

INDICE

CINEMATICA DE PARTICULAS

- **Objetivo del trabajo**
- **Introducción del tema**
- **Actividad Profesional**
- **Antecedentes**
- **Posición, Velocidad y Aceleración**
- **Movimiento en Línea Recta**
- **Descripción del movimiento**
- **Análisis del movimiento**
- **Aceleración Especificada como Función del Tiempo**
- **Aceleración Especificada como Función de la Velocidad**
- **Aceleración Especificada como Función de la Posición.**
- **Movimiento Curvilíneo de Partículas.**
- **Aplicación mecánica**
- **Aplicación practica**
- **Proyectos sobre el tema**
- **Conclusiones**
- **Recomendaciones**
- **Bibliografía**

CINEMATICA DE PARTICULAS

Introducción. –

Al diseñar un vehículo sea este una bicicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de analizar y predecir su movimiento.

Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos de cada una de sus partes móviles. Aun al diseñar estructuras estáticas como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos.

En este capítulo comenzamos el estudio del movimiento no nos interesa aquí las propiedades de los cuerpos ni las causas de sus movimientos, solo queremos describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio.

Sin embargo, tenga presente que una partícula puede representar algún punto (como el centro de masa) de un cuerpo en movimiento.

Después de definir la posición, velocidad y aceleración de un punto, consideremos el ejemplo más sencillo; el movimiento a lo largo de una línea recta. Luego mostramos como el movimiento de un punto a lo largo de una trayectoria cualquiera se expresa y analiza en varios sistemas coordenados.

Actividad Profesional. –

Las profesiones que emplearan los conocimientos sobre el presente capítulo serán todos aquellos que tienen relación con la dinámica, en nuestra carrera se relacionan: Ingeniería Hidráulica, ingeniería eólica, obtención de energía a través de los océanos, y demás que se relacionen con algún movimiento de partículas, el cual se

relaciona mucho con el movimiento de los fluidos.

La **UBA (Universidad de Buenos Aires – Argentina)**, tiene en sus programas de estudio cursos que se relacionan con este tema tanto en post-grado como en regular: *Ingeniería de Energías Renovables, Carrera de especialización en Gas, Carrera de especialización en explotación de yacimientos. Rama de Ingeniería de Reservorios, Ingeniería Hidrográfica, Evolución de Causas y Atarquinamiento de Embalses–Uso del Modelo Matemático HEC 6.*

En la **UADE (Universidad Argentina De la Empresa)**, la Facultad de Ingeniería: *Ingeniería en Energías, Ingeniería Industrial.*

Estos son algunos de los casos en los que utilizan los conocimientos acerca de la **Cinemática de Partículas.**

Antecedentes. –

Posición, Velocidad y Aceleración

Puede describir la posición de un punto P escogiendo un punto de referencia 0 y presentando el vector de posición r de 0 a P (fig. 2.1 a). Supongamos que P esta en movimiento respecto a 0, de manera que r es una función del tiempo t (fig. 2.1 b) expresamos esto con la notación

$$r = r(t)$$

la velocidad de P respecto a 0 en el tiempo t se define como:

$$V = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Donde Δt es el intervalo de tiempo.

Donde el vector $r(t + \Delta t) - r(t)$ es el cambio de posición, o desplazamiento de P, durante el intervalo de tiempo Δt (fig. 2.1 c). Así la velocidad es la razón de cambio de la posición de P respecto a 0.

Las dimensiones de una derivada se determinan como si se tratara de una proporción, por lo que las dimensiones de V son (distancia)/(tiempo). El punto de referencia usado suele ser obvio, y simplemente llamamos V a la velocidad de P., SIN EMBARGO, se debe recordar que la posición

La aceleración de P respecto a 0 en un tiempo t se define como:

$$A = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Donde Δt es el intervalo de tiempo.

Donde $v(t + \Delta t) - v(t)$ es el cambio en la velocidad de P durante el intervalo de tiempo Δt (fig. 2.2). La aceleración es la razón de cambio de velocidad de P en el tiempo t (la segunda derivada respecto al tiempo de desplazamiento), y sus dimensiones son (distancia)/(tiempo)².

Movimiento en línea recta

Analizamos este tipo simple de movimiento para obtener experiencia antes de pasar al paso general del movimiento de un punto. Sin embargo, en muchos casos prácticos los ingenieros deben analizar movimientos en línea recta, como el movimiento de un vehículo sobre un camino recto o el movimiento del pistón de un motor de combustión interna.

Descripción del movimiento. –

Puede especificar la posición de un punto P sobre una línea recta respecto a un punto de referencia O por medio de la coordenada s medida a lo largo de la línea que va de O a P (fig. 2.3 a). En este caso definimos s como positiva hacia la derecha, por lo que s es positiva cuando P está a la derecha de O y negativa cuando P está a la izquierda de O . El desplazamiento s respecto a O durante un intervalo de tiempo de t_0 a t es el cambio de posición, $s = s(t) - s(t_0)$.

