

PRÓLOGO

“Aplicaciones Geométricas y Físicas de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden” ha sido elaborado con la finalidad de cubrir una de las necesidades del curso de Ecuaciones Diferenciales, que se dicta en el tercer semestre, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo, de contar con un material teórico-práctico sobre este tópico, que le permita al estudiante reforzar los conocimientos impartidos en el salón de clases y al mismo tiempo afianzar esos conocimientos a través de la resolución de problemas.

Su contenido se ha diseñado, con base a lo estipulado en el programa de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. La obra mantiene un estilo didáctico; en cada uno de los problemas que se resuelven se explica de forma detallada y minuciosa los pasos que se siguen, con la intención de cubrir las posibles dudas que se, por mi experiencia de más de seis años como profesora de la cátedra la cátedra de Ecuaciones Diferenciales, pudiesen llegar a surgir en los estudiantes. En la mayoría de los casos, tanto el planteamiento del problema como parte de la resolución, se refuerza con representaciones gráficas a fin de facilitar y reforzar lo que se está explicando.

La obra ha sido dividida en dos capítulos:

En el **CAPÍTULO 1**, se presentan dos aplicaciones geométricas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; estas son: aplicaciones a problemas de trayectorias a un haz de curvas y aplicaciones que involucran a las rectas tangente y normal.

Para las aplicaciones a los problemas de trayectorias se efectúan las deducciones de cómo va a cambiar la pendiente de la recta tangente a la familia de curvas dadas para obtener la pendiente de la familia de trayectorias, tanto para el caso en que las trayectorias son ortogonales (perpendiculares), como para el caso en que las trayectorias son a un ángulo diferente de 90° .

Con respecto a las aplicaciones a los problemas que involucran a las rectas tangente y normal a una curva, se presentan las ecuaciones de ambas rectas expresando sus pendientes en función de la derivada a la curva en el punto de contacto. Se determinan los puntos de corte de dichas rectas con cada uno de los ejes coordenados, los cuales quedan expresados en función del punto de contacto y de la derivada. Se definen además dos segmentos relacionados con estas rectas: la subtangente y la subnormal, cuyas longitudes también se expresan en términos de las coordenadas del punto de contacto y la derivada.

Los problemas geométricos tienen la particularidad que no hay una ley que los rige; además hay que manejar ciertos conceptos geométricos que aparecen involucrados en los enunciados; por lo tanto, para cada problema la ecuación diferencial asociada es diferente.

En el **CAPÍTULO 2** se presentan cinco aplicaciones físicas; estas se rigen por leyes ya establecidas: los problemas de mecánica elemental se rigen por la segunda ley del movimiento de Newton; los de problemas de enfriamiento se rigen por la ley de enfriamiento de Newton; los problemas de mezcla se rigen por la teoría de los fluidos y el sistema de compartimientos; los problemas de circuito se rigen por las leyes de Kirchhoff; los problemas de vaciado de tanques se rigen por la Ley de Torricelli. Debido a esto, cada aplicación tiene una expresión general para la ecuación diferencial asociada; lo que cambia en cada situación son los datos. Esto hace, que en la mayoría de los casos resulte mucho más sencillo, resolver una aplicación física que una aplicación geométrica.

Es por ello que el número de ejercicios resueltos, que se presentan en la obra, para las aplicaciones geométricas es superior que los resueltos para las aplicaciones físicas. En todo caso, para cada

aplicaci3n se presentan resueltos un m3nimo de 10 ejercicios.

Al final de los ejercicios resueltos, y con la finalidad de hacer de la obra un texto que resulte ameno al lector, se ha incluido la biograf3a de grandes matem3ticos de la historia as3 como una secci3n de an3cdotas y curiosidades matem3ticas.

Consciente que la matem3tica se aprende ejercitando, luego de las an3cdotas y curiosidades, se encuentra una lista de ejercicios propuestos, con sus respectivas respuestas, de tal forma que el estudiante pueda practicar para reforzar lo aprendido y al mismo tiempo pueda chequear si los resultados que obtiene son correctos.

Con esta obra se pretende hacer realidad el deseo, de su autora, de poner al alcance del estudiante un texto que le permita reforzar los conocimientos impartidos por los profesores en el aula de clases y, al mismo tiempo, satisfacer el clamor de los estudiantes, quienes durante muchos a3os han venido planteando la necesidad de poder contar con un material que contenga las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y que sea de f3cil acceso, pues los textos con los que cuenta la biblioteca de la Facultad resultan insuficientes para la demanda de aproximadamente 800 alumnos, que cada semestre cursan la asignatura Ecuaciones Diferenciales.

Cabe destacar, que las sugerencias y opiniones que tengan a bien hacer, acerca de la obra, ser3n un aporte muy valioso, ya que esto permitir3 mejorar y corregir la obra para futuras ediciones.

LA AUTORA

AGRADECIMIENTO

A la Universidad de Carabobo por haberme concedido un a3o sab3tico, tiempo durante el cual pude hacer realidad este proyecto

Al Departamento de Matem3tica de la Facultad de Ingenier3a de la Universidad de Carabobo, por haber confiado en mi capacidad de poder llevar adelante el proyecto para el cual solicit3 un a3o sab3tico.

A mi hermano Edgar quien a pesar de lo copado de su tiempo, hizo un alto en sus actividades para ayudarme con la portada del libro. Gracias hermano, por tu colaboraci3n.

A mi esposo Luis Enrique, a mis hijos Mabel Carolina y Luis Augusto, por haber soportado, durante este a3o, los tantos momentos que deje de compartir con ellos, por estar dedicada a la realizaci3n de este libro. Gracias por ser siempre tan comprensivos.

DEDICATORIA

A Dios todopoderoso, por los dones que me ha otorgado; por ser instrumento, a trav3s el cual, poder llegar a muchos j3venes.

A esos dos seres maravillosos que me dieron el ser, **papi** y **mami**. A su memoria. Gracias por su ejemplo, por los valores que en mi sembraron, por el amor y apoyo que me brindaron siempre. Vivir3 eternamente en mi coraz3n.

A Luis Enrique, mi amado esposo, quien con su paciencia, tolerancia y apoyo ha sido siempre mi colaborador silencioso.

A mis hijos, Mabel Carolina y Luis Augusto, mi raz3n de ser y de seguir luchando; los amo.

A mis hermanos: Julio, Edgar y Rubén; a mis hermanas: Mayra y Merle, quienes siempre han estado muy pendiente de todos mis proyectos y mis logros, a quienes me siento cada día más unida. Los quiero con todo mi corazón.

A todas aquellas familiares y amigos que se mantuvieron pendientes del avance de este proyecto y de quienes siempre tuve palabras de aliento para seguir adelante.

INDICE

PRÁ LOGO	
AGRADECIMIENTO	
DEDICATORIA	
INTRODUCCIÓN	
CAPITULO 1: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	
ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS	
1.1 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Trayectorias	
1.1.1 Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Trayectorias	
1.1.2 Biografía de Leonhard Euler	
1.1.3 Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
1.1.4 El Cuento de la Cuentas	
1.1.5 Propiedades Metafísicas del Número 1	
1.1.6 Sistema de Numeración del antiguo Egipto	
1.1.7 La idea del infinito	
1.1.8 Entretenimiento	
1.1.9 Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Trayectorias	
1.2 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas que involucran a la Recta Tangente y la Recta Normal	
1.2.1 Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas que involucran a la Recta Tangente y la Recta Normal	
1.2.2 Biografía de Pitágoras de Samos	
1.2.3 Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
1.2.4 Las tres divisiones de Beremiz	
1.2.5 Propiedades Metafísicas del Número 2	
1.2.6 Sistema de Numeración Griego	
1.2.7 Informáticos vs. Matemáticos	
1.2.8 Entretenimiento	
1.2.9 Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas que involucran a la Recta Tangente y la Recta Normal	
CAPITULO 2: APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	

ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN A PROBLEMAS FÍSICOS	
! Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Mecánica Elemental	
Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Mecánica Elemental	
Biografía de Alexis Claude Clairaut	
Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
La Geometría del Balón de Fútbol	
Propiedades Metafísicas del Número 3	
Sistema de Numeración Babilónico	
El Pastor y el Matemático	
Entretenimiento	
Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Mecánica Elemental	
! Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Enfriamiento	
Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Enfriamiento	
Biografía de Isaac Newton	
Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
El Número e	
Propiedades Metafísicas del Número 4	
Sistema de Numeración Maya	
Progresión adecuada	
Entretenimiento	
Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Enfriamiento	
! Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Mezclas	
Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Mezclas	
Biografía de Joseph Louis de Lagrange	
Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
Las estrellas, el ruido y los logaritmos	
Propiedades Metafísicas del Número 5	
Sistema de Numeración Hebrea	
Lo que dice un matemático vs. Lo que quiere decir	
Entretenimiento	
Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas Mezclas	
! Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Circuitos Eléctricos	

â Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Circuitos Eléctricos	
â Biografía de Gustav Kirchhoff	
â Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
â La quinta, la sexta y la séptima operación	
â Propiedades Metafísicas del Número 6	
â Sistema de Numeración Romano	
â Un tercio de x al cubo	
â Entretenimiento	
â Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Circuitos Eléctricos	
â ¡ Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Vaciado de tanques	
â Ejercicios resueltos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de Vaciado de tanques	
â Biografía de Evangelista Torricelli	
â Anécdotas y Curiosidades matemáticas	
â El número de oro	
â Propiedades Metafísicas del Número 7	
â Sistema de Numeración Indo-arábiga	
â La Tesis Doctoral	
â Entretenimiento	
â Ejercicios propuestos sobre Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a Problemas de vaciado de tanques	
â ¡ Bibliografía	
â Solución a los entretenimientos	

INTRODUCCIÓN

La técnica de representación de nuestro mundo real en términos matemáticos, se ha convertido, en la actualidad, en una herramienta invaluable, tanto para los científicos que buscan profundizar en el conocimiento humano, como para los ingenieros quienes, a un nivel más pragmático, siguen buscando respuestas a problemas técnicos. Este proceso de imitación de la realidad mediante el lenguaje de las matemáticas se conoce como **modelación matemática**.

La formulación de problemas en términos matemáticos nos exige establecer con claridad las premisas. La mayoría de los problemas del mundo real son complejos e implican varios procesos distintos relacionados entre sí. Antes de proceder a darle el enfoque matemático, se deben determinar las variables significativas y las que pueden ser ignoradas. Por lo general, para las variables importantes, las relaciones ya están establecidas en forma de leyes, fórmulas, teorías etc. El proceso de construcción de un modelo matemático eficaz, requiere cierta habilidad e imaginación.

En la matemática existe una herramienta que despierta gran interés para aquellos que no son matemáticos, porque les da la posibilidad de utilizarla para investigar una amplia variedad de procesos de las ciencias físicas, biológicas y sociales; esta herramienta son las **ecuaciones diferenciales**.

Hay tres pasos claramente identificables para la elaboración de cualquier modelo matemático, independientemente del campo específico de aplicación; en primer lugar es preciso trasladar la situación a términos matemáticos, generalmente estas situaciones involucran un grado de cambio (la derivada) y consecuentemente cuando se expresan matemáticamente, toman la forma de una ecuación diferencial

Una vez formulado el problema matemáticamente, el siguiente paso será resolver la ecuación diferencial para obtener la solución; finalmente, habiendo obtenido la solución y teniendo conocimiento de la o las propiedades de esta, se deberá realizar la interpretación en términos del contexto en que surgió el problema.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN A PROBLEMAS DE TRAYECTORIAS

TRAYECTORIAS DE UN HAZ DE CURVAS:

Se dice que una familia de curvas $T(x, y, k) = 0$ (k una constante arbitraria) es una **trayectoria** $\tilde{I}$ para una familia de curvas $F(x, y, C) = 0$ dada, si cualquier curva de la familia T corta a cada uno de los miembros de la familia de curvas $F(x, y, C) = 0$ bajo un ángulo constante $\tilde{I}$.

Sea $F(x, y, C) = 0$ una familia de curvas conocida y sea $\tilde{I}$ un ángulo dado. Se desea determinar la familia de curvas $T(x, y, k) = 0$ que mantiene un ángulo constante $\tilde{I}$ con cada una de las curvas de la familia $F(x, y, C) = 0$.

Ya que $F(x, y, C) = 0$ es conocida, se puede determinar la ecuación diferencial asociada a dicho haz, por medio del proceso de eliminación de constantes arbitrarias de un haz de curvas. Sea $f(x, y, y') = 0$ dicha ecuación diferencial.

Considérese una curva F_1 perteneciente a la familia $F(x, y, C) = 0$ y una trayectoria T_1 , a un ángulo $\tilde{I}$, tal que se cortan en un punto $P(x, y)$ (ver Figura 1)

Sea $\hat{I}_1$ el ángulo que forma la recta tangente a la curva $F_1(x, y, C_1) = 0$, en el punto $P(x, y)$, con el eje x ; sea $\tilde{I}$ el ángulo que forma la recta tangente a la curva $T_1(x, y, K_1) = 0$, en el punto $P(x, y)$, con el eje x . Sea $\tilde{I}$ el ángulo entre ambas rectas (ver Figura 2).

A cada punto de la curva $F_1(x, y, C_1) = 0$ se puede asociar una terna (x, y, y') , donde $y' = \tan \hat{I}_1$, es la pendiente de la recta tangente a la curva F_1 en el punto $P(x, y)$.

A cada punto de la curva $T_1(x, y, k_1) = 0$ se puede asociar una terna (x, y, y') , donde $y' = \tan \tilde{I}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva T_1 en el punto $P(x, y)$.

Se debe ahora establecer una relación entre las derivadas $y' = \tan \hat{I}_1$, $v' = \tan \tilde{I}$. Para ello, se trasladará la recta tangente a $F_1(x, y, C_1) = 0$ en el punto $P(x, y)$, hasta el punto de corte de la recta tangente a $T_1(x, y, k_1) = 0$ en el punto $P(x, y)$ con el eje x (ver Figura 3).

De la Figura 3 se deduce que:

$$\hat{I}_1 = \tilde{I} - \tilde{I}'$$

Por identidades trigonométricas

$$\tan \hat{I}_1 = \tan (\tilde{I} - \tilde{I}') =$$

De acuerdo a lo indicado en la observación $\tan \hat{I}_1 = y'$, $\tan \tilde{I} = v'$, entonces al sustituir en la ecuación anterior, resulta que:

$$y' =$$

Esta última ecuación permite establecer una relación entre las derivadas de las curvas $F_1(x, y, C_1) = 0$ y $T_1(x, y, k_1) = 0$ en el punto $P(x, y)$.

Ya que $f(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $F(x, y, C) = 0$, entonces sustituyendo en dicha ecuación diferencial y' por $-$, se obtiene una nueva ecuación diferencial $f(x, y, -) = 0$

Esta es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias que mantiene un ángulo $\tilde{I}$, con la familia $F(x, y, C) = 0$. Resolviendo la nueva ecuación diferencial se obtiene la familia $T(x, y, k) = 0$, familia que representa las trayectorias $\tilde{I}$ a la familia dada $F(x, y, C) = 0$.

Si $\tilde{I} = 90^\circ$ entonces las rectas tangentes a ambas curvas en los puntos de intersección son perpendiculares. Por geometría, se sabe que, si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es igual a -1, esto es:

$$(\tan \hat{I}_1)(\tan \tilde{I}) = -1$$

Como $\tan \hat{I}_1 = y'$, $\tan \tilde{I} = v'$, resulta que:

$$y' = -$$

Por lo tanto, si la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $F(x, y, C) = 0$ es $f(x, y, y') = 0$, entonces sustituyendo y' por $-$ se obtiene una nueva ecuación diferencial $f(x, y, -) = 0$, que es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias que mantienen un ángulo de 90° con la familia dada.

Al resolver esta nueva ecuación diferencial, se obtiene la familia $T(x, y, k) = 0$, la cual representa la familia de trayectorias a 90° de la familia dada. Para este caso, cuando $\tilde{I} = 90^\circ$, las trayectorias se denominan, **trayectorias ortogonales**.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN, A PROBLEMAS

DE TRAYECTORIAS

1. La ecuación $y^2 = Cx$ (C una constante arbitraria) define una familia de parábolas. Obtenga la familia de trayectorias ortogonales.

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y^2 = Cx$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$2yy' = C \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C , dicha ecuación no representa la ecuación

diferencial asociada. Debe recordarse que una de las características de las ecuaciones diferenciales es que no poseen constantes arbitrarias.

Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Aquí basta con sustituir la ecuación (2) en la ecuación (1), resultando

$$y^2 = 2yy'x \quad (3)$$

La ecuación (3) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas $y^2 = Cx$.

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y^2 = Cx$. Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (3) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$y^2 = -2y \frac{1}{y'}$$

multiplicando por y'

$$y'^2 = -2$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = -\frac{2}{y} dx \quad (4)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (4) por y

$$y dy = -2 dx$$

equivalentemente

$$y dy + 2x dx = 0$$

integrando

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = K \quad (5)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\frac{y^2}{2} = K_1$$

$$x^2 = K_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = K$$

Multiplicando por 2,

$$y^2 + 2x^2 = 2K \quad (6)$$

La ecuación (6), que es la ecuación de una familia de elipses con centro en el origen y eje mayor paralelo al eje y, representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $y^2 = Cx$

2. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $y^3 = Cx^2$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y^3 = Cx^2$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$3y^2y' = 2Cx \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C, dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Aquí basta con despejar C de la ecuación (2) y sustituir en la ecuación (1), resultando

$$y = 3x \quad (3)$$

La ecuación (3) representa la ecuación diferencial asociada a la familia $y^3 = Cx^2$.

