

Control Optimo.

El problema de optimización consiste en la selección de las variables de control, tales que maximizan o minimizan un índice de optimización determinado, (por ejemplo, el costo de producción unitario) dentro de los enlaces, (por ejemplo las ecuaciones que describen el objeto de control) puesta sobre las variables de control que frecuentemente no son las variables independientes y dentro de las limitaciones (por ejemplo, dentro de los rangos invisibles de los campos).

El caso general.

I. Modelo del objeto de control.

(I)

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 -$$

$$\underline{u}(t) \quad \underline{x}(t) = \underline{y}(t)$$

II. Las limitaciones de las variables de control.

$$g_i(\underline{u}) \leq 0 ; i = 1, 2, \dots, p \text{ (II)}$$

g_i : son en las posiciones no lineales.

$$; i = 1, 2, \dots, r$$

$$; i = 1, \dots, p \text{ (IIa)}$$

$$-M_i \leq U_i \leq M_i$$

D_u – el conjunto de los controles admisibles

$\underline{u} \in D_u$ son los controles admisibles

III. El índice de optimización

(III)

$\underline{x}(t_1)$ forma explícita de la descripción del estado final.

la función implícita de la descripción del estado final.

funciones generalmente no lineales.

función derivable respecto a sus argumentos.

la función de las pérdidas instantáneas derivable respecto de las variables de estado

El problema de determinación del control óptimo consiste en la determinación del control admisible (que cumple con las limitaciones) que satisface las ecuaciones que describen el objeto de control (el modelo del

objeto de control) y que garantiza el valor extremo (máximo o mínimo) del índice de optimización (que es una funcional) cambiando el estado del sistema controlado, del estado inicial al estado final en tiempo predeterminado o no.

–El problema de BOLTZA cuando el índice de optimización tiene la forma:

(III)

–El problema de MAYER, cuando

(IIIa)

–El problema de LAGRANGE, cuando

(IIIb)

–El problema óptimo en tiempo cuando

(IIIc)

La síntesis de control óptimo, consiste en la búsqueda del modo de cambiar en función del tiempo del control $\underline{u}(t)$ que controla el sistema (objeto de control) descrito por las ecuaciones I de tal manera que el índice de optimización III (IIIa, IIIb, o IIIc) obtiene su valor extremo y simultáneamente el control $\underline{u}(t)$ es el control admisible, es decir cumplen las condiciones II o IIa trasladando el sistema I del estado inicial $\underline{x}_0$ al estado final $\underline{x}(tr)$ en un tiempo tr . $\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}(tr)$

El problema de la búsqueda de control óptimo en el sistema cerrado se llama el problema de la síntesis del controlador óptimo de estado. En este caso se busca el control $U_{opt}(\underline{x}, t)$, que es una función del tiempo y de las variables de estado (se supone que las variables de estado son simultáneamente las variables de salida del objeto de control).

El diagrama de bloques del objeto de control es el siguiente:

$U_{opt}(\underline{x}, t) \rightarrow \underline{x}, t$

El problema de la síntesis del controlador óptimo independiente del tiempo en la forma explícita (el controlador es solamente una función de las variables de estado), se llama el problema de la síntesis del controlador óptimo de estado sin inercia.

Metodo del principio de máximo de Pontryagin.

Caso 1.

1) $\underline{x}(tr)$

2)

$\underline{u}_{opt} \rightarrow \underline{x}_{opt}(t)$

La condición necesaria de la existencia del control óptimo $\underline{u}_{opt}(t)$ en el sistema abierto y de las trayectorias de estado correspondientes $\underline{x}_{opt}(t)$, es la existencia de las funciones las que no se hacen nulas en forma simultánea, tales que satisfacen las condiciones siguientes:

- El vector es continuo en el intervalo del tiempo $[0, t_r]$ y las funciones $\underline{x}_{opt}(t)$ y $\Psi(t)$ satisfacen las ecuaciones de HAMILTON (el sistema de las ecuaciones canonicas compuesto por las ecuaciones de estado y las ecuaciones conjugadas con las ecuaciones de estado).