Incluyendo un vector unitario $\mathbf{e}$ paralelo a la línea y que apunta en la dirección positiva s (fig. 2.3 b), podemos escribir el vector de posición de P respecto a O como

$$\mathbf{r} = s\mathbf{e}$$

Si la línea no gira, el vector unitario $\mathbf{e}$ es constante y la velocidad de P respecto a O es:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}$$

Podemos escribir el vector velocidad como $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ y obtener la ecuación escalar

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La velocidad v de un punto P a lo largo de la línea recta es la razón de cambio de su posición s . Observe que v es igual a la pendiente en un tiempo t de la tangente a la gráfica de s en función de tiempo (fig. 2.4)

La aceleración de P respecto a O es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e})}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}$$

Escribir el vector de aceleración como $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$ da la ecuación escalar

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración a es igual a la pendiente en el tiempo t de la recta tangente a la gráfica de v en función del tiempo (fig. 2.5)

Con el vector unitario $\mathbf{e}$ obtuvimos ecuaciones escalares que describen el movimiento de P . La posición queda especificada por la coordenada s , y la velocidad y la aceleración están regidas por las ecuaciones

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

dt

ANALISIS DEL MOVIMIENTO.-

En algunos casos se conoce la posición s de algún punto de un cuerpo como función del tiempo. Los ingenieros usan métodos como el radar y la interferometría de láser para medir posiciones en función del tiempo.

En este caso, con las ecuaciones anteriores se pueden obtener por diferenciación la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo. Por ejemplo, si la posición del camión de la figura 2.6 durante el intervalo de tiempo de $t=2s$ a $t=4s$ esta dada por la ecuación

$$S=6 +1/3 t^3 \text{ m}$$

Su velocidad y aceleración durante ese intervalo de tiempo son

$$v= \frac{ds}{dt} =t^2$$

dt

$$a= \frac{dv}{dt} =2t \text{ m/s}^2$$

dt

Sin embargo, es más común conocer la aceleración de un cuerpo que su posición, porque la aceleración de un cuerpo se puede determinar con la segunda ley de Newton cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre él. Una vez conocida la aceleración, con las ecuaciones (2.3) y (2.4) se pueden determinar por integración la velocidad y la posición. En las siguientes secciones analizaremos tres casos importantes.

ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DEL TIEMPO

Si la aceleración es una función conocida del tiempo $a(t)$, podemos integrar la relación

$$\frac{dv}{dt}=a(t)$$

dt

Con respecto al tiempo para determinar la velocidad en función del tiempo,

$$v = \int a(t)dt + A$$

Donde A es una constante de integración. Luego podemos integrar la relación

$$\frac{ds}{dt}=v$$

dt

Para determinar la posición en función del tiempo,

$$s = \int v dt + B$$

Donde B es otra constante de integración. Para determinar las constantes A y B se necesita información

adicional acerca del movimiento, por ejemplo los valores de v y s en un tiempo dado.

En vez de usar integrales indefinidas, la ecuación (2.5) se puede escribir como

$$dv = a(t)dt$$

E integrar desde el punto de vista de integrales definidas:

$$dv = a(t)dt$$

El límite inferior v_0 es la velocidad en el tiempo t_0 y el límite superior es la velocidad en un tiempo t cualquiera. Evaluando la integral izquierda obtenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

Podemos escribir la ecuación (2.7) como

$$ds = v dt$$

E integrar desde el punto de vista de integrales definidas,

$$ds = v dt$$

Donde el límite inferior s_0 es la posición en el tiempo t_0 y el límite superior s es la posición en un tiempo t arbitrario. Evaluando la integral izquierda, obtenemos la posición en función del tiempo:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t v dt$$

Aunque hemos mostrado como determinar la velocidad y la posición cuando se conoce la aceleración en función del tiempo, no deberían memorizarse resultados como las ecuaciones (2.9) y (2.10). Como demostraremos en el ejemplo, recomendamos que los problemas en movimiento en línea recta se resuelvan empezando con las ecuaciones (2.3) y (2.4).

Algunas observaciones útiles sobre las ecuaciones (2.9) y (2.10) son las siguientes:

El área definida por la gráfica de la aceleración de P en función del tiempo de t_0 a t es igual al cambio de la velocidad de t_0 a t (fig. 2.7a).

El área definida por la gráfica de la velocidad de P en función del tiempo de t_0 a t es igual al desplazamiento, o cambio de posición, de t_0 a t (fig. 2.7b).

A menudo se pueden usar esas relaciones para obtener una apreciación cualitativa del movimiento de un cuerpo, y en algunos casos incluso se pueden usar para determinar su movimiento.