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y^3 = Cx^2$. Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (3) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$y = 3x$$

equivalentemente,

$$y' = -\frac{1}{3x}$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = -\frac{1}{3x} dx \quad (4)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (4) por $2y$

$$2y dy = -\frac{1}{3x} dx$$

integrando

$$(5)$$

Ambas integrales inmediatas son inmediatas

$$+ k_1$$

$$+ k^2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$+ k$$

Multiplicando por ,

$$(6)$$

La ecuación (6), que es la ecuación de una familia de elipses con centro en el origen y eje mayor paralelo al eje y, representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y^3 = Cx^2$

3. Encuentre el valor de la constante a, de tal forma que las familias

$$y^3 = C_1 x, \quad x^2 + a y^2 = C_2$$

sean ortogonales

SOLUCIÓN:

Como aquí se tienen dos curvas, se deberá denotar de manera diferente las derivadas de cada una de ellas; sean:

y' la derivada de la curva $y^3 = C_1 x$

$\dot{A}'$ la derivada de la curva $x^2 + ay^2 = C_2$

De acuerdo con la definición de curvas ortogonales, para que estas curvas sean ortogonales debe satisfacerse que el producto de las derivadas sea igual a -1, esto es:

$$y' \cdot \dot{A}' = -1 \quad (1)$$

Derivando implícitamente respecto de x, la curva $y^3 = C_1 x$ (2)

$$3 y^2 y' = C_1 \quad (3)$$

La constante C_1 debe eliminarse del sistema que se forma con las ecuaciones (2) y (3)

Sustituyendo (3) en (2) se tiene

$$y = 3 y' x$$

Despejando y'

$$y' = (4)$$

Derivando implícitamente respecto de x, la curva $x^2 + ay^2 = C_2$ (5)

$$2x + 2ay \dot{A}' = 0 \quad (6)$$

Despejando $\dot{A}'$ de la ecuación (6)

$$A' = (7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4) y (7) en la ecuación (1)

$$= -1$$

Simplificando y despejando la constante a

$$a =$$

4. Determinar las trayectorias ortogonales para la familia $y = -x - 1 + C_1 e^x$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = -x - 1 + C_1 e^x$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' = -1 + C_1 e^x \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando $C_1 e^x$ de la ecuación (2)

$$C_1 e^x = y' + 1 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en la ecuación (1), resulta

$$y = -x + y' \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia dada

$$y = -x - 1 + C_1 e^x$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a dicha familia. Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$y = -x +$$

equivalentemente,

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = -dx \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias ortogonales a la curva $y = -x - 1 + C_1 e^x$

La ecuación diferencial (5) no es una ecuación de variables separables, pero puede escribirse de la forma

$$dx + (x + y) dy = 0 \quad (6)$$

resultando una ecuación diferencial reducible a exacta (pues, $P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$, y).

En efecto, si $P(x, y) = 1$ y $Q(x, y) = x + y$ entonces y ; luego la ecuación no es exacta pero puede que admita un factor integrante de la forma

$$\hat{\mu}(x,y) = \text{con } g(v) =$$

Si $v = y$ entonces; sustituyendo en $g(v)$ resulta:

$$g(v) = 1$$

$$\text{Así,}$$

$$\hat{\mu}(x, y) = e^y = e^v$$

Por lo tanto el factor integrante es $\hat{\mu}(x, y) = e^y$

Multiplicando la ecuación diferencial (6) por el factor integrante

$$e^y dx + e^y (x + y) dy = 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) se puede escribir

$$e^y dx + x e^y dy = -y e^y dy \quad (8)$$

El término izquierdo de la ecuación (8) es la diferencial total de $(x e^y)$, esto es,

$$e^y dx + x e^y dy = d(x e^y)$$

Así, la ecuación (8) se transforma en

$$d(x e^y) = -y e^y dy$$

Integrando

$$(9)$$

Resolviendo las integrales

$$+ C_1$$

se resuelve por el método de integración por partes:

, donde

$$= y e^y = y e^y - e^y = e^y (y - 1) + K_2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en (9)

$$x e^y + K_1 = -e^y (y - 1) + K_2$$

o equivalentemente

$$x e^y = e^y (1 - y) + K$$

multiplicando por e^{-y}

$$x = (1 - y) + K e^{-y}$$

o también

$$(x + y - 1) e^y = K \quad (10)$$

La ecuación (10), representa la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = -x - 1 + C_1 e^x$

5. Obtenga la familia de trayectorias ortogonales a la familia $y = (x - C_1)^2$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = (x - C_1)^2$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' = 2(x - C_1) \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando $(x - C_1)$ de la ecuación (2)

$$(x - C_1) = \frac{y'}{2} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$y =$$

equivalentemente

$$4y = (y')^2$$

esto es,

$$2 = y' \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas $y = (x - C_1)^2$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y = (x - C_1)^2$

Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$2 = -\frac{1}{y'}$$

equivalentemente,

$$y' = -\frac{1}{2}$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = -\frac{1}{2} dx \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (5) por

$$2 \int dy = -\int dx$$

integrando

$$2y = -x + C_1 \quad (6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$2y = -x + C_1$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{2}$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$y = -\frac{x}{2} + k$$

Para despejar y , primero se multiplica por 2 a ambos lados de la igualdad y luego se eleva a

equivalentemente

$$y = -\frac{x}{2} + k \quad (7)$$

La ecuación (7), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $y = (x - C_1)^2$

6. Obtenga la familia de trayectorias ortogonales a la familia $C_1 x^2 + y^2 = 1$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $C_1 x^2 + y^2 = 1$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$2Cx + 2y y' = 0 \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria $C1$, dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria $C1$ debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando $C1$ de la ecuación (2)

$$C1 = (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$x^2 + y^2 = 1$$

equivalentemente

$$-yy'x + y^2 = 1 \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia

$$C1x^2 + y^2 = 1$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $C1x^2 + y^2 = 1$

Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por $-\frac{x}{y}$, resultando

$$-yx + y^2 = 1$$

equivalentemente,

$$= 1 - y^2$$

Despejando y'

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (5) por

$$dy = x dx$$

integrando

$$(6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |y| + k_1$$

$$= + k_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$\ln |y| = + k$$

multiplicando por 2

$$2 \ln |y| = x^2 + y^2 + 2K$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln y^2 = x^2 + y^2 + 2K$$

aplicando e a ambos lados de la ecuación

$$y^2 = C \quad (7)$$

La ecuación (7), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $C_1: x^2 + y^2 = 1$

7. Determine la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas $x^2 + y^2 = C$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $x^2 + y^2 = C \quad (1)$

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$2x + 2y y' = 0 \quad (2)$$

Como la ecuación (2) no contiene la constante arbitraria C, dicha ecuación representa la ecuación diferencial asociada al haz de curvas dado.

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $x^2 + y^2 = C$

Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (2) por $-\frac{x}{y}$, resultando

$$2x + 2y = 0$$

equivalentemente,

$$2x - y' = 0$$

Despejando y'

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx \quad (3)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (3) por

$$dy = dx$$

integrando

(4)

Ambas integrales son inmediatas

$$= + k_1$$

$$= + k_2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$2 \ln |y| = \ln |x| + k_3$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln y^2 - \ln |x| = k_3$$

esto es

$$\ln = k_3$$

aplicando e a ambos lados de la ecuación

$$y^2 = k \cdot x \quad (5)$$

La ecuación (5), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $2x^2 + y^2 = C$

8. Determinar la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas $y = e^{Cx}$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = e^{Cx}$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' = C e^{Cx} \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C, dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C de la ecuación (1)

$$C = (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$y' = y \quad (4)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y = e^{Cx}$

Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y}$, resultando

$$=$$

equivalentemente,

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (5) por $(y \ln y)$

$$y \ln y \, dy = -x \, dx$$

integrando

$$(6)$$

Para resolver la integral se aplica el método de integración por partes

; donde

$$u = \ln y$$

$$du = \frac{1}{y} dy$$

$$+ k_2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$= + k$$

multiplicando por 4

$$= - + 4k$$

equivalentemente

$$y^2 (\ln y^2 - 1) + 2x^2 = C_1 \quad (7)$$

La ecuación (7), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = e^{Cx}$

9. Obtenga la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = C_1 x^b$ donde a y b son constantes conocidas.

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = C_1 x^b$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$ay - 1 y' = C_1 b x^{b-1} \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C_1 de la ecuación (1)

$$C_1 = \frac{ay - 1}{b x^{b-1}} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$ay - 1 y' = b x^{b-1} \cdot \frac{ay - 1}{b x^{b-1}} \quad (4)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y = C_1 x^b$

Para ello, se sustituye y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{ay - 1}$, resultando

$$ay - 1 = b$$

Despejando y'

$$y' = -\frac{1}{ay - 1}$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = -\frac{dx}{ay - 1} \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (5) por $(ay - 1)$

$$b dy = -a x dx$$

integrando

$$(6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$+ k_1$$

$$+ k_2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

Multiplicando por

$$(8)$$

La ecuación (8), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = C_1 x^b$

10. Determine la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' =$$

desarrollando y simplificando

$$y' = (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C_1 de la ecuación (1)

$$y(1 - C_1 x) = 1 + C_1 x \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$y' =$$

desarrollando y simplificando

$$y' =$$

de aquí resulta que

$$y' = (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a dicha familia. Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por ,

resultando

=

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (5) por $(1 - y^2)$

$$(1 - y^2) dy = dx$$

integrando

$$(6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= y + k_1$$

$$= + k_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

multiplicando por 3

$$3x^2 + y^3 - 3y = C \quad (7)$$

La ecuación (7), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

11. Determine la ecuación del haz de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $2x^2 + y^2 = 4C$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $2x^2 + y^2 = 4C$

(1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$4x + 2y y' = 4C$$

simplificando

$$2x + y y' = 2C \quad (2)$$

Como la ecuación (2) contiene la constante arbitraria C , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C de la ecuación (2)

$$C = (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$2x^2 + y^2 = 4x$$

desarrollando y simplificando

$$2x^2 + y^2 = 4x^2 + 2xyy'$$

equivalentemente

$$y^2 - 2x^2 = 2xyy' \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $2x^2 + y^2 = 4Cx$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $2x^2 + y^2 = 4Cx$. Para ello, se sustituye y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$y^2 - 2x^2 = 2xy \left(-\frac{1}{y'}\right)$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx$$

equivalentemente

$$2xy dx + (y^2 - 2x^2) dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial homogénea, con grado dos de homogeneidad.

Sacando factor común x^2 en la ecuación (5) ($x \neq 0$)

$$x^2$$

Multiplicando por y efectuando el cambio de variable

$$2t dx + (t^2 - 2)(x dt + t dx) = 0$$

Desarrollando y sacando factor común dx

$$t^3 dx + (t^2 - 2) x dt = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar a ambos lados de la ecuación por el factor $\frac{1}{x^2}$, así resulta

integrando

$$C_1 \quad (7)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |x| + k_1$$

$$= \ln |t| + k_2$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$\ln |x| + \ln |t| = k$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln |xt| = k$$

Devolviendo el cambio de variables ($t = y/x$)

$$\ln |y| = k$$

Aplicando e

$$= C_1 \quad (8)$$

La ecuación (8), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $x^2 + y^2 = 4C_1x$

12. Obtener las trayectorias ortogonales de la familia de curvas

$$4y + x^2 + 1 + C_1 e^{2y} = 0$$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $4y + x^2 + 1 + C_1 e^{2y} = 0$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$4y' + 2x + 2C_1 y' e^{2y} = 0 \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C1 de la ecuación (2)

$$C1 = (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$4y + x^2 + 1 + e^{2y} = 0$$

simplificando

$$(4y + x^2 + 1) y' - 2y' + x = 0$$

sacando factor común y'

$$(4y + x^2 - 1) y' + x = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $4y + x^2 + 1 + C1 e^{2y} = 0$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a dicha familia. Para ello, se sustituye y' en la ecuación (4) por resultando

$$(4y + x^2 - 1) + x = 0$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx$$

esto es

$$(x^2 + 4y - 1) dx + x dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial reducible a exacta. Para resolverla, debe determinarse un factor integrante de la forma $\hat{\mu} =$, donde

$$g(v) = ; P(x, y) = x^2 + 4y - 1 ; Q(x, y) = x$$

$$\text{Si } v = x ; , \text{ entonces } g(v) =$$

Por lo tanto, el factor integrante es

$$\hat{\mu} = e^{\int \frac{1}{v^3} dv} = v^3 = x^3$$

Multiplicando la ecuación (5) por el factor integrante

$$(x^2 + 4y - 1) x^3 dx + x^4 dy = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial exacta. Esto quiere decir que existe una función $F(x,y) = K$,

tal que

Integrando la ecuación (8) parcialmente respecto de y (x se asume constante)

resolviendo las integrales

$$F(x, y) = x^4 y + h(x) \quad (9)$$

Derivando la ecuación (9) parcialmente respecto de x

$$+ (10)$$

Comparando las ecuaciones (7) y (10) resulta

$$x^5 + 4x^3 y - x^3 = 4x^3 y +$$

simplificando

$$= x^5 - x^3$$

Ya que la diferencial de $h(x)$ es $dh(x) = dx$, sustituyendo

$$dh(x) = (x^5 - x^3) dx$$

integrando

$$(11)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= h(x) + k_1$$

=

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (11)

$$h(x) =$$

Sustituyendo $h(x)$ en la ecuación (9)

$$F(x, y) = x^4 y +$$

De aquí resulta que, la familia de trayectorias ortogonales a la familia $4y + x^2 + 1 + C_1$ e $2y = 0$ es $x^4 y + = 0$

13. Determinar la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

(2)

Como la ecuación (2) no contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación representa la ecuación diferencial asociada a la familia dada. Para obtener la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia, basta con sustituir y' en la ecuación (2) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

multiplicando por

$$y' - 1 = 0$$

Despejando y'

$$y' = 1$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = dx \quad (3)$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (3) por

$$dy = dx$$

integrando

(4)

Ambas integrales son inmediatas

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

Multiplicando por $(5/3)$ y elevando a las $(3/5)$

$$y = 5 \quad (5)$$

La ecuación (5), representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

14. Obtenga la curva perteneciente a la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas $x + y = C_1$ que pasa por el punto $(0, 5)$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $x + y = C_1$ que (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$1 + y' = C_1 \text{ y } y' = 0 \quad (2)$$

Como la ecuación (2) contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C_1 de la ecuación (1)

$$C_1 = (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$1 + y' = e^y y'$$

desarrollando y simplificando

$$(x + y - 1) y' = 1 \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x + y = C_1$ y

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $x + y = C_1$ y Para ello, basta con sustituir y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$(x + y - 1) = -1$$

despejando y'

$$y' = 1 - x - y$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y' se tiene

$$dy = (1 - x - y) dx$$

equivalentemente

$$(x + y - 1) dx + dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial reducible a exacta (también lineal en y).

Sea $P(x, y) = x + y - 1$; $Q(x, y) = 1$; la ecuación (5) admite un factor integrante de la forma $\hat{\mu} = \mu(x)$, donde

$$g(y) =$$

Si $v = x$, entonces sustituyendo en $g(v)$, se tiene

$$g(v) =$$

Luego, el factor integrante es

$$\hat{\mu} = e^x$$

Multiplicando la ecuación (5) por el factor integrante $\hat{\mu} = e^x$

$$e^{x+y-1} dx + e^x dy = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación (6) es exacta, ya que si $M(x, y) = e^{x+y-1}$ y $N(x, y) = e^x$ resulta .