(1)

$$i = 0, 1, \dots, n \quad (1a)$$

donde H recibe el nombre de Hamiltoniano y se define como sigue:

(2)

ii) El control $\underline{u}_{opt}(t)$ maximiza el Hamiltoniano sobre todo el conjunto de controles admisibles que cumplen las limitaciones II o IIa en el tiempo $t \in [0, t_r]$, es decir:

(3)

para todo el control admisible.

iii) En el punto final se satisfacen las condiciones de transversabilidad:

(4)

(5)

$\underline{x}$ trayectorias dadas.

Linealizamos las ecuaciones de estado alrededor de la trayectoria $\underline{x}(t)$

Entonces las ecuaciones conjugadas con las ecuaciones de estado linealizadas son:

$$\underline{\Phi}(t) = - \left[\frac{f}{\underline{x}} \right]_{\underline{x}(t)} \underline{\Phi}$$

Comentarios:

- El principio de máximo de pontryagin para los sistemas lineales es la condicion necesaria y suficiente.
- La condicion iii) implica que a lo largo de la trayectoria optima $\underline{x}_{opt}(t)$ se cumple:

$$\geq 0 \text{ para } U_{iopt} = b_i \text{ (o } = +U_{imax})$$

$$= 0 \text{ para } a_i < U_{iopt} < b_i \text{ (} -U_{imax} < U_{iopt} < +U_{imax})$$

$$\leq 0 \text{ para } U_{iopt} = a_i \text{ (o } = -U_{imax})$$

- de las ecuaciones (2) y (1a) se nota que:

constante

(6)

considerando lo anterior lo anterior el hamiltoniano se puede escribir como:

(7)

- tomando en consideración (6) las condiciones de transversibilidad (4) y (5) adquieren la forma siguiente sustituyendo λ por -1 .

(8)

(9)

5a) cuando el tiempo t_r es fijo y estado final fijo y estado final t_r libre.

$t_r = t_{rf} - \text{fijo}, \lambda(t_r) = \text{libre}$

(10)

cuando $\lambda = 0$ (lagrange)

$\lambda_{\text{opt}}(t_{rf}) = 0$

(10a)

$f_r = 0$

5b) $X_i(t_r) = E_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad E_i = \text{cte. } t_r = \text{libre.}$

$\lambda_{\text{opt}}(t_r) = 0$

(10a)

$f_r = t_r f$

5`b) $\lambda(t_r) = E \quad i = 1, 2, \dots, n \quad E = \text{constante}$

$t_r = \text{libre}$

$\lambda(t_r) = E_i ; i = 1, 2, \dots, n$

(11)

$H(\lambda_{\text{opt}} t, t_r) = \text{cte} = \text{constante}$

$\lambda(t_r) = t_r$

cuando f_0 y f no dependen explícitamente o directamente del tiempo

$f_0(x, u, t) = f_0(x, u)$

(12)

$f(x, u, t) = f(x, u)$

entonces

$$X_i(t_r) = E_i; i = 1, 2, \dots, n$$

(13)

$$H(u_{opt}) = H_{opt} = 0$$

No sirve ninguna de

$$5c) X_i(t_{rf}) = E_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (14) \text{ transversabilidad}$$

$$t_r = t_{rf}$$

en caso particular cuando se cumple (12) se tiene

$$X_i(t_r) = E_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

H_{opt}

5d) cuando algunos r todos son fijos los demás libres

$$X_i(t_o) = E_i; i \text{ de los estados fijos}$$

(16)

$$Y_i(t_r) = -\lambda_i \text{ de estados libres}$$

$$\lambda_{xi} = X_{opt}$$

cuando $\lambda = 0$ (problema de lagrange)

$$X_i(t_r) = E_i; i \text{ de los estados fijos}$$

(17)

$$Y_i(t_r) = 0; i \text{ de estados libres}$$

CASO 2

Cuando existen restricciones para las condiciones finales

$$(x(t_r), t_r = 0)$$

Se formula una funcion adicional *

$$* = \lambda_o + u \quad (18)$$

es un vector de dimensión h de los multiplicadores lagrange constantes.

Teorema 2

La condición necesaria de la existencia del control optimo en el sistema abierto $U_{opt}(t)$ es la existencia de las funciones :

" 0 , (t), , n (t) y de los coeficientes

U , U² , , U_n

Los que nos hacen notar en forma simultanea, tales que satisfacen i) e ii) del teorema t y cumplen las condiciones de transversabilidad :

opt (ti) = "

% x = Xopt (19)

" x t = tr

H opt (tr) = - " *

(20)

"t t = tr

CASO 3 Control optimo en tiempo

= 0 fo = 1 (21)

Entonces Q = tr (22)

[x opt (tr) - E , X²opt (tr) - E². Xn opt (tr) - En] = 0 (23)

H opt (t) " 0 cuando f (x , u , t) = f (x , u) (24)

Xi (o) = Ai X opt = Ei ; i = 1, 2, .., n (25)

Ejemplo.

