EL ESPACIO VECORIAL

MAGNITUDES VECTORIALES

Son las que para quedar perfectamente definidas es necesario dar:

− Punto de aplicación

− Dirección

− Sentido

− Módulo o valor del VECTOR

MODULO Y COSENOS DIRECTORES

$$\cos\alpha = \frac{ax}{|a|}$$

$$\cos\beta = \frac{ay}{|a|}$$

$$\cos\gamma = \frac{az}{|a|}$$

Módulo de $a = \sqrt{ax^2 + bx^2 + cx^2}$

Los cosenos directores corresponden a la fórmulas:

ESPACIOS VECTORIAL, AFÍN Y EUCLIDEO

Ángulo formado por dos vectores. Sean dos vectores libres a y b equipolentes (mismo módulo, dirección y sentido) Se designa el ángulo formado por a y b ( ) de la siguiente manera:

a) si los vectores son perpendiculares = 90º

b) si los vectores tienen la misma dirección y sentido = 0º

c) si los vectores tienen la misma dirección pero sentido distinto = 180º

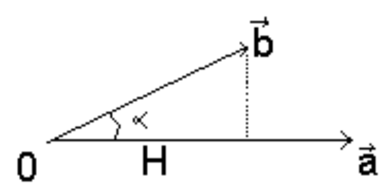
2.− DEFINICION DE PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

se define el producto escalar de dos vectores libres a y b como el producto de los módulos de cada uno de ellos por el coseno del ángulo que forma

$$a \quad b = |a| \quad |b| \quad \cos$$

- Consecuencias de esta definición:
- 1.− el producto escalar es 0 si alguno de los dos vectores es nulo

* 2.− el producto escalar es 0 cuando ambos son perpendiculares, ya que (cos 90 = 0)
* $a \quad b = \left(x1 \quad x2 + y1 \quad y2 \right)$
    * Otra definición de producto escalar: Es la que se usa cuando se dan las componentes de ambos vectores.
    * * Consecuencia de ello el resultado del producto escalar es un escalar, es decir, un número entero. No ocurre lo mismo en el producto vectorial, del que como su propio nombre indica se obtiene un vector.
    * Propiedades:
        * ◊ Conmutativa: a · b = b · a
        * ◊ Distributiva: a (b+c)= a·b + a·c
        * ◊ Para cualquier número: (·a)·b =   (a·b)
        * ◊ **3.− DEFINICION DE PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES**
        * ◊ Como ya sabemos de su resultado se obtiene otro vector. Propiedades:
        * ◊ a x b = c
        * ◊ · El punto de aplicación es el mismo
          · $C = |a| \quad |b| \quad sin$
            * Módulo de
            *
                * La dirección de c es perpendicular a la de a y b
                * Sentido se obtiene de la regla de MAXWELL (ijk)
                * **VECTOR UNITARIO**
                * Un vector es unitario cuando su módulo vale la unidad. Se definen tres vectores unitarios para definir representar los ejes:
                * $Vu = \frac{a}{|a|}$
                * A partir de a:
                * **INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR**
                * El valor absoluto de (a·b) es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro vector sobre él. Demostración:
                *



                * (a · b) = [a]·[b]· (cos)
                * $\cos\alpha = \frac{OH}{|b|} = \frac{C.opuesto}{Hipotenusa}$
                * OH = [b] · cos ! (a · b)= [a] · OH
                * (a · b) = [a]·[b] · cos
                * **NORMA DE UN VECTOR**
                * Dado un vector libre (a), se llama norma de dicho vector al producto escalar del vector por sí mismo, designándose de la siguiente manera: (a)2 = a · a
                * Consecuencias de esa definición:
                    * ◊ la norma de un vector coincide con su módulo al cuadrado:
                    * ◊ [a] · [a] · cos (a,a) = cos 0 = 1
                    * ◊

◊ [a]·[a] = [a]2

◊ **<u>DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS</u>**

◊ Dados los puntos a y b: d(AB) $=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$

◊ Propiedades:

- la distancia entre dos puntos es 0 únicamente en el caso en que A = B
- para cualquiera de los puntos su distancia siempre es +
- Simétrica aunque estén en sentidos contrarios
- Propiedad triangular: la distancia AB es siempre la suma de las distancias entre AC Y BC
- A
- Un lado es siempre menor que la suma de los otros dos.
- B C
- **<u>ANGULO ENTRE DOS VECTORES</u>**
- Utilizando la definición de producto escalar podemos calcular el cos (AB) despejando:
- $\cos(a \quad b)=\frac{a \quad b}{[a] \quad [b]} \qquad \alpha = arco\cos\frac{a \quad b}{[a] \quad [b]}$
- **<u>PARALELISMO DE RECTAS</u>**
- Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son proporcionales o si coinciden sus pendientes (m).. Su producto escalar es igual a 1.
- Para construir una recta paralela a otra se utiliza el mismo vector director y se pone el punto por donde se desea que pase la nueva recta. Se utiliza la ecuación punto pendiente.
- **<u>PERPENDICULARIDAD</u>**
- dos rectas son perpendiculares cuando sus vectores directores lo son, es decir, que sean ortogonales y que su producto escalar sea igual a 0.
- Ax2 + Bx + C = 0
- Vd de una ecuación = (−B,A) ! Pendiente (m)= $\frac{B}{A}$

  (DEL VECTOR DIRECTOR)
- Pendiente directamente de la ecuación en forma general: (m)= $\frac{A}{-B}$
- **<u>DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA</u>**
- Dado un punto P(x1,y1) y una recta Ax + Bx + c = 0, se define la distancia entre el punto p y la recta de la siguiente forma:

·

$$d(p,r) = \left| \frac{Ax1 + By1 + C}{\sqrt{(A+B)^2}} \right|$$

· * La distancia desde el punto a la recta es en línea recta y es siempre perpendicular.

· **ECUACION NORMAL DE LA RECTA**

· Nos da directamente la distancia de la recta al origen de coordenadas, siendo los coeficientes de X e Y los cosenos directores.

· Ec. Normal:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} X + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} Y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

· **ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS**

· **1.− Hallar un vector cuyas componentes sean proporcionales a 2,3,4, respectivamente, y cuyo módulo sea (116)1/2**

· Hay dos formas de hacerlo:

· a) se divide el módulo que nos dan entre el módulo de los tres valores de manera que

·

$$n = \frac{\sqrt{116} \quad \bmod ulo(dado)}{\sqrt{29} \quad \bmod ulo(a)}$$

de lo que resulta n=2

· n(2,3,4)= (x,y,z)

· Como resulta el vector (4,6,8)

· b) lo mismo sería si multiplicamos el módulo que nos dan por el vector unitario de dichos valores de manera que:

·

$$\sqrt{116} \quad \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \quad = (4,6,8)$$

· **Demostrar que i·i = j·j = k·k = 1**

· Por la segunda definición de producto escalar i · i = 1 · 1 ·cos0 = 1

· Lo mismo para j y k por lo que el resultado es 1.

· **TEMA 1.−**

· **MOVIMIENTO, MAGNITUDES FISICAS DEL MOVIMIENTO**

· **MOVIMIENTO:** el movimiento es el cambio de posición de una partícula, interviniendo además dentro de ese movimiento el tiempo, la trayectoria y la causa que ha producido dicho movimiento.

· **VECTOR DE POSICION**

· El vector posición representa la posición de la partícula en cada momento.

· r = x + y

·

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

· siendo su módulo

·

- Vector desplazamiento: corresponde a la variación del vector de posición con respecto al tiempo y viene dado por la fórmula:
- $\Delta r = r_f - r_0$
- **<u>VELOCIDAD MEDIA Y VELOCIDAD INSTANTANEA</u>**
- Velocidad es la variación de la posición de un móvil en un sentido determinado respecto del tiempo empleado en esa variación.
- Se distinguen dos tipos de Velocidad:
-
    - Velocidad media = la variación del vector desplazamiento respecto a la variación del tiempo
    - $Vmedia = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{rf - ro}{tf - to} m/s$
    -
        - Velocidad instantánea: es la derivada del vector de posición respecto al tiempo:
        - $Vinst = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} m/s$
        - **<u>ACELERACION</u>**
        - Siempre que hay cambios en la velocidad existe aceleración. Al igual que en la velocidad existe una aceleración media y una instantánea:
        -
            - Aceleración media: Es el cociente entre la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo transcurrido
            - $a \quad m = \frac{v^2 - v^1}{t^2 - t^1} =$
            -
                - Aceleración instantánea: es la

derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

- $a = \frac{dv}{dt}$
- **Component intrínsecas de la aceleración:**
- Dependen de la misma aceleración:
- * Por lo que $\left|a^2\right| = \left|a^2 n\right|$
- Aceleración tangencial: $At = \frac{d\left|v\right|}{dt}$
- Aceleración normal o centrípeta: $an = \frac{V^2}{r}$
- La tangencial es la que empuja hacia a fuera y la centrípeta hacia dentro.
- *CELERIDA Módulo

de la aceleración

- **TEMA 2**
- **MOVIMIEN RECTILIN CIRCULAR Y VIBRATOR ARMONIC SIMPLE**
- 1.− MOVIMIEN RECTILINE UNIFORME
- Se define como aquel movimiento cuya velocidad es constante en módulo, dirección y sentido. Por ello prescindimos de la notación vectorial, MAGNITUD ESCALAR, indicándose mediante signos + o − para indicar el sentido.
- A partir de la

fórmula de la velocidad instantánea

$$v = \frac{ds}{dt}$$

obtenemos que

$$ds = vdt$$

por lo que al integrar:

- **S= S0+ vt**
- $\int_{s_0}^{s} ds = v \int_{0}^{t} d$
- Así obtenemos la fórmula de la posición
- 2.− MOVIMIEN RECTILINE UNIFORME ACELERAD
- En el la aceleración es constante, por lo que a partir de la fórmula de la aceleración tangencial:
- v = v0

+ a·t

- $a = a_t = \frac{dv}{dt}$
- A partir de ella obtenemos la ecuación desde una posición inicial:
- $s = s_0 + v_0 t$
- **3.− MOVIMIEN CIRCULAR**
- Ahora la unidad del sistema Internaciona es el Rad. /seg.
- $rpm \quad rps$

! $\frac{vuelta}{segundos}$ Longitud de la circunferenc = 2 ·r
- 1 vuelta = 2 rad.
- Radián: es la longitud de

arco que es igual a la longitud de radio. La longitud del arco que mide lo mismo que el radio.

- Posición:

$$\varphi = \varphi_0 + w_{0}$$

- Velocidad angular:

$$w = \frac{\alpha}{t}$$

$$w = w_0 + \alpha$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

- Aceleración:

$$\alpha = \frac{w_f - w}{t}$$

Centrípeta o normal:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = $$

- **4.− MOVIMIE VIBRATOR**
- Se trata de una clase especial de movimiento periódico. Un

movimiento es periódico si su trayectoria se repite a intervalos iguales de tiempo.

- $F = -k \quad y$
  De donde: F= la fuerza recuperadora
- k= constante recuperadora del resorte N/m
- y= vector de posición
- Característic
  - **Elon** la posic de la partí en cada insta del móv
  - **Amp** Es la elon máx
  - **Perí** (T) es el tiem

que tarda en dar un ciclo com Ida y vuel hasta el punt de orige

- **Frec** Corr a la inve del perío 1/T. corre al nº de vece que cum 1 ciclo en 1 segu
- **4.1– Rela entr el mov recti unif y el vibr arm simp**
- **Elon** A s . Com

$w =$

!

$A \quad s$

!A

- **Velo**
$\frac{dy}{dt}$
!
$d(A$

$v =$

- **Acel**
$\frac{dv}{dt}$

- Repr gráfi
- Se colo en el eje de absc (OX el tiem toma frac senc de T. En orde se colo valo de la elon
- T= tiem
- = valo de la elon del

que se hace el cose

- **5.- CO DE MO**
- Ya Gali en el siglo XVI enur
-