Por definición, que la ecuación (6) sea exacta, significa que existe una función $F(x, y) = K$ tal que, la diferencial total de $F(x, y)$ ($dF(x, y) =$) es

$$dF(x, y) =$$

es decir,

$$(7)$$

$$(8)$$

Integrando la ecuación (8) parcialmente respecto de y

$$(9)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= F(x, y)$$

$$= e^{x+y} + h(x)$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (9)

$$F(x, y) = e^{x+y} + h(x) \quad (10)$$

derivando la ecuación (10) parcialmente respecto de x

$$(11)$$

Comparando las ecuaciones (7) y (11)

$$e^{x+y-1} =$$

simplificando

Ya que la diferencial de la función $h(x)$ es $dh(x) =$, sustituyendo

$$dh(x) = dx$$

integrando

$$(12)$$

Resolviendo las integrales

La integral se resuelve por el método de integración por partes

donde

$$= (x - 1) e^x = (x - 1) e^x - e^x + C = (x - 2) e^x + C$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (12)

$$h(x) = (x - 2) e^x + C \quad (12)$$

Sustituyendo la ecuación (12) en la ecuación (10)

$$F(x, y) = e^x y + (x - 2) e^x + C$$

De aquí que,

$$e^x y + (x - 2) e^x + C = 0 \quad (13)$$

es la familia de trayectorias ortogonales a la familia $x + y = C_1$ y

Para obtener la curva perteneciente a la familia $e^x y + (x - 2) e^x + C = 0$ que pase por el punto $(0, 5)$, se sustituye en la ecuación (13) $x = 0$, $y = 5$

$$e^0 5 + (0 - 2) e^0 + C = 0 \quad C = -3$$

este valor obtenido para C , se sustituye en la ecuación (13)

$$e^x y + (x - 2) e^x = 3 \quad (14)$$

La ecuación (14) es la ecuación de la curva perteneciente a la familia $e^x y + (x - 2) e^x + C = 0$ que pasa por el punto $(0, 5)$ y permanece ortogonal a las curvas de la familia $x + y = C_1$

15. Obtenga la curva perteneciente a la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas $y = x + C_1$ que pasa por el punto $(3, 0)$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = x + C_1$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' = 1 - C_1 \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C_1 , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C_1 debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

Despejando C_1 de la ecuación (2)

$$C_1 = (1 - y') e^x \quad (3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$y = x + (1 - y') e^{x-y}$$

simplificando

$$y = x + 1 - y' \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $y = x + C1$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia dada $y = x + C1$. Para ello, se sustituye y' en la ecuación (4) por $-\frac{1}{y'}$, resultando

$$y = x + 1 - \frac{1}{y'}$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $(x + 1 - y)$

$$dx + (x + 1 - y) dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial reducible a exacta. Para resolverla, debe determinarse un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x, y)$, donde

$$g(y) = \int P(x, y) dx = \int 1 dx = x; \quad Q(x, y) = x + 1 - y$$

Si $v = y$, entonces $g(v) =$

Por lo tanto, el factor integrante es

$$\mu = e^v = e^y$$

Multiplicando la ecuación (5) por el factor integrante

$$e^y dx + e^y (x + 1 - y) dy = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial exacta, ya que si $M(x, y) = e^y$ y $N(x, y) = e^y (x + 1 - y)$, entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Por definición de función exacta existe una función $F(x, y) = K$, tal que la diferencial total de $F(x, y)$ es

$$dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy = e^y dx + e^y (x + 1 - y) dy = 0$$

De aquí resulta que,

$$(7)$$

(8)

Integrando la ecuación (7) parcialmente respecto de x (y se asume constante)

(9)

Ambas integrales son inmediatas

$$= F(x, y)$$

$$= x e^y + h(y)$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (9)

$$F(x, y) = x e^y + h(y) \quad (10)$$

derivando la ecuación (10) parcialmente respecto de y

$$+ (11)$$

Comparando las ecuaciones (8) y (11) resulta

$$(x + 1 - y) e^y = +$$

despejando

$$= (1 - y) e^y$$

Ya que la diferencial de $h(y)$ es $dh(y) = dy$, sustituyendo

$$dh(y) = (1 - y) e^y dy$$

integrando

$$(12)$$

Resolviendo las integrales

La integral se resuelve por el método de integración por partes:

. Sea

$$= (1 - y) e^y + = (1 - y) e^y + e^y + C = (2 - y) e^y + C$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (12)

$$h(y) = (2 - y) e^y + C \quad (13)$$

sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (9)

$$F(x, y) = x e^y + h(y) = (2 - y) e^y + C$$

por lo tanto,

$$(x + 2 - y) e^y + C = 0 \quad (14)$$

es la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a la familia $y = x + C$

Para obtener la curva perteneciente a la familia $(x + 2 - y) e^y + C = 0$ que pase por el punto $(3, 0)$, se sustituye en la ecuación (14) $x = 3, y = 0$

$$3e^0 + (2 - 0)e^0 + C = 0 \quad C = -5$$

Luego, $(x + 2 - y) e^y = 5$ es la curva perteneciente a la familia $(x + 2 - y) e^y + C = 0$

que pasa por el punto $(3, 0)$ y es ortogonal a cada una de las curvas de la familia $y = x + C$

16. Obtenga la curva perteneciente a la familia de trayectorias ortogonales al haz de curvas $y = C \tan 2x + 1$ que pasa por el punto

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = C \tan 2x + 1$ (1)

Dicho haz posee una sola constante arbitraria, por lo tanto, la ecuación del haz se deriva solo una vez.

Derivando implícitamente la ecuación (1) respecto de x resulta

$$y' = 2C \sec^2 2x \quad (2)$$

Como la ecuación (2) aún contiene la constante arbitraria C , dicha ecuación no representa la ecuación diferencial asociada. Por lo tanto, la constante arbitraria C debe eliminarse a partir del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2).

despejando C de la ecuación (2)

$$C = (3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$y = \tan 2x + 1$$

simplificando

$$y = (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $y = C \tan 2x + 1$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del haz dado, debe determinarse la ecuación diferencial asociada a las trayectorias ortogonales a la familia $y = C \tan 2x + 1$. Para ello, se sustituye y' en la ecuación (4) por , resultando

$$y =$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $2(y - 1)$

$$\cos 2x \sin 2x dx + 2(y - 1) dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial de variables separadas. Integrando

$$(6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$=$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6) resulta

$$= C_1 \quad (7)$$

La ecuación (7) representa la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = C \tan 2x + 1$.

Para obtener la curva perteneciente a la familia de trayectorias ortogonales $= C_1$ que pasa por el punto , se sustituye en la ecuación de la familia $x = , y = 0$

$$= C_1$$

esto es,

$$C_1 =$$

Sustituyendo el valor obtenido de C_1 en la ecuación (7)

$$= (8)$$

La ecuación (8) representa la ecuación de la curva perteneciente a la familia

$= C_1$ que pasa por el punto y es ortogonal a cada una de las curvas de la familia $y = C \tan 2x + 1$

17. Obtenga las trayectorias a 45° de la familia de curvas $x^2 = C_1$ y

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x^2 = C_1$ y (1)

El haz de curvas dado posee una constante arbitraria, por lo tanto, se debe derivar una sola vez. Derivando implícitamente respecto de x

$$2x = C_1 y' \quad (2)$$

Ya que la ecuación (2) aún posee la constante arbitraria C_1 no representa la ecuación diferencial. La constante C_1 debe eliminarse del sistema que se forma con las ecuaciones (1) y (2)

despejando C_1 de la ecuación (2)

$$(3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$x^2$$

multiplicando por y'

$$x^2 y' = 2 x y \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada

$x^2 = C_1 y$. Para obtener la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° debe sustituirse en la ecuación (4) y' por

$$x^2 = 2 x y$$

multiplicando por $(1 + y')$

$$x^2 y' - x^2 = 2 x y + 2 x y y'$$

sacando factor común y'

$$(x^2 - 2 x y) y' = 2 x y + x^2 \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° de la familia $x^2 = C_1 y$.

Despejando y' de la ecuación (5)

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $(x^2 - 2xy)$

$$(2 x y + x^2) dx + (x^2 - 2 x y) dy = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial homogénea con grado 2 de homogeneidad. Sacando factor común x^2 en la ecuación (6)

$$x^2 \quad (7)$$

multiplicando por y efectuando el cambio de variable

la ecuación (7) se transforma en

$$(2v + 1) dx + (2v - 1)(v dx + x dv) = 0$$

desarrollando y sacando factor común dx

$$(2v + 1 + 2v^2 - v) dx + x(2v - 1) dv = 0$$

simplificando

$$(2v^2 + v + 1) dx + x(2v - 1) dv = 0 \quad (8)$$

La ecuación (8) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (8) por el factor

integrando

$$(9)$$

Resolviendo las integrales

$$= \ln |x| + C_3$$

En la integral, debe observarse que el polinomio del denominador del integrando no tiene raíces reales, por lo que no se puede factorizar

Completando cuadrados en $(2v^2 + v + 1)$

$$2v^2 + v + 1 = 2\left(v^2 + \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2$$

$$= 2 = 2$$

$$= =$$

$$= =$$

Sustituyendo en la integral

$$= = (10)$$

Esta integral se resuelve aplicando la sustitución trigonométrica

Sustituyendo el cambio de variable en la ecuación (10)

$$=$$

Pero $\tan^2 \hat{t} + 1 = \sec^2 \hat{t}$, desarrollando y simplificando

$$= =$$

$$= \ln |\sec \hat{I}_y|$$

Devolviendo el cambio de variable efectuado

$$4v + 1$$

$$= y \hat{I}_y = \operatorname{arctg}$$

Por lo tanto

$$= \ln + C_4$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (9)

$$\ln |x| + \ln = C$$

Falta devolver el primer cambio de variable efectuado $v =$

$$\ln |x| + \ln = C$$

desarrollando

$$\ln |x| + \ln = C$$

realizando operaciones

$$\ln |x| + \ln = C$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln = C$$

simplificando

$$\ln = C \quad (11)$$

La ecuación (11) representa la ecuación de la familia de trayectorias a 45° de la familia $x^2 = C_1$ y

18. Obtenga las trayectorias a 45° para la familia de curvas $y = C_1 x$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $y = C_1 x$ (1)

El haz de curvas dado posee una constante arbitraria, por lo tanto, se debe derivar una sola vez. Derivando implícitamente respecto de x

$$y' = C_1 \quad (2)$$

Ya que la ecuación (2) aún posee la constante arbitraria C_1 , esta debe buscar eliminarse a partir del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1) y (2).

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) resulta

$$y = y' x \quad (3)$$

La ecuación (3) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $y = C_1 x$

Para obtener la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° debe sustituirse en la ecuación (3) y' por

$$y = x$$

multiplicando por $(1 + y')$

$$y + y y' = x y' - x$$

sacando factor común y'

$$(y - x) y' + y + x = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° de la familia $y = C_1 x$.

Despejando y' de la ecuación (4)

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $(x - y)$

$$(x + y) dx + (y - x) dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial homogénea con grado 1 de homogeneidad. Sacando factor común x en la ecuación (5) ($x \neq 0$)

$$(6)$$

multiplicando por y efectuando el cambio de variable

la ecuación (6) queda

$$(1 + v) dx + (v - 1) (v dx + x dv) = 0$$

Desarrollando y sacando factor común dx

$$(1 + v + v^2 - v) dx + x (v - 1) dv = 0$$

simplificando

$$(1 + v^2) dx + x (v - 1) dv = 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, basta con

multiplicar la ecuación (7) por el factor

integrando

(8)

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |x| + C_3$$

$$= -$$

$$= -$$

$$= -\operatorname{arctg} v + C_4$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (8)

$$\ln |x| + -\operatorname{arctg} v = C \quad (9)$$

Multiplicando por 2 y aplicando las propiedades de logaritmo, la ecuación (9) se transforma en

$$\ln - 2 \operatorname{arctg} v = 2C$$

Devolviendo el cambio de variable

$$\ln - 2 \operatorname{arctg} = 2C$$

desarrollando y simplificando

$$\ln - 2 \operatorname{arctg} = 2C$$

aplicando e

$$= K \quad (10)$$

La ecuación (10) representa la familia de trayectorias a 45° a la familia de curvas $y = C_1 x$

19. Obtenga las trayectorias a 45° para la familia de curvas $x^2 + y^2 = C_1 x$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x^2 + y^2 = C_1 x$ (1)

El haz de curvas dado posee una constante arbitraria, por lo tanto, se debe derivar una sola vez. Derivando implícitamente respecto de x

$$2x + 2y y' = C_1 \quad (2)$$

Ya que la ecuación (2) aún posee la constante arbitraria C_1 está; debe buscar eliminarse a partir del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1) y (2).

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) resulta

$$x^2 + y^2 = (2x + 2y y') x$$

desarrollando y simplificando

$$y^2 - x^2 = 2xy y' \quad (3)$$

La ecuación (3) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x^2 + y^2 = C_1 x$

Para obtener la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° debe sustituirse y' en la ecuación (3) por

$$y^2 - x^2 = 2xy$$

multiplicando por $(1 + y')$

$$(y^2 - x^2) + (y^2 - x^2) y' = 2xy y' - 2xy$$

sacando factor común y'

$$(y^2 - x^2 - 2xy) y' + y^2 - x^2 + 2xy = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 45° de la familia $x^2 + y^2 = C_1 x$

Despejando y' de la ecuación (4)

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y' resulta

$$dy = dx$$

multiplicando por $(x^2 - y^2 + 2xy)$

$$(y^2 - x^2 + 2xy) dx + (y^2 - x^2 - 2xy) dy = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial homogénea con grado 2 de homogeneidad. Sacando factor común x^2 en la ecuación (5)

$$x^2 \quad (6)$$

multiplicando por y efectuando el cambio de variable

la ecuación (6) queda

$$(v^2 + 2v - 1) dx + (v^2 - 2v - 1) (v dx + x dv) = 0$$

desarrollando y sacando factor común dx

$$(v^2 + 2v - 1 + v^3 - 2v^2 - v) dx + x(v^2 - 2v - 1) dv = 0$$

simplificando

$$(v^3 - v^2 + v - 1) dx + x (v^2 - 2v - 1) dv = 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (7) por el factor

integrando

$$+ = C_2 \quad (8)$$

Resolviendo las integrales

$$= \ln |x| + C_3$$

En la integral, factorizando el denominador

$$v^3 - v^2 + v - 1 = (v - 1)(v^2 + 1)$$

sustituyendo en la integral

$$= dv$$

El integrando se descompone como suma de fracciones simples

$$(9)$$

Comparando los numeradores

$$v^2 - 2v - 1 = (A + B)v^2 + (C - B)v + (A - C)$$

por igualdad entre polinomios

resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$A = -1 \quad B = 2 \quad C = 0$$

sustituyendo los valores obtenidos para A, B y C en la ecuación (9)

$$= (10)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |v - 1|$$

$$= \ln |v^2 + 1|$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (10)

$$= -\ln |v - 1| + \ln |v^2 + 1|$$

aplicando las propiedades de logaritmo y devolviendo el cambio de variable

$$= \ln + C_4 = \ln + C_4 = \ln + C_4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (8)

$$\ln |x| + C_5 = C_5$$

Aplicando las propiedades de logaritmo

$$\ln = C_5$$

aplicando e

$$(x^2 + y^2) = C (y - x) \quad (11)$$

La ecuación (11) representa la familia de trayectorias a 45° a la familia de curvas $x^2 + y^2 = C_1$

20. Obtenga la curva de la familia de las trayectorias a 60° de la familia de curvas $x^2 + y^2 = C_1$, que pasa por el punto

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x^2 + y^2 = C_1$ (1)

El haz de curvas dado posee una constante arbitraria, por lo tanto, se debe derivar una sola vez. Derivando implícitamente respecto de x

$$2x + 2y y' = 0$$

equivalentemente

$$x + y y' = 0 \quad (2)$$

Ya que la ecuación (2) no posee la constante arbitraria C_1 , esta representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $x^2 + y^2 = C_1$

Para obtener la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 60° debe sustituirse y' en la ecuación (2) por

$$x + y = 0$$

multiplicando por $(1 + y')$

$$x + x y' + y y' - y = 0$$

sacando factor común y'

$$(x + y) y' + x - y = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) es la ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias a 60° de la familia $x^2 + y^2 = C_1$

Despejando y' de la ecuación (3)

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y' resulta

$$dy = dx$$

multiplicando por

$$(x - y) dx + (x + y) dy = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial homogénea con grado 1 de homogeneidad. Sacando factor común x en la ecuación (4)

$$x \quad (5)$$

multiplicando por y efectuando el cambio de variable

la ecuación (5) queda

$$(1 - v) dx + (+v) (v dx + x dv) = 0$$

Desarrollando y sacando factor común dx

$$(1 - v + v + v^2) dx + x (+v) dv = 0$$

simplificando

$$(1 + v^2) dx + x (+v) dv = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (6) por el factor

integrando

$$+ = C_2 \quad (7)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |x| + C_3$$

=

$$= \arctg v + \ln |1 + v^2| + C_4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$\ln |x| + \arctg v + \ln |1 + v^2| = C_5 \quad (8)$$

devolviendo el cambio de variable

$$\ln |x| + \arctg + \ln = C_5$$

multiplicando por 2 y efectuando las operaciones

$$2 \ln |x| + 2 \operatorname{arctg} y + \ln C = 2C_5$$

aplicando las propiedades de logaritmo

$$+ 2 \operatorname{arctg} y = 2C_5$$

aplicando e

$$(x^2 + y^2) = K \quad (9)$$

La ecuación (9) representa la familia de trayectorias a 60° a la familia de curvas $x^2 + y^2 = C_1$

Para obtener la curva perteneciente a la familia representada por la ecuación (9), que pasa por el punto se sustituye en dicha ecuación $x = 1, y = 1$.

$$K = e^2 = 7.389$$

Este valor de K se sustituye en la ecuación (9)

$$(x^2 + y^2) = 7.389$$

multiplicando por

$$(x^2 + y^2) = 1 \quad (10)$$

La ecuación (10), es la ecuación de la curva perteneciente a la familia de trayectorias a 60° del haz de curvas $x^2 + y^2 = C_1$, que pasa por el punto

21. Obtenga la curva de la familia de las trayectorias a 135° de la familia de curvas $y = C e^{-2x} + 3x$

SOLUCIÓN:

Se debe comenzar por determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada $y = C e^{-2x} + 3x$ (1)

El haz de curvas dado posee una constante arbitraria, por lo tanto, se debe derivar una sola vez. Derivando implícitamente respecto de x

$$y' = -2C + 3 \quad (2)$$

Ya que la ecuación (2) aún posee la constante arbitraria C, esta deberá eliminarse del sistema de ecuaciones que se forma con las ecuaciones (1) y (2)

despejando C de la ecuación (1),

$$C = y - 3x \quad (3)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$y' = -2(y - 3x) + 3 \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada

$$y = C + 3x$$

Para obtener la ecuaci3n diferencial asociada a la familia de trayectorias a 135Â° debe sustituirse y' en la ecuaci3n (4) por

$$= -2y + 6x + 3$$

multiplicando por $(1 - y')$

$$y' + 1 = -2y + 6x + 3 - y'(-2y + 6x + 3)$$

sacando factor com3n y'

$$(-2y + 6x + 4)y' = -2y + 6x + 2 \quad (5)$$

La ecuaci3n (5) es la ecuaci3n diferencial asociada a la familia de trayectorias a 135Â° de la familia $y = C + 3x$

Despejando y' de la ecuaci3n (5)

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $(3x - y + 2)$

$$(3x - y + 1)dx + (-3x + y - 2)dy = 0 \quad (6)$$

La ecuaci3n (6) es una ecuaci3n diferencial reducible a una de variable separable, ya que las funciones involucradas, $3x - y + 1 = 0$, $-3x + y - 2 = 0$ representan ecuaciones de rectas paralelas (ambas tienen pendiente 3).