G (s) = X (s) = k (I)

U (s) 1 + ST

x (s)

U (s)

U (t)

X(0) Xo X (tr) = 0

Q = ½ "o [ax² (1) + ba²(t)] dt

No hay limitaciones para el control

X (s) K

=

$$U(s) = 1 + sT$$

$$X(s)(1 + sT) = K V(s) \quad (4)$$

$$sTx(s) + X(s) = Kv(s) \quad (5)$$

$$Dx(t)$$

$$T + x(t) = K u(t)$$

$$Dt$$

$$Dx(t) - 1/K$$

$$= x(t) +$$

$$dt \, T \, T \, u(t) \, (I)$$

$$x(0) = X_0, \, X(\text{tr}) = 0$$

$$H(x, u, t) = -f_0(x, u, t) + \int_0^t f_1(x, u, t) dt$$

$$i =$$

$$f_0 = \frac{1}{2} (ax^2 + ba^2)$$

$$f = -1/K$$

$$x(t) + a(t)$$

$$T \, T$$

$$H = -\frac{1}{2} (ax^2 + ba^2) + (-1/K) a$$

$$X +$$

$$T \, T$$

la variable conjugada con x

$$H$$

$$= 0$$

$$u$$

$$K$$

$$-b u_{\text{opt}} +$$

$$T$$

$$= - \frac{1}{2} H = ax + \frac{1}{2} x^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} x^2$$

el problema de doble valor a la frontera

Caso 5b) ecuación (13)

$$H(U_{opt}) = 0 \quad (13)$$

$$H(U_{opt}) = -\frac{1}{2} (ax_{opt} + bx_{opt}) + \frac{1}{2} x_{opt}^2 (1 + K u_{opt}) = 0$$

$$\frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$U_{opt}^2 - 2$$

$$X_{opt} U_{opt} - a X_{opt}^2 = 0$$

$$K b$$

$$\frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$U_{opt} = (k - \frac{1}{2} (k)^2 + \frac{1}{2}) X_{opt} \text{ es el control optimo}$$

$$b$$

$$\frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$U_{opt} = (\pm \frac{1}{2} (k)^2 + \frac{1}{2}) X_{opt}$$

$$K K b$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} K \frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$= - \frac{1}{2} x_{opt}^2 (\pm \frac{1}{2} (k)^2 + \frac{1}{2}) X_{opt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} K \frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$= X_{opt} (\pm \frac{1}{2} (k)^2 + \frac{1}{2})$$

$$\frac{dx}{dt} = k b$$

$$\frac{1}{2} x_{opt}^2$$

$$X_{opt}^{\frac{1}{2}} = X_{opt} (0) \pm \frac{1}{2} (k)^2 + \frac{1}{2} t$$

$$K b$$

$$X_{opt}^{\frac{1}{2}}$$

$\mathbf{x}$

$\mathbf{X}(0) \mathbf{x}^2$

t

2

$\mathbf{u} \mathbf{x}(t)$

$-\mathbf{X}_r$

$+$

Diagrama de control optimo

Es mas frecuente encontrar el control en sistema abierto aunque teniéndolo en lazo cerrado es posible deducirlo del sistema lazo abierto.

$1 \ 1 \ a \ 1 \ 1 \ a$

$\mathbf{U} \text{ Opt.} = (-"()^2 +) \mathbf{x}(t) = (-"()^2 +) \mathbf{x}(0) !$

$\mathbf{K} \ \mathbf{K} \ \mathbf{b} \ \mathbf{K} \ \mathbf{K} \ \mathbf{b}$

$\mathbf{K} \ 1 \ a$

$! \ ^{-} (" ()^2 +) t$

$\mathbf{T} \ \mathbf{K} \ \mathbf{b}$

$\mathbf{Z}$

$\mathbf{U} \text{ opt} \ \mathbf{x} (t)$

$1 + a$

$\mathbf{H} = "(\ \mathbf{K})^2 \ \mathbf{b}$

La primera ventaja del sistema cerrado es que es mas inmune a las variaciones externas (perturbaciones) se pudo encontrar la descripción del controlador optimo aprovechando oprimir la ecuación 13 de apartado 5b.