En algunas situaciones, la aceleración de un cuerpo es constante, o casi constante. Por ejemplo, si se lanza un cuerpo denso, como una pelota de golf o una roca, y este no cae muy lejos, se puede ignorar la resistencia del aire y suponer que su aceleración es igual a la aceleración de la gravedad a nivel del mar.

Sea la aceleración una constante conocida a_0 . De las ecuaciones (2.9) y (2.10), la velocidad y la posición como funciones del tiempo son

$$v = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$

Donde s_0 y v_0 son la posición y la velocidad, respectivamente, en el tiempo t_0 . Observe que si la aceleración es constante, la velocidad es una función lineal del tiempo.

Podemos usar la regla de la cadena para expresar la aceleración desde el punto de vista de una derivada respecto a s :

$$a_0 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

$$dt \frac{ds}{dt} = ds$$

Escribiendo esta expresión como $v dv = a_0 ds$ e integrando;

$$\int v dv = \int a_0 ds$$

Obtenemos una ecuación para la velocidad en función de la posición:

$$v^2 = v_0^2 + 2 a_0 (s - s_0)$$

Probablemente el lector se encuentra familiarizado con las ecuaciones (2.11) y (2.13). Aunque esos resultados pueden ser de utilidad cuando se sabía que la aceleración es constante, hay que tener cuidado de no usarlas cuando esto no sea así.

ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DE LA VELOCIDAD

Las fuerzas aerodinámicas e hidrodinámicas ocasionan que la aceleración de un cuerpo dependa de su velocidad (fig. 2.11). Suponga que la aceleración es una función conocida de la velocidad $a(v)$:

$$\frac{dv}{dt} = a(v)$$

$$dt$$

No podemos integrar esta ecuación con respecto al tiempo para determinar la velocidad, porque $a(v)$ no se conoce como función del tiempo. Sin embargo, podemos separar variables poniendo los términos que contengan V en un lado de la ecuación y los términos que contengan t en el otro lado:

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

$$a(v)$$

Ahora podemos integrar,

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

$$a(v)$$

Ahora podemos integrar,

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

$$a(v)$$

Donde v_0 es la velocidad en el tiempo t_0 . En principio, podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función del tiempo, y luego integrar la relación

$$\frac{ds}{dt} = v$$

dt

Para determinar la posición en función del tiempo.

Usando la regla de la cadena podemos determinar también la velocidad en función de la posición. Escribiendo la aceleración como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

dt ds dt ds

Y sustituyéndola en la ecuación (2.14) obtenemos:

$$\frac{dv}{ds} v = a(v)$$

ds

Separando variables

$$v \frac{dv}{ds} = ds$$

a(v)

E integrando,

$$\int v \frac{dv}{ds} = \int ds$$

a (v)

Podemos obtener una relación entre la velocidad y la posición.

ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DE LA POSICION

Las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por resortes pueden hacer que la aceleración de un cuerpo dependa de su posición. Si la aceleración es una función conocida de la posición,

$$\frac{dv}{ds} = a(s)$$

dt

No podemos integrar con respecto al tiempo para determinar la velocidad porque s no se conoce como función del tiempo. Además, no podemos separar variables porque la ecuación tiene tres variables, v , t y s , sin embargo, usando la regla de la cadena,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

dt ds dt ds

Podemos escribir la ecuación (2.17) como

$$dv = a(s) ds$$

ds

Ahora podemos separar variables,

$$v dv = a(s) ds$$

E integrar:

$$v dv = a(s) ds$$

En principio podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función de la posición

$$v = \frac{ds}{dt} = v(s)$$

dt

Luego podemos separar variables en esta ecuación e integrar para determinar la posición en función del tiempo:

$$\frac{ds}{v} = dt$$

v(s)

Los siguientes dos ejemplos muestran como se puede analizar el movimiento de un cuerpo cuando su aceleración es una función de la velocidad o de la posición. Los pasos iniciales se resumen en la tabla 2.1

TABLA 2.1. – Determinación de la velocidad cuando se conoce la aceleración en función de la velocidad o de la posición

MOVIMIENTO CURVILINEO. –

Si el movimiento de un punto se limita a una línea recta, su vector de posición $\mathbf{r}$, su vector de velocidad $\mathbf{v}$ y su vector de aceleración $\mathbf{a}$ están completamente descritos por los escalares s , v y a respectivamente. Conocemos las direcciones de esos vectores porque son paralelos a la línea recta, pero si un punto describe una trayectoria **curvilínea**, debemos especificar tanto las magnitudes como las direcciones de esos vectores, y requerimos un sistema coordenado que se emplea para expresarlos desde el punto de vista de componentes escalares. Aunque las direcciones y magnitudes de los vectores de posición, de velocidad y de aceleración no depende del sistema coordenado que se emplea para expresarlos, mostraremos que las representaciones de esos vectores son diferentes en distintos sistemas coordenados. Muchos problemas se pueden expresar en coordenadas cartesianas, pero algunas situaciones, incluyendo los movimientos de satélites y máquinas alternativas se pueden expresar más fácilmente usando otros sistemas coordenados que ilustran los movimientos curvilíneos de puntos.