Para resolver la ecuaci3n diferencial (6) se efect3a el cambio de variable

sustituyendo el cambio de variable en (6)

$$(v + 1)dx + (-v - 2)(3dx - dv) = 0$$

desarrollando y sacando factor com3n dx

$$(v + 1 - 3v - 6)dx + (v + 2)dv = 0$$

simplificando

$$(-2v - 5)dx + (v + 2)dv = 0 \quad (7)$$

La ecuaci3n (7) es una ecuaci3n diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuaci3n (7) por el factor

$$dx - dv = 0$$

integrando

$$- = C2 (8)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= x + C3$$

$$=$$

$$= + C4 = + C4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (8)

$$x - = C5$$

multiplicando por 4 y devolviendo el cambio de variable

$$4x - 2(3x - y) + \ln |2(3x - y) + 5| = 4 C5$$

efectuando las operaciones

$$- 2x + 2y + \ln |6x - 2y + 5| = 4 C5$$

aplicando e

$$e^{2(y - x)(6x - 2y + 5)} = K (9)$$

La ecuación (9) representa la familia de trayectorias a 135° a la familia de curvas $y = C + 3x$

LEONHARD EULER

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza. Murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Vivió en Rusia la mayor parte de su vida. Probablemente uno de los más grandes matemáticos de la historia, comparable a Gauss, Newton o Arquímedes.

Matemático suizo, uno de los más grandes de todos los tiempos. Trabajó todas las ramas conocidas en su época y a todas aportó algo

Pasó su infancia en Riehen un pueblecito en las cercanías de Basilea. Su padre, alumno de Bernoulli, era pastor calvinista y esperaba que su hijo siguiera la carrera de Teología, pero su amistad con los Bernoulli hizo despertar su vocación por las matemáticas. Johan Bernoulli fue su tutor y profesor de matemáticas. Los sábados por la mañana iba su casa a resolver dudas, ya que Bernoulli le había reservado una sesión semanal. Para Euler era una cuestión de amor propio reducir el número de preguntas a su maestro. Fue amigo de los hijos de Bernoulli; Nikolaus, Daniel y Johann II.

En 1720 se matriculó en la Facultad de Filosofía y más tarde en Teología en la Universidad de Basilea alcanzando el Magister en Filosofía en 1724

Se presentó a la cátedra de Física pero fue rechazado por su juventud y ese mismo año recibió una mención honorífica de la Academia de Ciencias de París por su trabajo “disposición óptima de los mástiles de un barco” aunque nunca había visto navegar un barco.

En 1725 cursó Medicina, con la esperanza de obtener una plaza en San Petersburgo. Pero el mismo día de

su llegada a Rusia moriéndose a la Emperatriz Catalina I fundadora junto a su esposo Pedro I el Grande de la Academia que estuvo a punto de sucumbir con los nuevos gobernantes. Ese mismo año se alistó en la marina rusa, con el grado de lugarteniente y allí aprendió los principales aspectos relativos a la estructura y funcionamiento de las naves, llegando a convertirse en una verdadera autoridad naval.

En 1730 abandonó la marina debido a que le concedieron la ciudadanía y en 1733 la de Matemáticas que había dejado su amigo Daniel Bernoulli

El 27 de Diciembre de 1733 a los 27 años se casó con Katharina Gsell, hija de un pintor sueco con la que tuvo 13 hijos de los que sobrevivieron 5, tres hijos y 2 hijas. De los 5 supervivientes tuvo 32 nietos. En 1773 murió su mujer y se volvió a casar con Salomé Abigail Gsell hermanastra de su mujer.

De 1727 a 1741 trabajó para el gobierno ruso como director del departamento de geografía y como comisario de pesas y medidas. Así participó en el análisis cartográfico de Rusia. Fue discípulo de Jean Bernoulli, pero superó rápidamente el notable talento matemático de su maestro. Su carrera profesional se circunscribió a las Academias de Ciencias de Berlín y San Petersburgo, la mayor parte de su trabajo se publicó en los anales de ciencias de estas instituciones. Fue protegido de Federico el Grande, en cuya corte protagonizó agrias discusiones metafísicas con Voltaire, de las que solía retirarse enfurecido por su incapacidad en la Retórica y la metafísica.

Perdió la vista de un ojo durante un experimento en óptica (según otras fuentes, mientras hacía un mapa topográfico de Rusia).

Fue llamado a Berlín por Federico II de Prusia, que le ofreció una cátedra en su Academia. Euler solicitó permiso al gobierno ruso para trasladarse a Berlín, y éste no sólo se lo concedió, sino que siguió pagándole sus honorarios de académico en San Petersburgo.

Se incorpora a Berlín en 1741, enviando sus memorias a la Academia de Prusia y a la de San Petersburgo. Aunque Federico el Grande no fuera un entendido en Matemáticas apreciaba el trabajo de Euler y le creó una serie de trabajos prácticos como acuñación de moneda, conducciones de agua, canales de navegación, nivelación del canal de Finow, la creación de Montepíos de viudedad, instalación de juegos de agua... Su estancia en Berlín no fue feliz, perdió su otro ojo y el rey prefería a los intelectuales. Así estuvo residiendo 25 años en la Corte de Federico el Grande

En 1776, Catalina II de Rusia le invita a volver a la Academia de San Petersburgo; Euler decide volver, aunque los médicos le advierten de que el riguroso clima de la capital rusa le haría perder por completo la vista. Es recibido en San Petersburgo como una gran personalidad.

Tal como le advirtieron los médicos, Euler perdió la vista casi por completo; sólo conservó la capacidad de distinguir los trazos gruesos de la tiza en la pizarra, con lo que su capacidad de trabajo no disminuyó.

En 1773 recobra la vista después de someterse a una operación, pero no tardó en volverla a perder y así vivió 17 años con su ceguera. Aunque ciego no dejó sus trabajos, primero empleaba una pizarra y más tarde dictaba a sus colaboradores las publicaciones.

En 1777, su casa fue destruida por un incendio, pero gracias al conde de Orloff, se salvaron sus manuscritos.

Pasó sus últimos días jugando con sus nietos y discutiendo las últimas teorías sobre el planeta Urano

Murió el 18 de Septiembre de 1783, repentinamente, mientras fumaba y tomaba el té con su familia. Fue enterrado en San Petersburgo (Rusia)

Posiblemente es el matemático con más trabajos publicados de la historia. La mayor parte de ellos se los dictó a su hijo mayor cuando ya estaba ciego. A pesar de que su actividad de publicación era incesante, un promedio de 800 páginas de artículos al día en su época de mayor producción, entre 1727 y 1783, la mayor parte de su obra completa está sin publicar. La labor de recopilación y publicación completa de sus trabajos comenzó en 1911 y no hay indicios de que se complete. El proyecto inicial planeaba el trabajo sobre 887 títulos en 72 volúmenes, al día de hoy se supone que alcanzarán los 200 con facilidad. Se le considera el ser humano con mayor número de trabajos y artículos en cualquier campo del saber, solo equiparable a Gauss.

PRINCIPALES APORTACIONES A LAS MATEMÁTICAS:

- Descubrió la igualdad $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$ (en cualquier polígono regular)
- Demostró que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. Recta de Euler
- Argumentó que el infinito separaba los números positivos de los negativos de forma similar a como lo hace el cero.
- Definió las funciones logarítmicas y exponenciales
- Desarrolló el cálculo de números complejos, demostrando que tiene infinitos logaritmos
- Resolvió el problema de los Puentes de Königsberg.
- $\int$, $f(x)$ Introdujo los símbolos e y i
- Clasificó las funciones y formuló el criterio para determinar sus propiedades
- Elaboró e introdujo la integración doble
- Descubrió el teorema de la composición de integrales elípticas
- Dedujo la ecuación diferencial de la línea geodésica sobre una superficie
- Introdujo la ecuación de la expansión volumétrica de los líquidos
- Fue el padre de la Teoría de Gráficas
- Amplió y perfeccionó la geometría plana y de sólidos
- Demostró que podían conseguirse objetivos acósmicos de foco finito, asociando dos tipos de vidrios distintos.
- Fue el primero en considerar el seno y el coseno como funciones.
- Introdujo los factores integrantes en las ecuaciones diferenciales.
- Generalizó la congruencia de Fermat, introduciendo una expresión que Gauss denominó "indicador".
- Se adelantó a Legendre en el descubrimiento de la "ley de reciprocidad" de los restos cuadráticos.
- Adaptó el "cuadrado latino" a los cuadrados mágicos ("padre" de los famosos "sudokus").
- Ideó métodos para el desarrollo en serie de raíces.
- Inició el estudio de las funciones simétricas de las raíces.
- En Álgebra, ideó métodos de eliminación y descomposición en fracciones simples.
- A él se debe la utilización de letras minúsculas para designar los lados de un triángulo y de las mayúsculas para los vértices.

EL CUENTO DE LAS CUENTAS

Tiempos tuvo la historia de la humanidad en los que saber leer era un privilegio. Hoy consideramos un contrasentido que un niño de 7 años no lo haga. De la misma manera, esperamos que cualquier chamo de 10 realice con facilidad las operaciones aritméticas básicas, aun cuando a veces nos llevamos algunas sorpresas. Esta nos hace pensar que se trata de fáciles procesos, cuya generación debe ser tan espontánea como natural. Sin embargo, quizá nos sorprenda saber que una de las mayores hazañas intelectuales de la humanidad fue la de diseñar métodos que permitieran leer las cantidades y operar con ellas. El alto nivel que ha alcanzado la matemática en nuestros días produce la impresión de que su complejidad no se relacionan con las rutinas a las que nos hemos acostumbrado desde nuestra infancia. Observemos entonces que el simple hecho de seleccionar un método de escribir cantidades requiere de mentes matemáticas de enormes proporciones, ya que no se trata sólo de visualizar las cantidades en pequeños espacios gráficos,

sino de que tal visualización debe poseer características que apoyen las combinaciones de las cantidades por ellas descritas.

Veamos por ejemplo el sistema romano de numeración, simbolizado por un subconjunto de las letras de su propio alfabeto y supongamos que queremos usar el sistema para sumar 59 y 38. En primer lugar, notemos que LIX no era la manera en que los antiguos romanos representaban a 59; la unidad (I) restada al 10 (X) colocándola a la izquierda fue un invento de la edad media (Isaac Asimov) y no existiendo la capacidad sustractiva entonces sólo quedaba la aditiva hasta cuatro posiciones consecutivas, y la forma en que este número se escribía en la realidad era LVIIII. Con el 38 no hay problema, se trata de XXXVIII. Notemos que con este esquema, las unidades menores quedan a la derecha, lo cual es conveniente para realizar las operaciones de suma y resta por simple acumulación o eliminación de símbolos; así, la suma que buscamos se podrá representar en principio en la forma LXXXVIIII, que contiene todos los símbolos con los que se representan los dos números. Ahora bien, como la regla nos exige no repetir un número más de cuatro veces, las siete unidades I que me resultaron las convierto en VII, los dos 5 (V) se transformaron en 10 (X) y el resultado final de la operación es entonces LXXXVII, es decir, 97, como es de esperar. No eran buenos matemáticos los romanos, pero tampoco tan malos para inventar la notación sustractiva que tanto hubiera enredado la operación. De todas formas, debe haber en esta capacidad algo de influencia griega quienes, a su vez, tomaron de los egipcios la parte práctica de su matemática. Para la resta pudo haberse seguido un esquema similar, transformando el minuendo mediante conversión de unidades de cierto orden, en repetición de unidades de orden inferior para eliminarlas con las del sustraendo. Por ejemplo, LVIIII, se pudiera pensar como XXXXVIIII y, al restarle las unidades del mismo orden de XXXVIII, resultarían XXI. Es decir, 59 menos 38 igual a 21. Si el lector piensa que voy a especular acerca de la multiplicación y división está muy equivocado: no dispongo de tanto tiempo. Es mejor hablar de cosas más fáciles.

Entramos así en la mal llamada numeración arábiga, denominación injusta que traduce ganancia de indulgencias con escapulario ajeno ya que fueron los hindúes quienes la inventaron. Su entrada al país de los árabes se realiza de la mano de Muhammad ibn Musa, ciudadano de la provincia de Korassan, de donde le vino el apelativo de al-Khowarizmi, cuya modificación legó a al español la palabra algoritmo, con la que se denota un conjunto de reglas que sirven para resolver un problema en forma mecánica. Y es esto precisamente lo que se gana con el sistema de numeración indo-arábiga (ni modo, un tiro para el gobierno y otro para la revolución). Tan mecánicos son nuestros procedimientos de realización de las operaciones elementales que en los últimos tiempos han sido confiados a máquinas calculadoras. Pero esto sólo fue posible gracias a una invención de un hombre anónimo que nunca supo que con ello iniciaba un modelo de civilización universal y permanente. Esta invención es el cero, símbolo necesario de la representación de ausencia de cantidad.

El sistema indo-arábiga es un sistema posicional. Esto quiere decir que se dispone de un conjunto limitado de símbolos para representar cualquier número; en el caso hindú son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; a los que se llama dígitos y su valor en la cifra proviene de la posición que ocupa en la representación. Por ejemplo, en 3023 no vale lo mismo el 3 de la izquierda que el de la derecha. Si la maestra no le había mucho las orejas por esto, quizá usted recuerde que el primero representa tres unidades de mil y el último tres unidades simples. Asimismo, el 2 significa dos decenas. Falta algo por nombrar: las centenas; pero resulta que nuestro número carece de ellas. Si dejamos un espacio vacío o pareciera que el 3 izquierdo las representara: ¿estamos obligados a indicar que no existen para este número! El cero es el eslabón faltante, pero imprescindible, de la representación posicional.

¿Por qué de esta manera se mecanizan los cálculos? Por la sencilla razón de que para sumar números cualesquiera sólo se necesitaba recordar los resultados de la suma de dos dígitos, lo que coscorrían mediante, aprendemos con tablas de sumar. Lo demás es sumar dígitos en las mismas posiciones y cuando la suma supera un dígito no olvidamos “llevar” la decena que nos falta. ¿Qué más de que hablo? Fájese en 59 mas 38: “9 más 8, 17, coloco el 7 y llevo 1; 5 más 3 igual a 8, más uno que llevo igual a 9. Total 97”.

Si nos espoleara la rigurosidad, deberíamos decir: “9 unidades más 8 unidades es igual a 1 decena más 7 unidades: se escribe la cifra de las unidades y se reserva la decena; 5 decenas más 3 decenas es 8 decenas, más la que tenemos pendiente produce 9 decenas. Total 9 decenas, 7 unidades” Esto podrá ser más preciso, pero es más lento y de lo que se trata es de poder hacer rápido la operación para dedicarnos a otras cosas sin pensar en ella,

Los hindúes nos legaron el sistema posicional de numeración, pero se lo asignamos a los árabes. Lo importante, sin embargo, es que este sistema es un medio de realizar nuestras operaciones aritméticas básicas de un modo totalmente algorítmico, es decir, mecánico, como si se tratara de una receta de cocina. Acabamos de ver el ejemplo de la suma, en esta queremos dedicarnos un poco a la multiplicación. En la figura, usamos nuestro ejemplo conocido (38 y 59) para mostrar como se realiza habitualmente esta operación. Contradiquemos a Whitehead por un momento y pensemos en lo que esta disposición, tan mecánica para nosotros, significa en la realidad..