Procedimiento para resolver el problema de optimización basándose en el principio de máximo de pontryagin.

Modelo del objeto de control:

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, t) \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

Índice de optimización:

$" = (\underline{\mathbf{x}}_t(tr), tr) + "(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, t) \ dt$

Limites :

$$g_i(\underline{u}) \leq 0 \text{ ó } a_i \leq u_i \leq b_i$$

$$\text{ó } l_i \leq u_i \leq M_i$$

Hamiltoniano:

n

$$H(\underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, t) = -f_0(\underline{x}, \underline{u}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

$$i=1$$

$$= - \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\underline{u}^{opt} = \underline{u}(\underline{x}, \underline{u}, t) \text{ tal que } \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = 0$$

$$- \frac{1}{8} \underline{u}^{opt} = \underline{u}(t), U_{opt} = U(x, y, t)$$

$$U(\underline{x})$$

Ecuaciones cónicas

$$\underline{X} = \underline{y} =$$

Control optimo de los sistemas continuos lineales con el índice cuadrático de optimización.

$$\dot{\underline{X}} = A(t)\underline{X} + B(t)\underline{u} \quad (1a)$$

$$\dim \underline{X} = n \quad \dim \underline{u} = p$$

$$Q = \frac{1}{2} (\dot{\underline{X}}^T P(t) \underline{X} + \underline{u}^T R(t) \underline{u}) \quad (2)$$

$P(t) = P^T(t)$. simétrica, positivamente semidefinida

$\dot{\underline{X}}^T P(t) \underline{X}$. es la forma cuadrada, positivamente semidefinida

$R(t) = R^T(t)$. simétrica, positivamente definida

$\underline{u}^T R(t) \underline{u}$. Es la forma cuadrada positivamente definida

$\underline{u}^T$ optima Q

$$H = -1/2 (\dot{\underline{X}}^T P(t) \underline{X} + \underline{u}^T R(t) \underline{u}) + (A(t) \underline{X} + B(t) \underline{u}) \quad (3)$$

$$= -P(t) \underline{X} - A^T(t) \underline{Y} \quad (4)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^{pot.} = -R^{-1}(t) [B^T(t) \underline{Y} + \dot{P}(t) \underline{X}] \quad (5)$$

$$-R(t)$$

$$\underline{U} \text{ opt} = R^{-1}(t) B'(t) \underline{x} \quad (6)$$

$$= -\underline{k}(t) \underline{x} \quad (7)$$

$$\underline{U} \text{ opt} = -R^{-1}(t) B'(t) \underline{k}(t) \underline{x} \quad (8)$$

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t) \underline{u}$$

$$\underline{U} \text{ opt} = R^{-1}(t) B'(t) \underline{k}(t) \underline{x}$$

$$\underline{U} = \underline{G}(t) \underline{x}$$

$$\underline{G}(t) = R^{-1}(t) B'(t) \underline{k}(t)$$

$$= -\underline{k}(t)\underline{x} - \underline{k}(t)\underline{x} - \underline{k}(t) B'(t) \underline{u} \quad (10)$$

$$= \underline{k}(t)\underline{x} - \underline{k}(t) A(t) \underline{x} - \underline{k}(t) B(t) \underline{u} \quad (10)$$

$$= [-\underline{k}(t)\underline{x} - \underline{k}(t) A(t) \underline{x} + \underline{k}(t) B(t) R^{-1}(t) B'(t) \underline{k}(t) \underline{x}] \quad (11)$$

sustituyendo en (4) y por (7)

$$= P(t) \underline{x} + \dot{\underline{k}}(t) \underline{x} = [P(t) + \dot{\underline{k}}(t)] \underline{x} \quad (12)$$

ecuación de Riccati

$$-\dot{\underline{k}}(t) - \underline{k}(t) A(t) + \underline{k}(t) B(t) R^{-1}(t) B'(t) \underline{k}(t) = P(t) + \dot{\underline{k}}(t) \underline{k}(t)$$

se puede justificar

$$\underline{k}(0) \underline{Y}(tr) = 0 \quad \underline{k}(t) = \dot{\underline{k}}(t)$$

$$\underline{Y}(tr) = -\underline{k}(tr) \underline{x}(tr)$$

$$\underline{K}(tr) = 0 \quad (14)$$

Caso particular – objeto de control de estacionario

Tr -----

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \quad (1b)$$

$$Q = \frac{1}{2} (\underline{x}' P \underline{x} + \underline{u}' R \underline{u}) \quad dt \quad (15)$$