COORDENADAS CARTESIANAS. –

Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de un punto P, respecto a un punto de referencia O. Para expresar el movimiento de P en un sistema coordenado cartesiano, colocamos el origen en O (fig 2.15), de modo de las componentes de $\mathbf{r}$ son las coordenadas x , y , z de P:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Suponiendo que el sistema coordenado no gira, los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son constantes. Entonces, la velocidad de P es

Expresando la velocidad en terminos de componentes escalares

Obtenemos ecuaciones escalares que relacionan los componentes de velocidad con las coordenadas de P

La aceleracion de P es

Y expresando la aceleracion en terminos de componentes escalares,

Obtenemos las ecuaciones escalares

Las ecuaciones 2.23 y 2.25 describen el movimiento de un punto respecto a un sistema cartesiano. Observe que las ecuaciones que describen el movimiento en cada direccion coordenada son identicas en forma de las ecuaciones que describen el movimiento de un punto a lo largo de una linea recta. En consecuencia, a menudo se puede analizar el movimiento en cada direccion coordenada usando los metodos aplicables al movimiento en linea recta.

MOVIMIENTO ANGULAR. –

Hemos visto que algunos casos el movimiento curvilineo de un punto se puede analizar usando coordenadas cartesianas. En las siguientes secciones describimos problemas que se pueden analizar mas facilmente con otros sistemas coordenados. En esta seccion presentamos dos temas preliminares: el movimiento angular de una linea en un plano y la derivada respecto al tiempo de un vector unitario girando en un plano.

MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA LINEA. – Podemos especificar la posicion angular de una linea L en un plano particular respecto de una linea de referencia L0 en el plano por medio del angulo (figura 2.18). la velocidad angular de L respecto a L0 esta definida por

Y la aceleracion angular de L respecto de L0 por formula

Las dimensiones de la posicion angular, la velocidad angular y la aceleracion angular son radianes (rad), rad/s y rad/s² respectivamente. Aunque estas cantidades suelen expresarse en grados o revoluciones en vez de radianes, deben convertirse en radianes antes de usarlas en calculos.

Observe la analogia entre las ecuaciones 2.31 y 2.32 y las que relacionan la posicion, la velocidad y la aceleracion de un punto de una recta (tabla 2.2). en cada caso la posicion se especifica con una sola coordenada escalar, que puede ser positiva o negativa(en la figura 2.18 la direccion antihoraria es positiva). Como las ecuaciones son identicas los problemas que implique movimientos angulares de una linea se pueden analizar con los mismos metodos aplicados al movimiento de una linea recta.

Aplicación Mecánica. –

El rotor de un motor de reaccion esta girando a 10,000 rpm cuando se interrumpe el suministro de combustible. La aceleracion resultante es -0.02 donde es la velocidad angular en rad/seg.

- ¿Cuánto tarda el rotor en alcanzar 1000 rpm?
- ¿Cuántas revoluciones gira el rotor mientras desacelera a 1000 rpm?

ESTRATEGIA

Para analizar el movimiento angular del rotor, definimos una línea L fija al rotor y perpendicular a su eje (fig 2.20). luego examinamos el movimiento de L respecto a la línea de referencia L₀. La velocidad, posición y aceleración angulares de L definen el movimiento angular del rotor.

SOLUCION

La conversión de rpm a rad/s es

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ revolución /min} \times \left(\frac{2 \text{ rad}}{1 \text{ revolución}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)$$

$$= \frac{1}{30} \text{ rad/s}$$

La aceleración angular es

$$= \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -0.02$$

dt

separando variables,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -0.02 dt$$

e integramos, definiendo $t = 0$ como el tiempo en que se corta el combustible:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -0.02 dt$$

evaluando las integrales y despejando t obtenemos

$$t = \left(\frac{1}{-0.02} \right) \ln \left(\frac{10,000}{30} \right) = 115.1 \text{ s}$$

$$\bullet \frac{1,000}{30}$$

(b) escribimos la aceleración angular como

$$= \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = -0.02$$

dt d dt d

separamos variables

$$d = -0.02 d$$

e integramos, definiendo $\theta = 0$ como la posición angular en que se corta el combustible:

$$d = -0.02 d$$

despejando obtenemos

$$= \left(\frac{1}{-0.02} \right) (10,000 / 30) - (1,000 / 30)$$

0.02

=15,000 rad= 7,500 revoluciones.

Bibliografía.–

Mecánica Aplicada (cinemática de partículas)

Beer,