En primer lugar, recordemos que 38 significa 3 decenas y 8 unidades

así— las 8 unidades multiplicadas por 59 producen 472 unidades,

resultado que proviene de un procedimiento separador de decenas y

unidades y de “llevar” cuando haga falta. Luego, 3 decenas por 59

produce, de manera similar, 177 decenas y es este hecho , el de ser

decenas lo que hace que se escriba el resultado movido en una

posición a la izquierda . El espacio que queda vacío—o, juega el papel de

un cero final que no escribimos por pura comodidad. Para terminar

sólo queda sumar.

No faltará quien diga: “¡Pura tontería! ¡Pérdida de tiempo! ¡Más fácil es usar una calculadora!”. Sólo que hay un detalle: somos producto de una evolución y estamos obligados a continuarla. La alabada calculadora y las nunca bien ponderadas computadoras no hubiesen sido posibles jamás , de no ser por el hombre o los hombres anónimos que hicieron del complicado proceso de manejar cifras un acto tan mecánico que hoy ni siquiera tenemos que pensar en él. Creer que el mundo nació con nosotros es una manera de acabar con la evolución del conocimiento humano. Admirar el legado que recibimos es el mejor camino para seguir colocando las hojas que lo hagan más grande y hermoso.

(Tomado de: La Aventura de la Matemática, sus secretos, protagonistas y grandes momentos. Autor: Douglas Jiménez)

PROPIEDADES METAFÍSICAS DEL NÚMERO 1

Representa el principio de unicidad, de lo indivisible e ilimitado: Dios. Pitágoras dice que es el padre, creador de todas las cosas; el pensamiento creador de todas las ideas; la memoria y el fundamento del conocimiento. Como número representa al hombre, el único animal que camina erecto.

El 1 es lo determinado, la iniciación. Lo que insta para que las cosas sean, la voluntad. Es la identidad, la igualdad, la existencia y la persistencia. Representa lo espiritual, la luz, la inteligencia y la aptitud para proponer, considerar y resolver. Es meditación, reflexión y decisión, obrando como trabajo en la mano de

obra y como volición del pensamiento.

SISTEMA DE NUMERACIÓN DEL ANTIGUO EGIPTO (3000 años antes de Cristo)

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema de escribir los números en base diez utilizando los geroglíficos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades.

Se usaban tantos de cada uno como fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso. Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los geroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban. En la figura aparece el 276 tal y como figura en una estela en Karnak.

Â Â

LA IDEA DE INFINITO

Sucedí durante una clase de Cálculo Diferencial e Integral. Cuando el profesor estaba desarrollando la teoría de límites al infinito y límites infinitos, un estudiante le pregunto Qué es el infinito? El Profesor le indicó: "El infinito es algo como esto...". Seguidamente tomó la tiza y comenzó a trazar una línea alrededor del aula dándole tres vueltas, luego sin dejar de trazar la línea, abrió la puerta y se fue... Los estudiantes se quedaron esperando pero el profesor no regresó. Cuando salieron vieron como la línea que el profesor trazó recorría las paredes, bajaba por las gradas y salía del edificio... A la clase siguiente, mientras los estudiantes esperaban la llegada del profesor, este se presentó trazando aún la línea con una tiza hasta llegar de nuevo a la pizarra y le dijo a los estudiantes: "Bueno, esto no es el infinito pero al menos ya tienen una idea de lo que es"...

ENTRETENIMIENTO

Â	Â	Â	Â	Â	3Â	7	Â	6
Â	Â	Â	1	Â	Â	8	9	Â
Â	2	Â	Â	9	7	5	Â	Â
1	8	Â	Â	Â	Â	9	Â	2
Â	Â	Â	Â	4	Â	Â	Â	Â
2	Â	7	Â	Â	Â	Â	3	5
Â	Â	2	3	6	Â	Â	5	Â
Â	5	3	Â	Â	8	Â	Â	Â
7	Â	4	2	Â	Â	Â	Â	Â

SUDOKU 1

DESCUBRIENDO EL PENSAMIENTO Y SU AUTOR 1

Â	Â	Â	Â	Â	Â	M	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
2	1	Â	18	20	5	26	20	1	8	24	10	Â	1	24	20	19	20	Â
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	S	Â	Â	Â	Â	Â
11	5	25	Â	18	8	10	19	11	20	25	Â	1	20	25	5	8	5	25

:	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
Â	13	19	5	Â	20	25	Â	20	2	Â	1	20	5	8	20	26	10	Â	Â
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	G	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
11	20	Â	27	24	1	10	18	5	8	10	25	Â	7	Â	20	2	Â	5	1
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	.	Â
8	5	Â	20	2	Â	19	13	26	20	8	5	Â	10	13	8	20	5	Â	Â
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
20	2	Â	27	8	24	26	20	8	5	Â	27	13	20	11	20	Â	6	5	26
PÂ	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
27	10	8	10	8	25	20	Â	10	Â	13	19	10	Â	26	20	11	24	11	10
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	E	Â	Â	Â	Â	Â
Â	11	20	Â	5	8	5	Â	7	Â	20	2	Â	25	20	18	13	19	11	5
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â		Â
Â	10	Â	13	19	10	Â	27	24	20	11	8	10	Â	27	8	20	6	24	5
Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â	K	Â	Â	Â	Â	Â	Â	Â
25	10	Â	16	5	4	10	19	19	20	25	Â	21	20	27	2	20	8	Â	Â

EJERCICIOS PROPUESTOS SOBRE APLICACIONES DE LAS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

A PROBLEMAS DE TRAYECTORIAS

1. Obtenga las trayectorias ortogonales para cada una de las familias de curvas

a) $y = C_1 x$	R: $x^2 + y^2 = k$
b) $3x + 4y = C_1$	R: $y =$
c) $y = C_1 x^2$	R:
d) $y = C_1 e^{-x}$	R: $y^2 = 2(x + k)$
e) $y^2 = C_1 x^3$	R:
f) $y =$	R: $x^3 + y^3 = k$
g) $x^2 + y^2 = 2 C_1 x$	R: $y^2 + x^2 = k y$
h) $y^2 - x^2 = C_1 x^3$	R: $x^2 + 3 y^2 = k y$
i) $y =$	R: $(x + 1)^2 - y^2 = k$
j) $y =$	R: $2 y^3 - 3 x^2 = k$
k) $y = \ln(\operatorname{tg} x + C_1)$	R: $y = \ln$
l) $y = C_1 \operatorname{sen} x$	R: $y^2 = \ln \cos 2x + k$
m) $x^2 = C y + y^2$	R: $x(x^2 + 3 y^2) = k$
n) $x y = k$	R: $y^2 - x^2 = k$

2. Determine las trayectorias a las familias según el ángulo indicado

a) $x - 2y = C$	$\tilde{\alpha} = 45^\circ$	R: $y = 3x + k$
b) $x^2 + y^2 = C$	$\tilde{\alpha} = 60^\circ$	R: $x^2 + y^2 = k$
c) $y = C e^x$		

	$\ddot{I} = 45^\circ$	R: $(y + 1)^2 = k e^{x+y}$
d) $y =$	$\ddot{I} = 135^\circ$	R: $y^2 - 2x^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = k$
e) $x y = C$	$\ddot{I} = 60^\circ$	R: $(y^2 - x^2) + 2xy = k$
f) $3x + 4y = C$	$\ddot{I} = 135^\circ$	R: $y = -7x + k$
g) $y = C1 x$	$\ddot{I} = 60^\circ$	R: $x^2 + y^2 = k$

3. Halle el miembro de la familia de trayectorias ortogonales al haz $3xy^2 = 2 + 3 C1x$ que pasa por el punto (0,10)

R: $y = 10$

4. Obtenga la curva de la familia de trayectorias ortogonales al haz $x^2 + C y^2 = 1$ que pasa por el punto (2,1)

R: 4

5. Determine la curva de la familia de trayectorias ortogonales al haz $x^2 = Cy + y^2$ que pasa por (3,1)

R: $x(3y^2 + x^2) = 36$

6. Determine la curva de la familia de trayectorias ortogonales al haz $y^2 = C(1 + x^2)$ que pasa por (-2, 5)

R: $x^2 e = 36$

7. Obtenga la curva de la familia de trayectorias a 45° del haz $y =$

R: $x = \ln + C$

8. Muestre que las familias de curvas $x^2 + 4y^2 = C1$; y ; $C2 x^4$ son trayectorias ortogonales una de la otra.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN A PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN A

LA RECTA TANGENTE Y LA RECTA NORMAL

Cuando un problema geométrico está enunciado en términos de la recta tangente o la recta normal, los puntos de corte de estas con los ejes coordenados quedan expresados en función de la derivada y el modelo matemático que se obtiene va a representar una ecuación diferencial, ya que las pendientes de las rectas tangente y normal a una curva en un punto, se pueden expresar en términos de sus derivadas.

Considere una curva $F(x, y) = 0$ y un punto $P(x, y)$ de ella (ver Figura 1).

La recta tangente a dicha curva en el punto $P(x, y)$ es aquella recta, cuya intersección con la curva es solo el punto $P(x, y)$.

La recta normal a la curva $F(x, y) = 0$ en el punto $P(x, y)$, es aquella recta perpendicular a la recta tangente y que pasa por el punto $P(x, y)$ (ver Figura 2).

Por cálculo diferencial, se sabe que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es igual a la derivada de la curva evaluada en dicho punto. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente L_t a la curva $F(x, y) = 0$ en el punto $P(x, y)$ es $m_t = y'$.

De aquí que, la ecuación de la recta tangente es:

$$L_t: Y - y = y' (X - x)$$

Ya que la recta normal pasa por el mismo punto $P(x, y)$ y es perpendicular a la recta tangente, por geometría analítica se sabe que. El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 , esto es, $m_t m_n = -1$; de aquí que la pendiente de la recta normal es $m_n = -$

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es:

$$L_n: Y - y = - (X - x)$$

Los puntos de corte de cada una de estas rectas con los ejes coordenados, quedarán expresados en función de x, y, y' (ver Figura 3)

El punto A (a_x, a_y) es el punto de intersección entre la recta tangente y el eje x . Por ser A un punto en el eje x , resulta $a_y = 0$. Para determinar a_x , se sustituye en la ecuación de la recta tangente, $X = a_x$ y $Y = a_y = 0$

$$- y = y' (a_x - x)$$

despejando a_x

$$a_x = x -$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto A son

El punto B (b_x, b_y) es el punto de intersección entre la recta tangente y el eje y . Por ser B un punto en el eje y , resulta $b_x = 0$. Para determinar b_y , se sustituye en la ecuación de la recta tangente, $X = b_x = 0$ y $Y = b_y$

$$b_y - y = y' (- x)$$

despejando b_y

$$b_y = y - x y'$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto B son

El punto C (c_x, c_y) es el punto de intersección entre la recta normal y el eje x . Por ser C un punto en el eje x , resulta $c_y = 0$. Para determinar c_x , se sustituye en la ecuación de la recta normal, $X = c_x$ y $Y = c_y = 0$

$$- y = (c_x - x)$$

despejando c_x

$$c_x = x + y y'$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto C son

El punto D (d_x, d_y) es el punto de intersección entre la recta normal y el eje y . Por ser D un punto en el eje y , resulta $d_x = 0$. Para determinar d_y , se sustituye en la ecuación de la recta normal, $X = d_x = 0$ y $Y = d_y$

$$d_y - y = (- x)$$

despejando dy

$$dy = y +$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto D son

Hay dos segmentos a los cuales se hace referencia en mucho de estos problemas geométricos, estos son: la subtangente y la subnormal.

SUBTANGENTE

La subtangente es el segmento de recta comprendido entre la proyección del punto $P(x, y)$ sobre un determinado eje coordenado y el punto de corte de la recta tangente con dicho eje coordenado (ver Figura 4).

SUBNORMAL

La subnormal es el segmento de recta comprendido entre la proyección del punto $P(x, y)$ sobre un determinado eje coordenado y el punto de corte de la recta normal con dicho eje coordenado (ver Figura 5).

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN, A PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN A LA RECTA TANGENTE Y LA RECTA NORMAL

1. Determinar todas las curvas planas, tales que la recta tangente en cada punto (x, y) pase por el punto $(-1, 1)$

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto (x, y) es

$$Y - y = y' (X - x) \quad (1)$$

Ya que la recta tangente debe pasar por el punto $(-1, 1)$, se tiene que las coordenadas de dicho punto satisfacen la ecuación (1)

Sustituyendo $X = -1$, $Y = 1$ en la ecuación (1)

$$1 - y = y' (-1 - x) \quad (2)$$

La ecuación (2) representa la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas cuya recta tangente pasa por el punto $(-1, 1)$. Luego, para obtener la ecuación de esa familia de curvas, basta con resolver la ecuación diferencial (2)

Despejando y' de la ecuación (2)

$$y' =$$

Como la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

equivalentemente

$$(1 - y) dx + (x + 1) dy = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3), es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables debe multiplicarse la ecuación (3) por el factor

$$= 0$$

integrando

$$= C1 \quad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |x + 1| + C2$$

$$= -\ln |y - 1| + C3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln |x + 1| - \ln |y - 1| = C$$

aplicando las propiedades de logaritmo

$$= C$$

aplicando e

multiplicando por $(y - 1)$

despejando y

reordenando la ecuación

$$(5)$$

La ecuación (5) es la ecuación de una familia de rectas de pendiente y ordenada en el origen. Esta familia satisface la condición que la recta tangente en cualquiera de sus puntos pasa por el punto $(-1, 1)$

2. La recta normal a una curva dada en cada punto (x, y) sobre dicha curva, pasa a través del punto $(2, 0)$. Si el punto $(2, 3)$ pertenece a dicha curva, encuentrese su ecuación.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera (x, y) de la misma es:

$$L_n : Y - y = (X - x) \quad (1)$$

Esta recta normal pasa por el punto $(2, 0)$, esto quiere decir que las coordenadas de dicho punto satisfacen la ecuación (1)

Sustituyendo $X = 2, Y = 0$ en la ecuación (1)

$$-y = (2 - x)$$

Multiplicando por

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (2)$$

Esta es una ecuaci3n diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuaci3n (2) por el factor (y)

$$(x - 2) dx + y dy = 0$$

integrando

$$+ = C_1 \quad (3)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= + C_2$$

$$= + C_3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuaci3n (3)

$$+ = C$$

multiplicando por 2

$$(x - 2)^2 + y^2 = K \quad (4)$$

La ecuaci3n (4) es la ecuaci3n de una familia de circunferencias con centro en (2,0) y radio variable. Para determinar la curva de dicha familia que pasa por el punto (2,3), se sustituyen $x = 2$, $y = 3$ en la ecuaci3n (4), obteni3ndose $K = 9$. Este valor que se obtuvo para K se sustituye en la ecuaci3n (4)

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9 \quad (5)$$

La ecuaci3n (5) es la ecuaci3n de la circunferencia de centro (2,0) y radio 3 que pasa por el punto (2,3).

3. Encu3ntrense todas las curvas planas para las que el eje y biseca la parte de la tangente comprendida entre el punto de tangencia y el eje x

SOLUCI3N:

Sea P (x, y) el punto de tangencia, A (ax, ay) el punto de intersecci3n entre la recta tangente y el eje x, B (bx, by) el punto de intersecci3n entre la recta tangente y el eje y.

De acuerdo con el enunciado, el eje y biseca al segmento comprendido entre el punto de tangencia y el eje x; esto significa que el eje y divide en dos partes iguales a dicho segmento. Seg3n puede observarse en la gr3fica anterior, esto equivale a decir que el punto B es el punto medio del segmento comprendido entre el

punto P y el punto A.

Si las coordenadas de los puntos son: P (x, y), A (ax, ay) y B (bx, by) entonces, por conocimientos de geometría analítica, se deben satisfacer las siguientes relaciones entre las coordenadas de dichos puntos

$$(1)$$

$$(2)$$

Sea $L_t: Y - y = y' (X - x)$ la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto P (x, y)

Para determinar las coordenadas del punto A, debe primero observarse que por ser un punto del eje x, se tiene que $ay = 0$. Por otra parte, este punto A (ax, ay) = (ax, 0) también pertenece a la recta tangente, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación de dicha recta. Así, sustituyendo $X = ax$ y $Y = 0$, en la ecuación L_t ,

$$-y = y' (ax - x)$$

despejando ax

$$ax = x -$$

Así, el punto A tiene coordenadas (x - , 0)

Para determinar las coordenadas del punto B, debe primero observarse que por ser un punto del eje y, se tiene que $bx = 0$. Por otra parte, este punto B (bx, by) = (0, by) también pertenece a la recta tangente, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación de dicha recta. Así, sustituyendo $X = 0$ y $Y = by$, en la ecuación L_t ,

$$by - y = y' (-x)$$

despejando by

$$by = y - y' x$$

Así, el punto B tiene coordenadas (0, y - y' x)

Una vez que las coordenadas de los puntos involucrados se han expresado en función de x, y, y', ahora se procede a sustituir las coordenadas de dichos puntos en las ecuaciones (1) y (2)

Sustituyendo $ax = x -$, $bx = 0$ en la ecuación (1)

$$0 =$$

multiplicando por 2 y'

$$2x y' - y = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo $ay = 0$, $by = y - y' x$ en la ecuación (2)

$$y - y' x =$$

multiplicando por 2 y simplificando

$$2x y' - y = 0 \quad (4)$$

Comparando las ecuaciones (3) y (4) resulta que son la misma ecuaci3n. Por lo tanto, la ecuaci3n diferencial asociada al problema planteado es $2x y' - y = 0$. Despeando y'

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (5)$$

La ecuaci3n (5) es una ecuaci3n diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuaci3n (5) por el factor

$$dy - dx = 0$$

integrando

$$- = C1 \quad (6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |y| + C2$$

$$= + C3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuaci3n (6)

$$\ln |y| - = C$$

multiplicando por 2 y aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln = C$$

aplicando e

$$y^2 = Kx \quad (7)$$

La ecuaci3n (7) es la ecuaci3n de la familia de curvas para las que el eje y biseca el segmento de la recta tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte con el eje x . La ecuaci3n (7), es la ecuaci3n de una familia de par3bolas, de v3rtice en el origen, con eje focal el eje x .

4. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $1 +$. Si la curva pasa por el punto $(1, 1)$, encuentre su ecuaci3n.

SOLUCI3N:

Sea $y = f(x)$ una curva cualquiera. De acuerdo con la interpretaci3n geom3trica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es la derivada y' de la ecuaci3n de la curva evaluada en el punto de tangencia.

Por lo tanto, de acuerdo con el enunciado

$$y' = 1 + (1)$$

Como se debe encontrar la curva que pase por el punto (1,1), entonces hay que resolver la ecuaci3n diferencial (1) sujeta a la condici3n y (1) = 1

Ya que la diferencial de la variable y est3 dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por x

$$x dy = (x + y) dx$$

agrupando los t3rminos a un solo lado de la igualdad

$$(x + y) dx - x dy = 0 \quad (2)$$

La ecuaci3n (2) es una ecuaci3n diferencial homog3nea con grado 1 de homogeneidad. Sacando factor com3n x, en la ecuaci3n (2) ($x \neq 0$)

multiplicando por y efectuando el cambio de variable

$$(1 + v) dx - (v dx + x dv) =$$

sacando factor com3n dx

$$(1 + v - v) dx - x dv = 0$$

simplificando

$$dx - x dv = 0 \quad (3)$$

La ecuaci3n (3) es una ecuaci3n diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuaci3n (3) por el factor

$$dx - dv = 0$$

integrando

$$- = C1 \quad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln|x| + C2$$

$$= v + C3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuaci3n (4)

$$\ln|x| - v = C$$

devolviendo el cambio de variable

$$\ln|x| - y = C$$

multiplicando por x

$$x \ln|x| - y = x C$$

despejando y

$$y = x \ln|x| - C \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación de la familia de curvas para las que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos es

Para obtener la curva de esta familia que pasa por el punto (1, 1), se sustituye en la ecuación (4) $x = 1$, $y = 1$

$$1 = 1 - C \quad C = 0$$

Este valor conseguido para C se sustituye en la ecuación (5)

$$y = x \ln|x| \quad (6)$$

La ecuación (6) es la ecuación de la curva cuya pendiente de la recta tangente es igual a y/x y tal que pasa por el punto (1, 1)

5. Encuentre una ecuación para la familia de curvas tal que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es la suma de la mitad de la ordenada y dos veces la abscisa del punto.

SOLUCIÓN:

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera de esta, de acuerdo con la interpretación geométrica de la derivada, es igual a la derivada de la ecuación de la curva evaluada en el punto de tangencia.

Si el punto tiene coordenadas (x, y) entonces la abscisa es x, la ordenada es y. Por lo tanto, matemáticamente el enunciado de este problema se traduce en la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = y/2 + 2x \quad (1)$$

Ya que la derivada de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo la ecuación (1) resulta

$$dy = (y/2 + 2x) dx$$

multiplicando por 2 y agrupando todos los términos a un lado de la igualdad

$$(2y + 4x) dx - 2dy = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) no es una ecuación diferencial ni de variables separables, ni homogénea. Sean M y N ; calculando las derivadas parciales

$$M_y = 2$$

Observe que las derivadas parciales son diferentes, por lo que la ecuación diferencial (2) no es exacta.

La ecuaci3n diferencial (2) ser3 reducible a exacta si es posible obtener un factor integrante de la forma

$$\hat{I}^{1/4}(x, y) = (3)$$

donde

$$g(v) = (4)$$

Sea $v = x$ entonces y . Sustituyendo los datos en la ecuaci3n (4)

$$g(v) = (5)$$

la ecuaci3n (5) se sustituye en la ecuaci3n (3)

$$\hat{I}^{1/4}(x, y) =$$

Multiplicando la ecuaci3n (2) por el factor integrante $\hat{I}^{1/4}(x, y) =$

$$(y + 4x) x - 2 dy = 0 (6)$$

La ecuaci3n diferencial (6) debe ser exacta. En efecto, si

$$M(x, y) = (y + 4x) \text{ y } N(x, y) = -2$$

entonces

Las derivadas parciales resultaron iguales por lo que la ecuaci3n diferencial (6) es exacta. Esto significa que existe una funci3n $F(x, y) = C$, tal que

$$dF(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy = (y + 4x) dx - 2 dy = 0 (7)$$

como la diferencial total de la funci3n $F(x, y)$ es

$$dF(x, y) = (8)$$

comparando las ecuaciones (7) y (8)

$$= M(x, y) = (y + 4x) (9)$$

$$= N(x, y) = -2 (10)$$

integrando la ecuaci3n (10) parcialmente respecto de y

$$(11)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$F(x, y)$$

$$= -2y + h(x)$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuaci3n (11)

$$F(x,y) = -2y + h(x) \quad (12)$$

derivando la ecuación (12) parcialmente respecto de x

$$(13)$$

comparando las ecuaciones (13) y (9)

$$(y + 4x) =$$

desarrollando y simplificando

Ya que la diferencial de la función h(x) es $dh(x) = dx$, sustituyendo

$$dh(x) = dx$$

integrando

$$dx \quad (14)$$

Resolviendo las integrales

se resuelve por el método de integración por partes

donde

$$=$$

$$=$$

$$= + C_1$$

sustituyendo los resultados de las integrales en (14)

$$h(x) = - + 4 C_1$$

Esta función h(x) obtenida se sustituye en la ecuación (12)

$$F(x,y) = -2y - + 4 C_1$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial (2) es

$$2y + + = K$$

multiplicando por

$$y + 4x + 8 =$$

despejando y

$$y = -4(x + 2) + (15)$$

La ecuación (15) representa la ecuación de la familia de curvas para las que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es la suma de la mitad de la ordenada más el doble de la abscisa.

6. En intercepto con el eje y, de la recta normal a una curva en cualquiera de sus puntos, es igual a 2. Si la curva pasa por el punto (3, 4), encuentre su ecuación.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$L_n : Y - y = (X - x)$$

El intercepto de la recta normal con el eje y se obtiene sustituyendo $X = 0$ en la ecuación de dicha recta

$$Y - y = (0 - x)$$

despejando Y

$$Y = y + (1)$$

La ecuación (1) representa el intercepto de la recta normal con el eje y. De acuerdo con el enunciado del problema, este intercepto debe ser igual a 2. Igualando la ecuación (1) a 2

$$y + = 2$$

multiplicando por y'

$$y y' + x = 2 y'$$

sacando factor común y'

$$(y - 2) y' + x = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) es la ecuación diferencial asociada al problema planteado y la misma debe resolverse sujeta a la condición $y(3) = 4$

Despejando y' de la ecuación (2)

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variable separable. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $(y - 2)$

$$x dx + (y - 2) dy = 0$$

integrando

$$= C_1 \quad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

sustituyendo los resultados de las integrales en (4)

$$+ = C$$

multiplicando por 2

$$x^2 + (y - 2)^2 = K \quad (5)$$

La ecuación (5) representa la ecuación de una familia de circunferencias con centro en (0,2) y radio

Para determinar la ecuación de esta familia que pasa por el punto (3,4), se sustituyen $x = 3$, $y = 4$ en la ecuación (5)

$$(3)^2 + (4 - 2)^2 = K \quad K = 13$$

El valor conseguido para K, se sustituye en la ecuación (5)

$$x^2 + (y - 2)^2 = 13 \quad (6)$$

La ecuación (6) es la ecuación de la curva cuyo intercepto de la recta normal con el eje y es igual a 2 y que pasa por el punto (3,4)

7. El intercepto en el eje y de la recta tangente a una curva en cualquiera de sus puntos, es siempre igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Si la curva pasa por el punto (2,1), encuentre su ecuación.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera P (x, y) es

$$L_t : Y - y = y' (X - x)$$

La pendiente de esta recta está dada por la derivada y' de la curva evaluada en el punto de tangencia.

El intercepto de la recta tangente con el eje y, se obtiene sustituyendo $X = 0$ en la ecuación de dicha recta y despejando Y. Así-

$$Y - y = y' (0 - x)$$

despejando Y

$$Y = y - y' x \quad (1)$$

De acuerdo con el enunciado la ecuación (1), que representa el intercepto de la recta tangente con el eje y, debe ser igual a la pendiente y' de la recta tangente

$$y - y' x = y'$$

sacando factor común y'

$$y - (x + 1) y' = 0$$

despejando y'

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (2) por el factor

$$dy - dx = 0$$

integrando

$$dy - dx = C_1 \quad (3)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$dy = \ln |y| + C_2$$

$$dx = \ln |x+1| + C_3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (3)

$$\ln |y| - \ln |x+1| = C$$

aplicando las propiedades de logaritmo

$$\ln = C$$

aplicando e

$$= K$$

despejando y

$$y = K (x + 1) \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación de la familia cuyo intercepto de la recta tangente con el eje y coincide con la pendiente de dicha recta y representa una familia de rectas. Para determinar la ecuación de la curva de esta familia que pasa por el punto $(2,1)$, se sustituyen $x = 2$, $y = 1$ en la ecuación (4)

$$1 = K (2 + 1) \quad K =$$

El valor obtenido para K , debe sustituirse en la ecuación (4)

$$y = (x + 1) \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación de la curva cuyo intercepto de la recta tangente con el eje y es igual a la pendiente de dicha recta tangente y que además pasa por el punto $(2,1)$.

8. La longitud del segmento de la recta normal entre el punto de tangencia y el punto de corte de dicha recta con el eje x es siempre igual a una constante $a > 0$. Muestre que la curva es una circunferencia de radio a .

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$L_n : Y - y = (X - x) (-y')$$

Sea $A(x_0, y_0)$ el punto de corte de la recta normal con el eje x. Ya que el punto está sobre el eje x se tiene que, $y_0 = 0$. Haciendo $Y = y_0 = 0$ en la ecuación (1)

$$0 - y = (x_0 - x) (-y')$$

despejando x_0

$$x_0 = x + y y'$$

Así, el punto de corte de la recta normal con el eje x es $A(x + y y', 0)$

La longitud del segmento de la recta normal comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte de dicha recta con el eje x, se obtiene calculando la distancia que hay entre los puntos $P(x, y)$ y $A(x + y y', 0)$

$$d(P, A) = a$$

Elevando al cuadrado

Agrupando los términos a un solo lado de la igualdad

$$y^2 + (y y')^2 + (y^2 - a^2) = 0$$

despejando y'

$$y' = \frac{a^2 - y^2}{y^2}$$

Como la diferencial de y está dada por $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = \frac{a^2 - y^2}{y^2} dx \quad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (2) por el factor

$$y^2 dy = 0$$

integrando

$$\int \frac{a^2 - y^2}{y^2} dy = \int \frac{dx}{y^2}$$

Resolviendo las integrales

$$-a^2 \frac{1}{y} + \frac{y^3}{3} = -\frac{1}{y} + C_2$$

Para resolver la integral , se efectúa el siguiente cambio de variables

$$u = -x^3 + C$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (3)

$$x = C$$

equivalentemente

$$u = x - C$$

elevando al cuadrado

$$a^2 - y^2 = (x - C)^2$$

ordenando los términos de la ecuación

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2 \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación de familia de circunferencia con centro $(C, 0)$ y radio a

9. Encuentre la ecuación de una curva que pasa por el punto $(1,1)$ con la propiedad de que la longitud del intercepto de la recta tangente con el eje x , es igual a la longitud del intercepto de la recta normal con el eje y

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera $P(x,y)$ es

$$Y - y = y' (X - x)$$

El intercepto de la recta tangente con el eje x es el segmento comprendido entre el origen del sistema de coordenadas y el punto de corte de dicha recta con el eje x .

Sea $A(ax, 0)$ las coordenadas del punto de corte de la recta tangente con el eje x . Por estar el punto A sobre el eje x , $y = 0$. Para determinar ax , se sustituyen en la ecuación de la recta tangente $X = ax$, $Y = 0$

$$-y = y' (ax - x)$$

despejando ax

$$ax = x - \frac{y}{y'}$$

Por lo tanto, el punto A tiene coordenadas $(x - \frac{y}{y'}, 0)$

La longitud del intercepto de la recta tangente con el eje x , viene dada como la longitud del segmento OA , es decir, la distancia entre el origen O del sistema de coordenadas y el punto A de corte de la recta tangente con el eje x

$$d(O, A) = |OA| = \sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2}$$

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$L_n : Y - y = (X - x)$$

El intercepto de la recta normal con el eje y es el segmento comprendido entre el origen del sistema de coordenadas y el punto de corte de dicha recta con el eje y .

Sea $B(b_x, b_y)$ las coordenadas del punto de corte de la recta normal con el eje y . Por estar el punto B sobre el eje y , $b_x = 0$. Para determinar b_y , se sustituyen en la ecuación de la recta normal $X = b_x = 0$, $Y = b_y$

$$b_y - y = (-x)$$

despejando b_y

$$b_y = y +$$

Por lo tanto, el punto B tiene coordenadas $(0, y +)$

La longitud del intercepto de la recta normal con el eje y , viene dada como la longitud del segmento OB , es decir, la distancia entre el origen O del sistema de coordenadas y el punto B de corte de la recta normal con el eje y

$$d(O, B) = |OB| = (2)$$

De acuerdo con el enunciado las ecuaciones (1) y (2) son iguales

=

(se trabaja sin el valor absoluto) multiplicando por y'

$$x y' - y = y y' + x$$

sacando factor común y'

$$(x - y) y' = x + y$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por $(x - y)$ y agrupando todos los términos a un solo lado de la igualdad

$$(x + y) dx + (y - x) dy = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial homogénea. Sacando factor común x

$$= 0$$

multiplicando por $(x \neq 0)$ y efectuando el cambio

$$(1 + v) dx + (v - 1)(v dx + x dv) = 0$$

desarrollando y sacando factor común dx

$$(1 + v + v^2 - v) dx + x(v - 1) dv = 0$$

Simplificando

$$(1 + v^2) dx + x(v - 1) dv = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuación (4) por el factor

$$dx + dv = 0$$

integrando

$$+ = C_1 \quad (5)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= \ln |x| + C_2$$

$$= -$$

$$= -\arctg v + C_3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en (5)

$$\ln |x| + -\arctg v = C$$

devolviendo el cambio de variable $(v =)$

$$\ln |x| + -\arctg = C$$

multiplicando por 2 y efectuando operaciones

$$2 \ln |x| + -2 \arctg = 2C$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$= 2C + 2 \arctg$$

simplificando y aplicando e

$$(x^2 + y^2) = K \quad (6)$$

La ecuación (6) es la ecuación de la familia de curvas para las que la longitud del intercepto de la recta tangente con el eje x , es igual a la longitud del intercepto de la recta normal con el eje y . Para obtener la curva de esta familia que pasa por el punto $(1,1)$, se sustituye en la ecuación (6) $x = 1$, $y = 1$

$$(12 + 12) = K$$

$$2 = K \quad K = 2$$

El valor obtenido para K se sustituye en la ecuación (6)

$$(x^2 + y^2) = 2$$

aplicando propiedad del producto de potencias de igual base

$$(x^2 + y^2) = 2 \quad (7)$$

La ecuación (7) es la ecuación de la curva buscada

10. En cada punto P(x,y) de una curva, la longitud del segmento que la recta tangente intercepta en el eje y es igual a $2xy^2$. Hallar la curva solución

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente es

$$L_t : Y - y = y' (X - x)$$

El segmento que la recta tangente intercepta en el eje y, es el segmento comprendido entre el origen del sistema de coordenadas y el punto de corte de la recta tangente con el eje y. Sea A (ax, ay) el punto de corte de la recta tangente con el eje y.