En este caso $\dot{\underline{k}}(t) = \underline{k} \Rightarrow \underline{k} = 0$

Ec. Algebraica de Riccati

$$-\underline{k}A + A'\underline{k} + \underline{k}BR^{-1}B'\underline{k} = P \quad (16)$$

$$G = n^{-1} B' \underline{k}$$

Procesos estocásticos.

La señal (variable) estocástica es una señal, los valores de la cual para cada instante son unos números aleatorios (estocásticos). Observando dicha señal en un sistema dinámico dado se obtiene una curva completa llamada la realización del proceso estocástico o la función muestra. El conjunto de todas las realizaciones lo llaman el proceso estocástico.

$$\underline{X} = A\underline{X} + B\underline{u} + F\underline{Y}$$

$$\underline{Y} = C\underline{X} + \underline{w}$$

$$\underline{V}(t)$$

$$\underline{U}(t) \quad \underline{x}(t) \quad \underline{Y} = C\underline{X} + \underline{w}$$

Modelos conceptuales para los procesos estocásticos

El rasgo esencial de los procesos estocásticos en diferencia de los procesos determinados es que el conocimiento del estado del proceso en un instante no es suficiente para predecir en el futuro el comportamiento del proceso en función del tiempo.

X_1

X_2

X_n

$X: (t)$

Estadísticas empíricas

- valor medio

$$\underline{x}(t) = x: (t) \quad (1)$$

- valor medio cuadrado

$$x_2(t) = x:2 (t) \quad (2)$$

- varianza

$$v(t) = x_2(t) - [x_i(t)]^2 \quad (3)$$

- función de correlación (auto correlación, correlación prop.)

$$r(t_1 T) = x_i(t) Y_i(t) \quad (4)$$

CARACTERISTICAS ESTADISTICAS DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

pdf [$x ; t$] – función de densidades de probabilidades de 1er. orden

pdf [$x_1 , x_2 ; t_1 , t_2$] – función de densidades de probabilidades de 2o. Orden

pdf [$x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3$] – función de densidades de probabilidades de 3er. Orden

.
.

.

.

pdf [$x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3$] $x_1 x_2 x_3 =$

= prob [$x_1 < x_1(t_1) < x_1 + x_1, x_2 < x_2(t_2) < x_2 + x_2, x_3 < x_3(t_3) < x_3 + x_3$]

valor medio:

$$\langle x(t) \rangle = E \{x(t)\} = \int x \text{ pdf} [x, t] dx \quad (6)$$

Valor medio cuadrado

$$E \{x^2(t)\} = \int x^2 \text{ pdf} [x, t] dx \quad (7)$$

Varianza

$$G_2(t) = E \{[x(t) - \langle x(t) \rangle]^2\} = \int [x - \langle x(t) \rangle]^2 \text{ pdf} [x, t] dx \quad (8)$$

Dispersión o desviación

$$\langle x(t) \rangle =$$

Función de Correlación

$$\langle x(t), T \rangle = E \{x(t) x(T)\} = \int x_1 x_2 \text{ pdf}[x_1, x_2; t, T] dx_1 dx_2 \quad (9)$$

$$\underline{x}^v(t) =$$

Valor medio

$$\underline{\mu}(t) = E\{\underline{x}^v(t)\} = E\{x_1^v(t)\} E\{x_n^v(t)\}$$

Función de Correlación

$$E\{x_1^v(t) x_1^v(t)\} \dots E\{x_n^v(t) x_n^v(t)\}$$

$$R(t, T) = E \{ \underline{x}^v(t) \underline{x}^v(T) \} = \dots \dots \dots$$

$$E\{x_n^v(t) x_1^v(t)\} \dots E\{x_n^v(t) x_n^v(t)\}$$

PROCESOS ESTACIONARIOS Y ERGOTICOS

Cuando pdf [$x, t+T$] = pdf [x, t]

