una variable aleatoria) es la ley que asocia a cada valor de la variable aleatoria , la probabilidad acumulada de este valor .

F(x) = p (X
x)

Media de una variable aleatoria discreta : $\mu = \quad x_i \; p_i$

Varianza de una variable aleatoria discreta : σ^2

= $(x_i - \overline{x})^2 \, p_i$

Ejemplo : en una bolsa hay bolas numeradas : 9 bolas con un 1 , 5 con un 2 y 6 con un 3 . Sacamos una bola y vemos que número tienen .

La función de probabilidad es :

xi	1	2	3
pi	9/20	5/20	6/20

La función de distribución es :

xi	1	2	3
pi	9/20	14/20	20/20

La media es 1·(9/20)+2·(5/20)+3·(6/20) = 1'85

La varianza es (1−1'85)2 · 9/20 + (2−1'85)2 · 5/20 + (3−1'85)2 · 6/20 = 0'72

Distribución binomial : Una variable aleatoria es binomial si cumple las siguientes características :

- Los elementos de la población se clasifican en dos categorias , éxito o fracaso .
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados anteriores
- La probabilidad de éxito y fracaso es siempre constante

Ejemplos : fumadores de una población , nº de aprobados de la clase , días de lluvia a lo largo de un año , nº de caras al tirar una moneda , etc .

- **Función de probabilidad** p(X = r) = $\binom{n}{r}$ pr qn−r donde p es la probabilidad de éxito , q la probabilidad de fracaso , n el numero total de pruebas y r el número de éxitos .
- **Función de distribución** p(X x) = $\sum_{r=0}^{r=x} \binom{n}{r}$ pr qn−r
- **Media** $\mu = n \ p$
- **Varianza** σ^2 = n · p · q

Ejemplo : Se lanza una moneda 11 veces :

¿ Cuál es la probabilidad de obtener 5 caras ?

¿ Cuál es la probabilidad de obtener 5 o menos caras ?

¿ Cuántas caras se obtienen por término medio ?

¿ Cuál es la desviación típica ?

DISTRIBUCIONES CONTINUAS : DISTRIBUCIÓN NORMAL

Función de densidad f(x) : cuando en un histograma de frecuencias relativas de una variable continua aumentamos el nº de clases y por lo tanto su amplitud es más pequeña vemos que el polígono de frecuencias relativas se acerca a una función f(x) que llamaremos función de densidad que cumple las siguientes propiedades :

- f(x) 0
- $\int_{-}^{+} f(x)dx = 1$

  el área encerrada bajo la curva de la función es igual a la unidad .
- $\int_{a}^{b} f(x)dx = p(a \quad X \quad b)$

  área bajo la curva correspondiente a ese intervalo .

Función de distribución F(x) = p(X x) : cuando en un histograma de frecuencias relativas acumuladas de una variable continua aumentamos el nº de clases y por lo tanto su amplitud es más pequeña vemos que el polígono de frecuencias relativas acumuladas se acerca a una función F(x) que llamaremos función de distribución que cumple las siguientes propiedades :

- F(a) = $\int_{-}^{a} f(x)dx$

  = p(— X a) por lo tanto :

p(a X b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$

= F(b) − F(a)

- F(x) es nula para todo valor de x anterior al menor valor de la variable aleatoria y es igual a la unidad para todo valor posterior al mayor valor de la variable aleatoria . Si es continua se dice que F(−)=0 y F(+)=1
- Por ser una probabilidad $0 \quad F(x) \quad 1$.
- Es una función creciente .

Media de una variable aleatoria continua : $\mu = \int_{a}^{b} x \ f(x)dx$

Varianza de una variable aleatoria continua : σ^2

$$= \int_a^b (x - \overline{x})^2 f(x)dx$$

Distribución normal : una variable aleatoria es normal si se rige según las leyes del azar . La mayoría de las distribuciones más importantes son normales . Por ejemplo la distribución de los pesos de los individuos de cualquier especie , la estatura de una pobablación , Tª del mes de agosto a lo largo de 100 años , la longitud de los tornillos que salen de una fábrica , etc .

No todas las distribuciones son normales por ejemplo si clasificamos según el nivel de renta a los ciudadanos españoles son muy pocos los que poseen niveles de rentas altas y en cambio son muchos los que poseen niveles de rentas bajas , por tanto la distribución no sería simétrica y en consecuencia no se adapta al modelo normal .