Por estar el punto A en el eje y, resulta que ax = 0. Para obtener ay basta con sustituir X = ax = 0, Y = ay

$$ay - y = y' (0 - x)$$

despejando ay

$$ay = y - x y'$$

Por lo tanto, el punto de corte de la recta tangente con el eje y es A (0, y - x y')

La longitud del segmento que la recta tangente intercepta en el eje y, esto es la longitud del segmento OA, es igual a la distancia del punto O(0, 0) al punto A (0, y - x y')

$$|OA| = d(O, A) =$$

De acuerdo con el enunciado esta distancia es igual a $2xy^2$

$$y - x y' = 2xy^2$$

despejando y'

$$(1)$$

La ecuación (1) es una ecuación diferencial de Bernoulli, pues puede escribirse de la forma: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. En efecto

$$y' = -2y^2 \quad (2)$$

Para resolver la ecuación diferencial (2) se multiplica por el factor (y^{-2})

$$y' y^{-2} = -2 \quad (3)$$

Se efectúa el cambio de variable

sustituyendo el cambio de variable en la ecuación (3)

$$-z' - z = -2$$

multiplicando por (-1)

$$z' + z = 2$$

despejando z'

$$z' = 2 - z$$

Ya que la diferencial de la variable z es $dz = z' dx$, sustituyendo z'

$$dz = dx$$

esta ecuación puede escribirse

$$dz + z dx = 2 dx \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial lineal pues es de la forma

$$dz + M(x) dx = N(x) dx$$

donde $M(x) = y$ y $N(x) = 2$. Para resolverla, debe determinarse un factor integrante

$$= e^{\int y dx} = x$$

multiplicando la ecuación (4) por el factor integrante

$$x dz + z dx = 2x dx \quad (5)$$

Ya que, el término izquierdo de la ecuación (5) es igual a la diferencial total del producto entre el factor integrante y la variable z , esto es, $x dz + z dx = d(xz)$, sustituyendo en la ecuación (5)

$$d(xz) = 2x dx$$

integrando

$$(6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$xz + C_1$$

$$= + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$x^2 z = x^2 + C$$

devolviendo el cambio de variables $z = y - 1$

$$x^2 y - 1 = x^2 + C$$

multiplicando por el factor $(x^2 + C)$ y

(7)

La ecuación (7) es la ecuación de la familia de curvas para las que la longitud del segmento que la recta tangente intercepta en el eje y es igual a $2x + y^2$

11. En cada punto $P(x, y)$ de una curva la longitud de la subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa de dicho punto. Hallar la curva que pasa por el punto $(1, e)$

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$L_t : Y - y = y' (X - x)$$

La subtangente es el segmento de recta comprendido entre la proyección del punto $P(x, y)$ sobre el eje x , esto es el punto $P_x(x, 0)$ y el punto de corte de la recta tangente con el eje x .

Sea $A(ax, ay)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje x . Por estar el punto A en el eje x resulta $ay = 0$. Para obtener ax , basta con sustituir en la ecuación de la recta tangente $X = ax$ $Y = ay = 0$

$$-y = y' (ax - x)$$

despejando ax

$$ax = x -$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto A son $(x - , 0)$

La longitud de la subtangente, es igual a la distancia entre los puntos P_x y A

$$|AP_x| = d(A, P_x) = (1)$$

La abscisa del punto de tangencia $P(x, y)$ es x

De acuerdo con el enunciado del problema la longitud de la subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa, es decir,

$$= K x^2 \quad (2)$$

siendo K la constante de proporcionalidad; multiplicando por y'

$$y = K x^2 y'$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y' queda

$$dy = dx \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuación (3) por el factor

$$dy - dx = 0$$

integrando

$$dy - dx = C_1 \quad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$dy = \ln |y| + C_2$$

$$= + C_3 = + C_3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln |y| = \text{equivalentemente}$$

$$\ln |y| = +$$

aplicando e y sus propiedades

$$y =$$

equivalentemente

$$y = C \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación de la familia de curvas para las que la longitud de su subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa del punto de contacto.

Para obtener la curva de la familia que pasa por el punto $(1, e)$, se sustituye en la ecuación (5) $x = 1$, $y = e$

$$e =$$

multiplicando por

$$C = e =$$

Sustituyendo este valor de C en la ecuación (5)

$$y = \dots = (6)$$

La ecuación (6) es la curva buscada.

12. Hallar la familia de curvas para las que la longitud de la parte de la recta tangente entre el punto de contacto $P(x, y)$ y el eje y , es igual a la longitud del segmento interceptado en el eje y por la recta tangente.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$Y - y = y' (X - x)$$

Sea $A(ax, ay)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje y . Por estar el punto en el eje y resulta que $ax = 0$. Para determinar ay basta con sustituir, en la ecuación de la recta tangente $X = ax = 0$ y $Y = ay$

$$ay - y = y' (-x)$$

despejando ay

$$ay = y - y' x$$

Así, las coordenadas del punto A son $(0, y - y' x)$.

La longitud de la parte de la recta tangente entre el punto de contacto $P(x, y)$ y el eje y es igual a la distancia entre el punto P y el punto A

$$d(P, A) = \sqrt{x^2 + (y - (y - y' x))^2} \quad (1)$$

La longitud del segmento interceptado por la recta tangente en el eje y es igual a la longitud del segmento comprendido entre el origen del sistema de coordenadas y el punto A , es decir, la distancia entre el punto $O(0,0)$ y el punto $A(0, y - y' x)$

$$d(O, A) = (y - y' x)$$

De acuerdo con el enunciado del problema, $d(P, A) = d(O, A)$; por lo tanto, igualando las ecuaciones (1) y (2)

$$\sqrt{x^2 + (y - (y - y' x))^2} = (y - y' x)$$

elevando al cuadrado

$$x^2 + (y - (y - y' x))^2 = (y - y' x)^2$$

desarrollando

$$x^2 + x^2 (y')^2 = y^2 - 2xyy' + x^2 (y')^2$$

simplificando

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx$$

multiplicando por el factor $(2xy)$ y agrupando todos los términos a un lado de la igualdad

$$(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial homogénea con grado dos de homogeneidad. Sacando factor común x^2

$$= 0$$

multiplicando la ecuación anterior por $(x \neq 0)$, y efectuando el cambio de variables

se obtiene

$$= 0$$

Desarrollando y sacando factor común dx

$$(1 - v^2 + 2v^2) dx + 2v dx dv = 0$$

simplificando

$$(1 + v^2) dx + 2v dx dv = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuación (4) por el factor $\frac{1}{x^2}$, resultando

integrando

$$(5)$$

Ambas integrales son inmediatas:

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln |x| + \ln |1 + v^2| = C$$

devolviendo el cambio de variable

$$\ln |x| + \ln |1 + \frac{y^2}{x^2}| = C$$

aplicando propiedades de logaritmo, desarrollando y simplificando

$$\ln |x| + \ln |1 + \frac{y^2}{x^2}| = C$$

aplicando e

$$= K \quad (6)$$

La ecuación (6) representa la familia de curvas para las que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de contacto y el eje y, es igual a la longitud del segmento interceptado por la recta tangente en el eje y

13. Determina la ecuación de la familia de curvas para las que la recta normal en un punto cualquiera $P(x,y)$ y la recta que une el origen con ese punto, forma un triángulo isósceles que tiene el eje x como base.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera $P(x,y)$ es

$$L_n : Y - y = (X - x) \cdot (-y')$$

Sea $A(ax, ay)$ el punto de corte de la recta normal con el eje x. Ya que A es un punto en el eje x se tiene que $ay = 0$. Para determinar ax basta con sustituir en la ecuación de la recta tangente $X = ax$, $Y = ay = 0$

$$-y = (ax - x) \cdot (-y')$$

despejando ax

$$ax = x + y/y'$$

Así, las coordenadas del punto A son $(x + y/y', 0)$

De acuerdo con el enunciado del problema el triángulo isósceles tiene como vértices los puntos $O(0,0)$, $P(x,y)$ y $A(x + y/y', 0)$. Además, se dice que la base está en el eje x, lo que significa que la base del triángulo es el segmento OA .

El triángulo será isósceles si los lados distintos de la base tienen igual longitud, esto es $|OP| = |AP|$. Calculando las longitudes de los lados

$$|OP| = d(O,P) = (1)$$

$$|AP| = d(A,P) = (2)$$

Iguando las ecuaciones (1) y (2)

$$=$$

elevando al cuadrado

$$=$$

simplificando

$$x^2 =$$

tomando raíz a ambos lados

$$x = y y'$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuación (3) por el factor (y)

$$x dx - y dy = 0$$

integrando

$$- = C_1 \quad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= + C_2$$

$$= + C_3$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$= C$$

Multiplicando por 2

$$x^2 - y^2 = K \quad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación de la familia de curvas para las que la recta normal en un punto cualquiera $P(x, y)$ y la recta que une el origen con el punto $P(x, y)$ forma un triángulo isósceles que tiene como base el eje x

14. El segmento de la recta normal trazada en un punto cualquiera $P(x, y)$ de una curva, cuyos extremos son este punto y el de intersección con el eje x , es cortado en dos partes iguales por el eje y .

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto cualquiera $P(x, y)$ es

$$Y - y = -(X - x)$$

Sea $A(ax, ay)$ las coordenadas del punto de corte de la recta normal con el eje x . Por estar el punto A en el eje x , resulta $ay = 0$. Para determinar ax basta con sustituir, en la ecuación de la recta normal, $X = ax$, $Y = ay = 0$

$$-y = (ax - x)$$

despejando ax

$$ax = x + y y'$$

De aquí – que las coordenadas del punto A son $(x + y y', 0)$

Sea B (bx, by) las coordenadas del punto de corte de la recta normal con el eje y. Por estar el punto B en el eje y, resulta $bx = 0$. Para determinar by basta con sustituir, en la ecuación de la recta normal, $X = bx = 0$, $Y = by$

$$by - y = (-x)$$

despejando ay

$$by = y +$$

De aquí – que las coordenadas del punto B son $(0, y +)$

De acuerdo con el enunciado del problema el segmento de la recta normal comprendido entre el punto de tangencia y el eje x, esto es el segmento PA, es cortado en dos partes iguales por el eje y. Esto equivale a decir que el punto B, punto de corte de la recta normal con el eje y, es el punto medio del segmento PA. Matemáticamente esto se expresa por medio de las ecuaciones

(1)

(2)

Sustituyendo en la ecuación (1) $ax = x + y y'$, $bx = 0$

(3)

Sustituyendo en la ecuación (2) $ay = 0$, $by = y +$

(4)

Observe que las ecuación diferencial obtenida en la ecuación (3) es la misma que la obtenida en la ecuación (4). De aquí – que la ecuación diferencial asociada al problema es

$$2x + yy' = 0$$

despejando y'

$$y' =$$

Ya que la diferencial de la variable y es $dy = y' dx$, sustituyendo y'

$$dy = dx \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica la ecuación (5) por el factor (y)

$$y \, dy + 2x \, dx = 0$$

integrando

$$+ 2 = C_1 \quad (6)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$= + C_2$$

$$= + C_3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$+ 2 = C$$

multiplicando por 2

$$y^2 + 2x^2 = K \quad (7)$$

La ecuación (7) representa la ecuación de la familia de curvas para las que el eje y divide en dos partes iguales al segmento de la recta normal entre el punto de tangencia y el punto de corte de dicha recta con el eje x

PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras de Samos (aproximadamente 582 adC - 507 adC, en griego: Πύθαγῳρας Σάμιος) fue un filósofo y matemático griego, famoso sobre todo por el Teorema de Pitágoras.

Pitágoras, nació en la isla de Samos. Siendo muy joven viajó a Mesopotamia y Egipto (también, fue enviado por su tío, Zoilo, a Milene a estudiar con Filocides de Syros y tal vez con su padre, Babydos de Syros). Tras regresar a Samos, finalizó sus estudios, según Diógenes Laercio con Hermodamas de Samos y luego fundó su primera escuela durante la tiranía de Polícrates. Abandonó Samos para escapar de la tiranía de Polícrates y se estableció en la Magna Grecia, en Crotona (o Crotón), en el sur de Italia, donde fundó su segunda escuela. Las doctrinas de este centro cultural eran regidas por reglas muy estrictas de conducta. Su escuela (aunque rigurosamente esotérica) estaba abierta a hombres y mujeres indistintamente, y la conducta discriminatoria estaba prohibida (excepto hacia impartir conocimiento a los no iniciados). Sus estudiantes pertenecían a todas las razas, religiones, y estratos económicos y sociales. Tras ser expulsados por los pobladores de Crotona, los pitagóricos se exiliaron a Tarento donde se fundó su tercera escuela.

Su escuela de pensamiento afirmaba que la estructura del universo era aritmética y geométrica, a partir de lo cual las matemáticas se convirtieron en una disciplina fundamental para toda investigación científica.

Poco se sabe de la niñez de Pitágoras. Todas las pistas de su aspecto físico probablemente sean ficticias excepto la descripción de una marca de nacimiento llamativa que Pitágoras tenía en su muslo. Es probable que tuviera dos hermanos aunque algunas fuentes dicen que él tenía tres. Era ciertamente instruido, aprendiendo a tocar la lira, poesía y a recitar a Homero. Había tres filósofos, entre sus profesores, que debieron de haber influenciado a Pitágoras en su juventud.

Pitágoras pasa por ser el introductor de pesos y medidas, descubridor de la teoría musical; en hablar de

"teor³-a" y de "fil³sofos", en postular el vac³-o, en canalizar el fervor religioso en fervor intelectual, en usar la definici³n, en considerar que el universo era una obra s³lo descifrable por medios matem³ticos fueron los pitag³ricos los primeros en sostener la forma esf³rica de la tierra.

L³gica del n³mero

Primero es la unidad, que cada cosa depende de que sea una, y ese es el principio del uno: que cada algo sea de una cierta manera el todo de si o un punto. El cuatro el tr³nsito de la superficie a la solidez que representa la pluralidad, la suma de 1, 2, 3 y 4 es la d³cada, que representa la armon³-a, cuyo contenido es la progresi³n l³gica que lleva a ella, y desde la cual se reinicia todo movimiento.

Los Pitag³ricos

Constitu³da como secta religiosa encargada de velar por los misterios revelados a Pit³goras, y dividida en miembros parcialmente iniciados (los "acusm³ticos") y totalmente iniciados (los "matem³ticos"), el cuerpo de rigurosos conocimientos cient³-ficos de esta escuela se mezcla con ideas m³-sticas y supersticiosas populares muy antiguas, vinculadas a la magia num³rica. Este tratamiento lit³rgico justifica la famosa aberraci³n a los n³meros reales irracionales, como Pi o ra³-z cuadrada de dos.

Algunos escritores creen que Pit³goras fue una escuela del pensamiento, y no s³lo una persona. Algunos opinan que fueron exactamente siete personas.

Desde el siglo V adC, una leyenda rodeaba su persona como fil³sofo y taumaturgo que propagaba la doctrina de la metempsicosis. Incluso se le consider³ una reencarnaci³n de Apolo Hiperb³reo, y se le relacion³ con la leyenda de Abaris.

MONEDA CON LA FIGURA DE PIT³GORAS

LAS TRES DIVISIONES DE BEREMIZ

La divisi³n simple, la divisi³n cierta y la divisi³n perfecta

Nos acerc³bamos a las ruinas de una peque³a aldea denominada Sippar cuando encontramos ca³-do en el camino a un pobre viajero, con las ropas desgarradas y al parecer gravemente herido. Su estado era lamentable. Acudimos en socorro del infeliz y el nos narr³ luego sus desventura.

Se llamaba Salem Nasair , y era uno de los m³is ricos mercaderes de Bagdad. Al regresar de Basora, pocos d³-as antes, con una gran caravana, por el camino de el-Hilleh, fue atacado por una chusma de n³madass persas del desierto. La caravana fue saqueada y casi todos sus componentes perecieron a manos de los beduinos. El - el jefe- consigui³ escapar milagrosamente, oculto en la arena, entre los cad³veres de sus esclavos.

Al concluir la narraci³n de su desgracia, nos pregunt³ con voz ansiosa:

- Â¿Tra³is quiz³ algo de comer? Me estoy muriendo de hambre.

- Me quedan tres panes - respond³-

- Yo llevo cinco, dijo a mi lado el Hombre que Calculaba

- Pues bien, sugiri³ el jeque, yo os ruego que juntemos esos panes y hagamos un reparto equitativo. Cuando llegue a Bagdad prometo pagar con 8 monedas de oro el pan que coma.

Así lo hicimos.

Al día siguiente al caer la tarde, entramos en la célebre ciudad de Bagdad, perla de Oriente.

Al atravesar la vistosa plaza tropezamos con un aparatoso cortejo a cuyo frente iba, en brida alazán, el poderoso Ibrahim Maluf, uno de los visires.

El visir, al ver al jeque Salem Nasair en nuestra compañía le llamo, haciendo detener a su brillante comitiva, y le preguntó:

- ¿Qué te pasa, amigo mío? ¿Cómo es que llegas a Bagdad con las ropas destrozadas y en compañía de estos dos desconocidos?

El desventurado jeque relató minuciosamente al poderoso ministro todo lo que le había ocurrido en el camino, haciendo los mayores elogios de nosotros.

- Paga inmediatamente a esos dos forasteros, le ordenó el gran visir.

Y sacando de su bolsa 8 monedas de oro se las dio a Salem Nasair, diciendo:

- Te llevaré ahora mismo al palacio, pues el Defensor de los Creyentes desea sin duda ser informado de la nueva afrenta que los bandidos y beduinos le han infligido al atacar a nuestros amigos y saquear una de nuestras caravanas en territorio del Califa.