$$\text{pdf} [x_1, t_1] = \text{pdf} [x_1, t_2]$$

$$\text{pdf} [x_1, x_2 ; t_1+T, t_2+T] = \text{pdf} [x_1, x_2 ; t_1, t_2]$$

Para el proceso estocástico en el sentido estricto todos los parámetros estadísticos de 1er. Orden (valor medio, medio cuadrado, varianza) no dependen del tiempo (son constantes) y los parámetros estadísticos del orden mayor que no dependen de la ubicación en el eje del tiempo de los instantes de t_1, t_2, t_3 , etc., pero dependen de la diferencia entre estos instantes, por ejemplo, $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$. Esto quiere decir que para un proceso estocástico estacionario en el sentido estricto se cumple.

Valor medio $\mu(t) = \text{constante}$

Valor medio cuadrado $E\{x^2(t)\} = \text{constante}$

Varianza $\sigma^2(t) = \text{constante}$

Disposición $\mu_2 = \text{constante}$

Función de Correlación

$$R(t, T) = R(T - t) = R(t)$$

$$T = t_2 - t_1 = T - t = t_2 - t_1$$

$$t = t_1$$

.

El proceso estocástico estacionario en el sentido amplio es el proceso que tiene los parámetros estadístico de 1er. Orden constantes y el parámetro estadístico de 2º. Orden (función de correlación) dependiente de t y no dependiente del desplazamiento en el tiempo.

$$\mu(t) = \text{constante} - \text{Valor medio}$$

$$E\{x^2(t)\} = \text{constante} - \text{Valor medio cuadrado}$$

$$\sigma^2(t) = \text{constante} - \text{Varianza}$$

$$\mu_2 = \text{constante} - \text{Disposición}$$

$$R(t, T) = R(T - t) = R(t) \text{ donde } t = T - t$$

$$R(t - T_1, T - T_1) = R(t, T) = R(T - t) = R(t)$$

Los procesos estocásticos que no son estacionarios en el sentido estricto ni en el sentido amplio los llamamos Los Procesos Estocásticos no Estacionarios (sus estadísticas de 1er. Y mayor orden dependen del tiempo de los momentos, $t_1, t_2, \dots$).

En el caso cuando el proceso estocástico es ergotico:

$$\text{Valor medio } \mu(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (16)$$

$$\text{Varianza } \sigma_x^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt \quad (17)$$

Función de correlación

$$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+T) dt \quad (18)$$

T es la diferencia entre los tiempos t y t+T.

FUNCION DE DENSIDAD DE ESPECTRO DE POTENCIA

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (19)$$

$$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+T) dt \quad (18)$$

$$\sigma_x^2 T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 T(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j 2\pi f t} dt \int_0^T x(t+T) e^{-j 2\pi f (t+T)} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+T) e^{-j 2\pi f T} dt \quad (21) \end{aligned}$$

$$= 1 - T$$

$$\sigma_x^2 T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+T) e^{-j 2\pi f T} dt \quad (22)$$

$$T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+T) e^{-j 2\pi f T} dt \quad (23)$$

$$\text{Entonces } \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_x^2 T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T(f) e^{-j 2\pi f T} = S_x(f) \quad (24)$$

$$S_x(f) = S_x(f) e^{-j 2\pi f T} \quad (25)$$

Para todos T, incluyendo T = 0

Para T = 0

$$S_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t) dt \quad (26)$$

$$S_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \text{valor promedio cuadrado de la señal } x.$$

El área bajo la función de densidad de espectro de potencia es 2 veces mas grande que el valor promedio cuadrado de proceso estocástico.

RUIDO BLANCO

" para t = 0

$$S_x(t) =$$

0 para t = 0

El ruido blanco es un proceso estocástico con el valor medio = 0 y con su función de densidad de espectro de potencia constante.

$$S(\omega) = W = \text{constante para todas las } \omega \quad (27)$$

$$T(\omega) = W S(\omega) \quad (28)$$

$$T(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) = "$$

RESPUESTA DEL SISTEMA LINEAL

$$\underline{Y}(t) = H(t, \tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (30)$$

$$H(t, \tau)$$

$$E\{ \underline{u}(\tau) \underline{u}'(\tau) \} = Q S(\tau - \tau)$$

$$Q = \text{constante}$$

$$S(\tau - \tau)$$

$$R_y(t, T) = H(t, \tau) Q H'(T, \tau) d\tau = E\{ \underline{y}(t) \underline{y}'(T) \} \quad (33)$$