Función de densidad : una variable continua X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , y se designa por N(μ , σ) , si cumple que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Podríamos comprobar que :

$$\int_{-}^{+} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu$$

$$\int_{-}^{+} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma^2$$

Para calcular los máximos y mínimos deberíamos hacer :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma}$$

f(x) , puesto que f(x) nunca puede valer 0 entonces , si x = μ
f ' (x) = 0

por lo que será un posible máximo o mínimo .

f "(x) = $-\frac{1}{\sigma^2}\left(1-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 f(x)$

luego f "(μ) <0 por lo que es hay un máximo en el punto ($\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$)

Conviene observar que cuando la desviación típica es elevada aumenta la dispersión y se hace menos puntiaguda la función ya que disminuye la altura del máximo . Por el contrario para valores pequeños de σ obtenemos una gráfica menos abierta y más alta .

Cuando μ = 0 y σ =1 , N(0,1) se dice que tenemos una distribución normal reducida , estandar o simplificada .

Función de distribución : $F(x) = \int_{-}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

= p(X x)

Distribución Normal Estándar N(0,1) : La distribución N(0,1) se encuentra tabulada , lo cual permite un cálculo rápido de las probabilidades asociadas a esta distribución . Pero en general la media no suele ser 0 , ni la varianza 1 , por lo que se hace una transformación que se llama **tipificación de la variable** , que consiste en hacer el siguiente cambio de variable :

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

a partir del cual obtenemos una variable Z que si es N(0,1) y que por lo tanto podemos calcular sus probabilidades .

$F(x) = \int_{-}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \sigma\, dz$

Ejemplo : si tenemos N(2,4) y queremos calcular p(x<7) entonces :

$p(x<7) = p\left(\frac{x-2}{4} < \frac{7-2}{4}\right)$

= p(z < −5/4) = 0'1056

Manejo de tablas : pueden presentarse los siguientes casos :

p(z<1'45) = 0'9265

p(z<−1'45) = 0'0735

p(1'25<z<2'57) = 0'1005

p(−2'57<z<−1'25) = 0'1005

p(−0'53<z<2'46) = 0'695

Utilización conjunta de μ y σ :

En $(\mu \quad \sigma)$ está el 68'26% de los datos ya que :

p($\mu - \sigma$ <X< $\mu + \sigma$) = p $\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}$

= p(−1< Z < 1) = 0.6826

Análogamente se puede comprobar que en $(\mu \quad 2\sigma)$ está el 95'4% de los datos y en $(\mu \quad 3\sigma)$ está el 99'7% .

Ejemplo : El C.I. de los 5600 alumnos de una provincia se distribuyen N(112,6) . Calcular aproximadamente cuántos de ellos tienen :

- más de 112 .....2800 alumnos.....la mitad de los alumnos
- entre 106 y 118 .....3823 alumnos .....este es el caso :$(\mu \quad \sigma)$
- entre 106 y 112 .....1911 alumnos
- menos de 100 .....128 alumnos
- más de 130 .....7 alumnos
- entre 118 y 124 .....761 alumnos

(ojo hay que multiplicar % obtenido en la tabla por 5600/100 , que sale de una regla de tres)

Aproximación normal para la binomial :

Cuando los valores a calcular para la binomial superan a los de las tablas para obtener un resultado aproximado se utiliza la distribución normal , es decir , la variable $y = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$

obedece a una distribución N(0,1)

El resultado es tanto más fiable cuanto mayor es el tamaño de la muestra n y cuanto más cerca está p de 0'5 .

Ejemplo : Se ha comprobado que la probabilidad de tener un individuo los ojo marrones es 0'6 . Sea X la variable aleatoria que representa el nº de individuos que tienen los ojos marrones de un grupo de 1100 . Calcular p(X>680) y p(X=680)

p(X>680) = 1 − p(X<680) = 1 − p(Y< $\frac{680 - 110 \ \ 0'6}{\sqrt{1100 \ \ 0'6 \ \ 0'4}}$) = 1 − p(Y<1'23) = 0'1093

p(X = 680) = p(679'5<X<680'5) se debe hacer así puesto que en una variable continua no tiene sentido calcular probabilidades de valores puntuales .

COMBINATORIA