El rico Salem nos dijo entonces:

- Os dejo, amigos míos. Quiero sin embargo, repetiros mi agradecimiento por el gran auxilio que me habéis prestado. Y para cumplir la palabra dada, os pagaré lo que tan generosamente disteis.

Y dirigiéndose al Hombre que Calculaba le dijo:

- Recibiréis cinco monedas por los cinco panes.

Y volviéndose a mí añadió:

- Y tú, ¡oh bagdalí!, recibirás tres monedas por los tres panes.

Más con gran sorpresa mía, el calculador objetó respetuoso:

- ¡Perdón, oh, jeque! La división hecha de ese modo, puede ser muy sencilla, pero no es matemáticamente cierta. Si yo entregué 5 panes he de recibir 7 monedas; mi compañero bagdalí, que dio 3 panes, debe recibir una sola moneda.

- ¡Por el nombre de Mahoma!, intervino el visir Ibrahim, interesado vivamente por el caso ¿cómo va a justificar este extranjero tan disparatado reparto? Si contribuiste con 5 panes ¿por qué exiges 7 monedas?, y si tu amigo contribuyó con 3 panes ¿por qué afirmas que él debe recibir sólo una moneda?

El hombre que Calculaba se acercó al prestigioso ministro y habló así:

- Voy a demostraros ¡Oh, visir!, que la división de las 8 monedas por mis propuestas es matemáticamente cierta. Cuando, durante el viaje teníamos hambre, yo sacaba un pan de la caja en que estaban guardados, lo dividía en tres pedazos, y cada uno de nosotros comía uno. Si yo aporté 5 panes,

aporté, por consiguiente, 15 pedazos ¿no es verdad? Si mi compañero aportó 3 panes, contribuyó con nueve pedazos. Hubo así un total de 24 pedazos, correspondiendo por tanto 8 pedazos a cada uno. De los 15 pedazos que aporté, comí 8; luego di en realidad 7. mi compañero aportó como dijo, 9 pedazos, y comí también 8: luego sólo dio 1. Los 7 que yo di y el restante con que contribuyó el bagdal formaron los 8 que correspondieron al jeque Salem Nasair. Luego, es justo que yo reciba siete monedas y mi compañero sólo una.

El gran visir, después de hacer los mayores elogios del Hombre que Calculaba, ordenó que le fueran entregadas las siete monedas, pues a mí, por derecho, sólo me correspondía una. La demostración presentada por el matemático era lógica, perfecta e incontestable.

Sin embargo, si bien el reparto resultó equitativo, no debió satisfacer plenamente a Beremiz, pues éste dirigiéndose nuevamente al sorprendido ministro, añadió:

- Esta división, que yo he propuesto, de siete monedas para mí y una para mi amigo es, como demostré ya, matemáticamente clara, pero no perfecta a los ojos de Dios.

Y juntando las monedas nuevamente las dividí en dos partes iguales. Una me la dio a mí - cuatro monedas - y se quedó la otra.

- Este hombre es extraordinario declaró el visir. No aceptó la división propuesta de ocho dinares en dos partes de cinco y tres respectivamente, y demostró que tenía derecho a recibir siete y que su compañero tenía que recibir sólo un dinar. Pero luego divide las ocho monedas en dos partes iguales y le da una de ellas a su amigo.

Y añadió con entusiasmo:

- ¡Mac Allah!. Este joven, aparte de parecerme un sabio y habilísimo en los cálculos de Aritmética, es bueno para el amigo y generoso para el compañero. Hoy mismo será mi secretario.

- Poderoso visir, dijo el Hombre que Calculaba, veo que acabáis de realizar con 29 palabras, y con un total de 135 letras, la mayor alabanza que oí en mi vida, y yo, para agradecerlos tendré que emplear exactamente 58 palabras en las que figuran nada menos que 270 letras. ¡Exactamente el doble! ¡Que Allah os bendiga eternamente y os proteja! ¡Seáis vos por siempre alabado!

La habilidad de mi amigo Beremiz llegaba hasta el extremo de contar las palabras y las letras de el que hablaba, y calcular las que iba utilizando en su respuesta para que fueran exactamente el doble. Todos quedamos maravillados ante aquella demostración de envidiable talento.

(Tomado de: El Hombre que Calculaba. Autor: Malba Tahan)

PROPIEDADES METAFÍSICAS DEL NÚMERO 2

Representa el principio de dualidad, de la diversidad, de lo par e impar. Pitágoras lo llama audacia, fuente, distribución, armonía, paciencia. El signo 2 está formado por una recta y una curva, símbolos de lo espiritual y lo material. Es la imaginación, principio de sabiduría, razón, discreción, adaptación, equilibrio, asociación. Representa la concordancia de fuerzas opuestas, la relación de los sexos, el equilibrio de espíritu y materia.

SISTEMA DE NUMERACIÓN GRIEGO

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que

usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos según la tabla siguiente

De esta forma los números parecen palabras, ya que están compuestos por letras, y a su vez las palabras tienen un valor numérico, basta sumar las cifras que corresponden a las letras que las componen. Esta circunstancia hizo aparecer una nueva suerte de disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras. En algunas sociedades como la judaica y la árabe, que utilizaban un sistema similar, el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia y ha constituido una disciplina aparte: la kábala, que persigue fines místicos y adivinatorios.

INFORMÁTICOS VS MATEMÁTICOS

Va a haber una convención de matemáticos e informáticos, y dos grupos de estudiantes de una universidad van en el mismo tren. Todos los matemáticos han comprado su billete, pero los informáticos han comprado solo uno, así que los matemáticos están preparando para reírse a su costa.

En esto que uno de los informáticos grita: –REVISOR! Y todos los informáticos se meten en el cuarto de baño. El revisor llega, les pide los billetes a los matemáticos, y al llegar al cuarto de baño llama a la puerta y dice: –EL BILLETE, POR FAVOR!. Entonces los informáticos pasan el billete por debajo de la puerta. Después, cuando el revisor ha pasado, los informáticos vuelven a sentarse y se ríen de los matemáticos.

Al acabar la convención, todos los estudiantes se vuelven a encontrar en la estación del tren y los matemáticos deciden usar el mismo truco, así que compran un solo billete para todos ellos, pero cuando suben al tren se encuentran con que los informáticos no han comprado ni un solo billete, así que de nuevo se preparan para gozar de su venganza...

Al cabo de un rato, alguien grita: –REVISOR! Y entonces todos los informáticos se dirigen a un cuarto de baño y todos los matemáticos a otro. Al cabo de unos segundos de haber cerrado las puertas, los informáticos abren su puerta y uno de ellos asoma su cabeza y mira cuidadosamente a su alrededor; luego sale del cuarto, se dirige al cuarto de baño de los matemáticos, llama a la puerta y dice: –EL BILLETE, POR FAVOR!

ENTRETENIMIENTO

SUDOKU 2

	8		5		9		2	
	2	3				1	9	
1								6
3				7				9
			2		6			
5				8				1
2								8
	6	4				9	7	
	5		8		4		1	

DESCUBRIENDO EL PENSAMIENTO Y SU AUTOR 2

19	5	10	4	7	8	10	26	10	11	20	2	10	26	10	1
20	26	10	1	24	6	10	27	5	8	10	15	25	1	8	10
14	13	20	25	20	10	14	13	20	19	5	27	13	20	11	10
10	27	2	24	6	10	8	25	20	10	2	18	13	19	11	24
2	5	25	9	20	19	5	26	20	19	5	25	11	20	2	1
13	19	11	5	8	20	10	2	11	24	21	5	2	10	7	2
15	10	6	4	20	22	25	21	7	1	1	1	1	1	1	1

EJERCICIOS PROPUESTOS SOBRE APLICACIONES DE LAS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

A PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN A

LA RECTA TANGENTE Y LA RECTA NORMAL

1. Obtenga la ecuaci3n de la familia de curvas tales que, la longitud del segmento interceptado por la recta normal en cualquiera de sus puntos en el eje de las ordenadas, es igual a la distancia desde el punto de contacto hasta el origen

R: 3 x2 =

2. Determine la familia de curvas para la cual la suma de los segmentos que resultan de la intersecci3n de la recta tangente, en un punto P cualquiera de la curva, con cada uno de los ejes coordenados es igual a 4

R: y = k x +

3. Halle la familia de curvas para las cual la suma de las longitudes de la subtangente y la subnormal (ambas, respecto al eje x) en un punto P(x, y) cualquiera de la curva, es igual a la abscisa de dicho punto.

R:

4. Obtenga la familia de curvas para la cual el cuadrado de la longitud de la subnormal (respecto del eje y) en un punto P(x, y) cualquiera de la curva es igual al producto de las coordenadas de dicho punto.

R: x3/2 - y3/2 = k

5. Determine la familia de curvas para la que el origen del sistema de coordenadas es el punto medio del segmento que en el eje y determinan los puntos de corte de la recta tangente y la recta normal en un punto cualquiera.

R: x2 =

6. Halle la ecuaci3n de la familia de curvas para las cuales la suma de las distancias de los puntos (2,0) y (- 2 , 0) a la recta tangente sea siempre igual a 2

R: $y = kx +$

7. Obtenga la familia de curvas tales que la suma de la longitud del segmento que la recta tangente intercepta en el eje x, con la longitud de la subnormal referida al eje x, es igual a 1

R: $y =$

8. Determine la ecuaci3n de la familia de curvas, tal que la longitud de la recta normal desde cualquier punto de la curva hasta el eje y es siempre igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.

R:

9. Halle la ecuaci3n de la familia de curvas para la cual la longitud de la perpendicular trazada desde el origen hasta la recta tangente es igual a la abscisa del punto de contacto.

R: $x^2 + y^2 = Kx$

10. Obtenga la ecuaci3n de la familia tal que la longitud de la subnormal en cualquiera de sus puntos sea igual a la longitud de la subtangente (ambas, referida al eje x) m3s la abscisa del punto de contacto.

R:

BIBLIOGRAF3 A
C.H. Edwards, Jr. y otros. (1993). Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con condiciones de frontera. M3xico. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 3ra edici3n.
Jim3nez, D. (1999). La Aventura de la Matem3tica . Sus secretos, protagonistas y grandes momentos. Venezuela. Editorial C.E.C. (Ediciones de El Nacional).
Marcus, D. (1999). Ecuaciones Diferenciales . M3xico. Compa3a Editorial Continental, S.A. 5ta edici3n.
Nagle, R. y otros. (2001). Ecuaciones Diferenciales y problemas con valor en la frontera. M3xico. Editorial Pearson Educaci3n de M3xico S.A. 3ra edici3n.
Perelman, Y. (1968). Matem3ticas Recreativas . Barcelona, Espa3a. Ediciones Mart3nez Roca, S.A.
Rainville, E. y otros. (1998). Ecuaciones Diferenciales . M3xico. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 8va edici3n.
Spiegel, M. (1993). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas . M3xico. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 3ra edici3n.
Tahan, M. El Hombre que Calculaba . Argentina. Editorial Multicolor.

SOLUCIÃN A ENTRETENIMIENTOS

SUDOKU 1 SUDOKU 2

6	8	7	5	1	9	3	2	4
4	2	3	7	6	8	1	9	5
1	9	5	4	3	2	7	8	6
3	4	2	1	7	5	8	6	9
9	1	8	2	4	6	5	3	7
5	7	6	9	8	3	2	4	1
2	3	1	6	9	7	4	5	8
8	6	4	3	5	1	9	7	2
7	5	9	8	2	4	6	1	3
4	9	1	8	5	3	7	2	6
5	7	6	1	2	4	8	9	3
3	2	8	6	9	7	5	1	4
1	8	5	7	3	6	9	4	2
6	3	9	5	4	2	1	7	8
2	4	7	9	8	1	6	3	5
8	1	2	3	6	9	4	5	7
9	5	3	4	7	8	2	6	1
7	6	4	2	1	5	3	8	9

DESCUBRIENDO EL PENSAMIENTO Y SU AUTOR

- La geometrÃ­a tiene dos grandes tesoros: uno es el Teorema de PitÃ¡goras y el otro el nÃºmero Ã­ureo. El primero puede compararse a una mediada de oro y el segundo a una piedra preciosa. Johannes Kepler
- No hay rama de la matemÃ¡tica, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algÃºn dÃ­a a los fenÃ³menos del mundo real. Nikolay Lobachevsky

OBSERVACIÃN:

Recuerde que el Ãngulo entre dos curvas queda determinado por el Ãngulo que forman las rectas tangentes a ambas curvas en cualquiera de sus puntos de intersecciÃ³n.

OBSERVACIÃN:

A fin de evitar confusiÃ³n con respecto a si la terna (x, y, y') , estÃ¡ referida a los puntos de la curva $F1$, o a los puntos de la curva $T1$, sÃ³lo a efectos de la demostraciÃ³n se escribirÃ¡ (u, v, v') para hacer referencia a la terna asociada a cada punto de la curva $T1$. En el punto $P(x, y)$ exactamente se tendrÃ¡ que:

$$x = u, y = v, y' = \tan \hat{I}, v' = \tan \check{I}$$

OBSERVACIÃN:

La ecuaci3n diferencial

$$f(x, y,) = 0$$

tiene sentido siempre y cuando $\tilde{\theta} \neq 90^\circ$, ya que $\tan 90^\circ$ se indetermina.

OBSERVACI3N:

Recuerde que solo para efecto de la demostraci3n, se utiliz3 (u, v, v') para hacer referencia a la terna asociada a cada punto de la curva $T(x, y, k) = 0$.

PASOS A SEGUIR PARA OBTENER LA FAMILIA DE TRAYECTORIAS A UN HAZ DE CURVAS DADO

1. Si la ecuaci3n del haz de curvas no est3 dada en forma expl3cita, debe determinarse. Sea $F(x, y, C) = 0$ la ecuaci3n del haz dado.
 2. Debe determinarse la ecuaci3n diferencial asociada al haz $F(x, y, C) = 0$. Sea $f(x, y, y') = 0$ la ecuaci3n diferencial que resulta.
 3. Si las trayectoria a buscar son a un 3ngulo $\tilde{\theta} \neq 90^\circ$, debe sustituirse y' , en la ecuaci3n diferencial que se obtuvo en el paso 2, por $\tan \tilde{\theta}$ se obtiene la ecuaci3n diferencial $f(x, y,) = 0$.
- Si las trayectorias a determinar son ortogonales ($\tilde{\theta} = 90^\circ$), se debe sustituir y' , en la ecuaci3n diferencial que se obtuvo en el paso 2, por $-\frac{1}{y'}$ se obtiene la ecuaci3n diferencial $f(x, y,) = 0$.
4. Se resuelve la ecuaci3n diferencial obtenida en el paso 3.
 5. La soluci3n general de la ecuaci3n diferencial resuelta en el paso 4, representa la familia de trayectorias que mantiene un 3ngulo $\tilde{\theta}$ con la familia de curvas dada. (en el caso en que $\tilde{\theta} = 90^\circ$, recuerde que las trayectorias se denominan trayectorias ortogonales).

OBSERVACI3N:

Observe que la constante arbitraria utilizada en la ecuaci3n de las trayectorias, no es la misma constante del haz de curvas dado.

59 x

38

472 +

177

2242

OBSERVACI3N:

Como se est3 indicando con $P(x, y)$ un punto gen3rico de la curva $F(x, y) = 0$, para poder diferenciar se indicar3 con (X, Y) las coordenadas de cualquier punto de la recta tangente o de la recta normal.

En el punto $P(x, y)$, resulta que:

$$X = x \quad Y = y$$

Y

L_t

L_n

X

$$F(x, y) = 0$$

$$P(x, y)$$

$$P(x, y)$$

$$F(x, y) = 0$$

X

L_n

L_t

Y

Acerca de la Autora

La profesora Melba Rosa

Rodríguez Urdaneta

es Licenciada en

Matemática egresada,

en el año 1986, de la

Facultad de Ciencias de

la Universidad Central de

Venezuela.

Obtuvo el título de

Magister en Docencia

Mención Matemática en

junio de 2004.

Fue miembro de la

comisión coordinadora de

la Maestría en

Matemática y

Computación y Jefe de la

Cátedra de Ecuaciones

Diferenciales.

Es miembro del

Departamento de

Matemáticas de la

Facultad de Ingeniería de

la Universidad de

Carabobo desde el año

1995 y en la actualidad se

ubica dentro del escalafón

universitario como

Profesor Asociado a

Dedicación Exclusiva.

Acerca del Libro

“Aplicaciones Geométricas y Físicas

de las Ecuaciones Diferenciales

Ordinarias de Primer Orden”

contiene aquellas aplicaciones que

contempla el programa de la

asignatura Ecuaciones Diferenciales,

que se dicta en la Facultad de
Ingeniería de la Universidad de
Carabobo: aplicaciones geométricas
a problemas de trayectorias y a
problemas que involucran a las
rectas tangente y normal;
aplicaciones físicas a problemas de
mecánica elemental, enfriamiento,
mezclas, circuitos eléctricos (ERC y
ERL) y vaciado de tanques.

En cada caso se presenta el
modelado matemático que conduce
a la ecuación diferencial, una serie
de ejercicios resueltos de forma
detallada, así como ejercicios
propuestos.