Para sistema lineal estacionario

$$H(t, T) = H(t - T) \text{ para todos } t, T$$

Entonces (33) es :

$$R_y(t, T) = H(t - T) Q H'(T - \tau) d\tau$$

Sustituyendo T por t + T

$$R_y(t, t+T) = H(t - \tau) Q H'(T - \tau + T) d\tau \quad (34)$$

$$H(\tau) Q H'(\tau + T) d\tau$$

$$= t -$$

Cuando $t = "$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_y(t, t+T) = R_y(T) = H(\tau) Q H'(\tau + T) d\tau \quad (35)$$

$$E\{ \underline{y}(t) \} = E\{ H(t, \tau) \underline{u}(\tau) d\tau \} = H(t, \tau) E\{ \underline{u}(\tau) \} d\tau$$

Para $\underline{u}(t) = \text{Ruido Blanco}$

$$E\{ \underline{u}(t) \} = 0$$

Entonces

$$E\{ \underline{y}(t) \} = 0$$

La respuesta de un sistema lineal a un ruido blanco en el estado estable (si el sistema tiende al estado estable) tiene el valor promedio nulo y la función de correlación dada por (35).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (19)$$

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) Q H'(\omega + T) dT \quad (37)$$

$$S_y(\omega) = H(-j\omega) Q H'(j\omega) \quad (42)$$

El espectro de salida $\underline{y}$ de un sistema lineal excitado por el ruido blanco es el producto de la matriz de la función de transporte para la frecuencia negativa, la matriz de la densidad espectral del ruido blanco y la matriz traspuesta de la función de transferencia.

Dominio	Entradas determinísticas	Ent. De Ruido blanco
Del tiempo	$\underline{y}(t) = H(t^-) \underline{u}(t) dt$	$R_y(T) = H(\omega) Q H'(\omega + T) d\omega$ $E\{\underline{y}(t)\} = 0$
De frecuencia	$\underline{Y}(s) = H(s) \underline{u}(s)$	$S_y(\omega) = H(-j\omega) Q H'(j\omega)$

La respuesta de $\underline{y}(t)$ de un sistema lineal estacionario en el estado estable ($t \rightarrow \infty$), excitado por un ruido blanco es un proceso estocástico estacionario que tiene el valor promedio nulo.

$$E\{\underline{y}(t)\} = 0$$

$$R_y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) Q H'(\omega + T) d\omega$$

Donde Q = constante, es el valor de densidad de espectro de potencia de ruido blanco, $H(\omega)$ es la matriz de la respuesta del sistema lineal investigado al impulso de Dirac en el origen de las coordenadas ($\omega = 0$) y $H(\omega + T)$ es la matriz traspuesta de la respuesta del sistema lineal investigado al impulso de Dirac en el momento T la función de densidad del espectro de potencia $S_y(\omega) = H(-j\omega) Q H'(j\omega)$ donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia senoidal del sistema lineal investigado.

$$R_u(T) = R_{uy}(T)$$

La función de correlación recíproca

$$R_{uy}(T)$$

T es el desplazamiento en el tiempo entre la señal estocástica $y(t)$ y la señal estocástica $u(t)$.

$$R_{uy}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) R_u(\omega - T) d\omega$$

$h(\omega)$ es la respuesta del sistema lineal a un impulso de Dirac en el origen de las coordenadas.

$$S_{uy}(j\omega) = H(j\omega) S_u(\omega)$$

$$R_{uy}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) R_u(\omega + T) H'(\omega + T) d\omega$$

$$S_{uy}(j\omega) = H(-j\omega) S_u(\omega) H'(j\omega)$$

EL PROCESO DE MARKOV DE PRIMER ORDEN

$$H(s) = 1 / (s + \alpha)$$

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$Q_t < 0$$

Función de auto correlación:

$$r(t) = Q_d =$$

$$= Q_d = \text{para } T > 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_y(t_1 + T) = R(T) = H(j\omega) Q H^*(j\omega) \quad (35)$$

$$R_y(t_1 + T) = R^*(T_1 + t)$$

$$r(T) = r(-T)$$

$$r(T) =$$

$$S_y(j\omega) = H(j\omega) Q H^*(j\omega) \quad (42)$$

$$S(j\omega) = Q =$$

FACTORIZACION ESPECTRAL

$$H(s) = Y(s) / U(s)$$

$$= (43)$$

$$H(s) = (44)$$

Aplicando (42) :

$$S_y(j\omega) = C^2 Q =$$

$$= C^2 Q = C^2 Q \quad (45)$$

La función de densidad de espectro de potencia de la salida de un sistema lineal estacionario excitado por el ruido blanco e una función racional (es decir un cociente de polinomios) de .

El procedimiento de factorización de una supuesta función racional de un (aceptada como la función de la densidad del espectro de potencia de las salidas de un sistema continuo lineal estacionario excitado por el ruido blanco) para obtener $H(s)$ es conocido como la factorización espectral y puede ser clasificado como uno de los métodos de identificación de sistemas, basado en los métodos estadísticos de identificación. Los cálculos y las actividades para determinar la Función de Transferencia $H(s)$ del sistema identificado pueden ser resumidos como siguen.

1a) Se supone que el sistema identificado esta excitado por el ruido blanco.

1b) Utilizando un analizador espectral y otro aparato, determinar experimentalmente la curva de la densidad del espectro de potencia $S_y(j\omega)$.

- Escribir S_y como una función racional de $j\omega$ = .

$$C^2 Q = S_y = r \quad (46)$$

$$r = C^2 Q$$

- Encontrar las raíces de $N(s) = (s - p_1) \dots (s - p_{k-1})$

$$D(s) = (s - p_1) \dots (s - p_k)$$

- Los polos y los ceros de $H(s)$ son dados por

$$z_i, i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$p_i, i = 1, 2, \dots, k$$

Se nota que existen 2 raíces cuadradas de cada p_i , una de las raíces tendrá la parte real positiva y la otra la parte real negativa.

La densidad espectral Q y la ganancia C del feedforward (del sistema lineal estacionario identificado) será para satisfacer:

$$r = C^2 Q \quad (47)$$

ESPECTRO DRYDEN

$$S(\omega) = T$$

Función de densidad de espectro de potencia de la componente vertical de la velocidad aleatoria del viento en el aire turbulento.

$$S(\omega) = T$$

$$H(s) = C$$

$$C^2 Q = T$$

En particular :

$$C = 1/Q = T$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_y(t_1 t + T) = R_y(T) = H(\omega) Q H^*(\omega + T) d \quad (35)$$

$$R(T) = Q h(\omega) h^*(\omega + T) d$$

$$h(t) = t^{-1/2}$$

$$\bullet t < 0$$

Objeto de control

Controlador

$$U_{opt}(\underline{x}, t)$$

$$(IIa)(($$

K

$Ts + r$

$U_{\text{opt}} =$

$-1 - h - K h t$

$(K) \times (0)! T$

$1 - 1 + a$

$K''(K)^2 b$

K

$Ts + 1$

$x(s)$

(5)

X_1

X_2

X_n

t_2

t_1

X_1

X_2

X_n

t_1

t_1

T

t_2

t_2

T

Procesos estocásticos en sentido estricto

Proceso estocástico estacionario en el sentido amplio

Procesos Estacionarios en el sentido amplio

Proceso Estocástico

Procesos no Estacionarios

Proceso Estacionario

Procesos Estacionarios en el sentido estricto

$T ! "$

$T ! "$

$T ! "$

$T ! "$

$T ! "$

Ruido blanco

Sistema Lineal

$y(t)$

$u(t)$

$T ! "$

Sistema Lineal

$y(t)$

$u(t)$

$S y(j)$

$Su()$

$H(j)$

$y(t)$

$u(t)$

Sistema Lineal

Proceso de Markov

Ruido

Blanco

$H(s)$

$T ! "$

Proceso de Markov de 1er Orden

Ruido Blanco

Q – densidad

espectral

o

0.5

-1

1

2

-2

1

10

0.1

0.01

0.001

0.01

0.1

1

10

100

Velocidad de turbulencia del viento

Y

Ruido

Blanco

Q

H (s)

Velocidad de Turbulencia de Viento

Ruido Blanco

Densidad de Espectro de Potencia

Q =

T ! "

-2

2

1

-1

0.5